

La mappa logistica

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Ripasso sulle successioni

Per poter parlare della mappa logistica e delle mappe ricorsive, dobbiamo fare un veloce ripasso del concetto di *successione*. Abbiamo già ricordato, altrove, la definizione di successione numerica:

Definizione

Una successione numerica è una funzione

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

che ad ogni numero naturale associa un numero (reale).

Ripasso sulle successioni

Per poter parlare della mappa logistica e delle mappe ricorsive, dobbiamo fare un veloce ripasso del concetto di *successione*. Abbiamo già ricordato, altrove, la definizione di successione numerica:

Definizione

Una successione numerica è una funzione

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

che ad ogni numero naturale associa un numero (reale).

Come notazione, useremo scrivere a_n al posto di $a(n)$ per indicare l' n -esimo elemento della successione.

Limite di una successione

Abbiamo già introdotto anche la nozione di **limite di una successione** per n che tende all'infinito.

Limite di una successione

Abbiamo già introdotto anche la nozione di **limite di una successione** per n che tende all'infinito.

Informalmente: se al crescere di n si ha che a_n diventa arbitrariamente grande, allora diremo che “ a_n tende all'infinito” e scriveremo

$$a_n \rightarrow \infty \quad \text{o anche} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty .$$

Limite di una successione

Abbiamo già introdotto anche la nozione di **limite di una successione** per n che tende all'infinito.

Informalmente: se al crescere di n si ha che a_n diventa arbitrariamente grande, allora diremo che “ a_n tende all'infinito” e scriveremo

$$a_n \rightarrow \infty \quad \text{o anche} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty .$$

Se invece al crescere di n si ha che a_n si avvicina arbitrariamente a un certo numero ℓ , allora diremo che “ a_n converge a ℓ ” e scriveremo

$$a_n \rightarrow \ell \quad \text{o anche} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell .$$

Limite di una successione

Abbiamo già introdotto anche la nozione di **limite di una successione** per n che tende all'infinito.

Informalmente: se al crescere di n si ha che a_n diventa arbitrariamente grande, allora diremo che “ a_n tende all'infinito” e scriveremo

$$a_n \rightarrow \infty \quad \text{o anche} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty .$$

Se invece al crescere di n si ha che a_n si avvicina arbitrariamente a un certo numero ℓ , allora diremo che “ a_n converge a ℓ ” e scriveremo

$$a_n \rightarrow \ell \quad \text{o anche} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell .$$

Ovviamente queste nozioni possono essere formulate in modo più rigoroso, ma non è l'obiettivo di questa lezione.

Introduzione alla mappa logistica

Veniamo ora al tema principale.

La mappa logistica è un esempio semplice di quello che in matematica viene chiamato **sistema dinamico**, ovvero un modello matematico che descrive l'evoluzione nel tempo di un sistema (di solito fisico, ma anche biologico, economico, antropologico. . .).

Introduzione alla mappa logistica

Veniamo ora al tema principale.

La mappa logistica è un esempio semplice di quello che in matematica viene chiamato **sistema dinamico**, ovvero un modello matematico che descrive l'evoluzione nel tempo di un sistema (di solito fisico, ma anche biologico, economico, antropologico. . .).

Insomma, di solito si cerca di tradurre il comportamento di un sistema "reale" in equazioni "matematiche" (quello che viene chiamato il *modello*), e queste equazioni, calcolate su un certo stato del sistema, restituiscono lo stato del sistema a un istante successivo.

Introduzione alla mappa logistica

Veniamo ora al tema principale.

La mappa logistica è un esempio semplice di quello che in matematica viene chiamato **sistema dinamico**, ovvero un modello matematico che descrive l'evoluzione nel tempo di un sistema (di solito fisico, ma anche biologico, economico, antropologico. . .).

Insomma, di solito si cerca di tradurre il comportamento di un sistema "reale" in equazioni "matematiche" (quello che viene chiamato il *modello*), e queste equazioni, calcolate su un certo stato del sistema, restituiscono lo stato del sistema a un istante successivo.

In particolare, la mappa logistica è un sistema dinamico **discreto**, nel senso che lo stato di un sistema è descritto solo a intervalli prefissati di tempo, e non ad ogni istante.

Dinamica delle popolazioni

Per fare un esempio: supponiamo di voler descrivere il numero di individui di una certa popolazione di animali nel corso dei mesi.

Dinamica delle popolazioni

Per fare un esempio: supponiamo di voler descrivere il numero di individui di una certa popolazione di animali nel corso dei mesi.

Dobbiamo prima cercare di descrivere in modo matematico il sistema, ovvero dobbiamo cercare di “inventare” delle equazioni che in qualche modo simulino il comportamento del sistema.

Dinamica delle popolazioni

Per fare un esempio: supponiamo di voler descrivere il numero di individui di una certa popolazione di animali nel corso dei mesi.

Dobbiamo prima cercare di descrivere in modo matematico il sistema, ovvero dobbiamo cercare di “inventare” delle equazioni che in qualche modo simulino il comportamento del sistema.

Questa è senza dubbio la parte più difficile, in cui dovremo magari partire da un modello semplice per poi andare a modificarlo per renderlo più realistico.

Dinamica delle popolazioni

Per fare un esempio: supponiamo di voler descrivere il numero di individui di una certa popolazione di animali nel corso dei mesi.

Dobbiamo prima cercare di descrivere in modo matematico il sistema, ovvero dobbiamo cercare di “inventare” delle equazioni che in qualche modo simulino il comportamento del sistema.

Questa è senza dubbio la parte più difficile, in cui dovremo magari partire da un modello semplice per poi andare a modificarlo per renderlo più realistico.

Un punto di partenza potrebbe essere l'osservazione che:

maggiore è il numero di individui, maggiore è la possibilità che questi individui possano riprodursi e quindi generare altri individui.

Sistema dinamico discreto

Quindi potremmo immaginare che, chiamando x_n il numero di individui nel mese n , tale numero nel mese successivo diventi

$$x_{n+1} = kx_n$$

dove $k > 1$ è una costante che tiene conto della capacità riproduttiva della specie.

Sistema dinamico discreto

Quindi potremmo immaginare che, chiamando x_n il numero di individui nel mese n , tale numero nel mese successivo diventi

$$x_{n+1} = kx_n$$

dove $k > 1$ è una costante che tiene conto della capacità riproduttiva della specie.

Se ad esempio una specie ha una capacità riproduttiva di 2, ovvero tutti gli individui generano un figlio ogni mese, si avrà l'equazione

$$x_{n+1} = 2x_n$$

da cui si capisce che il numero di individui raddoppia ogni mese.

Sistema dinamico discreto

Quindi potremmo immaginare che, chiamando x_n il numero di individui nel mese n , tale numero nel mese successivo diventi

$$x_{n+1} = kx_n$$

dove $k > 1$ è una costante che tiene conto della capacità riproduttiva della specie.

Se ad esempio una specie ha una capacità riproduttiva di 2, ovvero tutti gli individui generano un figlio ogni mese, si avrà l'equazione

$$x_{n+1} = 2x_n$$

da cui si capisce che il numero di individui raddoppia ogni mese.

Questo è un semplice sistema dinamico discreto: l'equazione prende in ingresso lo stato attuale del sistema (il numero di individui in questo mese) e restituisce lo stato del sistema all'istante successivo (il numero di individui nel prossimo mese).

Modello malthusiano

Per quanto semplice, il modello

$$x_{n+1} = kx_n$$

ha un nome: si chiama **modello di Malthus**, dal nome dell'economista inglese Thomas Malthus (1766-1834), che appunto teorizzava una crescita esponenziale della popolazione (umana, in questo caso) in presenza di risorse illimitate.

Modello malthusiano

Per quanto semplice, il modello

$$x_{n+1} = kx_n$$

ha un nome: si chiama **modello di Malthus**, dal nome dell'economista inglese Thomas Malthus (1766-1834), che appunto teorizzava una crescita esponenziale della popolazione (umana, in questo caso) in presenza di risorse illimitate.

Infatti è facile *risolvere* il modello: se x_0 è la popolazione iniziale, si ha

$$x_1 = kx_0, \quad x_2 = kx_1 = k^2x_0, \quad x_3 = kx_2 = k^3x_0 \quad \dots$$

Modello malthusiano

Per quanto semplice, il modello

$$x_{n+1} = kx_n$$

ha un nome: si chiama **modello di Malthus**, dal nome dell'economista inglese Thomas Malthus (1766-1834), che appunto teorizzava una crescita esponenziale della popolazione (umana, in questo caso) in presenza di risorse illimitate.

Infatti è facile *risolvere* il modello: se x_0 è la popolazione iniziale, si ha

$$x_1 = kx_0, \quad x_2 = kx_1 = k^2x_0, \quad x_3 = kx_2 = k^3x_0 \quad \dots$$

e quindi in generale

$$x_n = k^n x_0.$$

La popolazione cresce esponenzialmente.

Modello malthusiano

Per quanto semplice, il modello

$$x_{n+1} = kx_n$$

ha un nome: si chiama **modello di Malthus**, dal nome dell'economista inglese Thomas Malthus (1766-1834), che appunto teorizzava una crescita esponenziale della popolazione (umana, in questo caso) in presenza di risorse illimitate.

Infatti è facile *risolvere* il modello: se x_0 è la popolazione iniziale, si ha

$$x_1 = kx_0, \quad x_2 = kx_1 = k^2x_0, \quad x_3 = kx_2 = k^3x_0 \quad \dots$$

e quindi in generale

$$x_n = k^n x_0.$$

La popolazione cresce esponenzialmente.

Ciò che impedisce una crescita così spropositata è appunto la disponibilità delle risorse, che ovviamente cala all'aumentare della popolazione.

La mappa logistica

Se si vuol tener conto che la capacità riproduttiva dipende anche dal numero attuale di individui, nel senso che se gli individui sono troppi ci saranno meno risorse e quindi meno possibilità di riprodursi, si può pensare di prendere il coefficiente k non più costante, ma dipendente da x_n , e fatto in modo che k decresca se x_n cresce.

La mappa logistica

Se si vuol tener conto che la capacità riproduttiva dipende anche dal numero attuale di individui, nel senso che se gli individui sono troppi ci saranno meno risorse e quindi meno possibilità di riprodursi, si può pensare di prendere il coefficiente k non più costante, ma dipendente da x_n , e fatto in modo che k decresca se x_n cresce.

La scelta più semplice è quella di prendere

$$k = a(M - x_n) \quad a, M > 0$$

dove M rappresenta la soglia critica del numero di individui:

- se $x_n < M$ si ha $k > 0$ e la popolazione tenderà ancora ad aumentare
- se $x_n > M$ si ha $k < 0$ e la popolazione tenderà a decrescere.

La mappa logistica

In questo modo si ottiene il sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = a(M - x_n)x_n$$

che è chiamato **mappa logistica**.

La mappa logistica

In questo modo si ottiene il sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = a(M - x_n)x_n$$

che è chiamato **mappa logistica**.

Di solito, per non aver troppe costanti in gioco, si pone $M = 1$: si può pensare che x_n non rappresenti il numero di individui di una popolazione, ma la frazione corrispondente rispetto alla soglia critica M . In questo modo la mappa logistica diviene

$$x_{n+1} = a(1 - x_n)x_n$$

dove $a > 0$ rappresenta la capacità riproduttiva massima della popolazione.

Le successioni per ricorsione

I sistemi dinamici come la mappa logistica sono del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.

Le successioni per ricorsione

I sistemi dinamici come la mappa logistica sono del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.

Quindi per conoscere il sistema in un dato istante devo conoscere il sistema all'istante precedente.

Le successioni per ricorsione

I sistemi dinamici come la mappa logistica sono del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.

Quindi per conoscere il sistema in un dato istante devo conoscere il sistema all'istante precedente.

La mappa logistica fa parte della famiglia delle **successioni ricorsive**.
A partire dal numero x_0 (lo stato iniziale) si ricava

$$x_1 = f(x_0),$$

Le successioni per ricorsione

I sistemi dinamici come la mappa logistica sono del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.

Quindi per conoscere il sistema in un dato istante devo conoscere il sistema all'istante precedente.

La mappa logistica fa parte della famiglia delle **successioni ricorsive**.

A partire dal numero x_0 (lo stato iniziale) si ricava

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)),$$

Le successioni per ricorsione

I sistemi dinamici come la mappa logistica sono del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.

Quindi per conoscere il sistema in un dato istante devo conoscere il sistema all'istante precedente.

La mappa logistica fa parte della famiglia delle **successioni ricorsive**.

A partire dal numero x_0 (lo stato iniziale) si ricava

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \quad x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))), \quad \dots$$

Le successioni per ricorsione

I sistemi dinamici come la mappa logistica sono del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.

Quindi per conoscere il sistema in un dato istante devo conoscere il sistema all'istante precedente.

La mappa logistica fa parte della famiglia delle **successioni ricorsive**.

A partire dal numero x_0 (lo stato iniziale) si ricava

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \quad x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))), \quad \dots$$

In generale si usa la notazione $x_n = f^n(x_0)$, dove f^n non indica un elevamento a potenza, ma una *composizione* della funzione f con se stessa ripetuta n volte.

Le successioni per ricorsione

I sistemi dinamici come la mappa logistica sono del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove f è una funzione numerica.

Quindi per conoscere il sistema in un dato istante devo conoscere il sistema all'istante precedente.

La mappa logistica fa parte della famiglia delle **successioni ricorsive**.

A partire dal numero x_0 (lo stato iniziale) si ricava

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \quad x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))), \quad \dots$$

In generale si usa la notazione $x_n = f^n(x_0)$, dove f^n non indica un elevamento a potenza, ma una *composizione* della funzione f con se stessa ripetuta n volte.

Si parla in questo caso anche di **mappa iterata**, perché si itera l'applicazione di una funzione (mappa è sinonimo di funzione).

Studiare un sistema dinamico

Una delle cose che interessano di più quando si studia un sistema dinamico, è capire dove “vanno a finire” certe condizioni iniziali, ovvero qual è il limite della successione x_n se si parte da un certo dato iniziale x_0 .

Studiare un sistema dinamico

Una delle cose che interessano di più quando si studia un sistema dinamico, è capire dove “vanno a finire” certe condizioni iniziali, ovvero qual è il limite della successione x_n se si parte da un certo dato iniziale x_0 . Naturalmente, il valore di questo limite può benissimo dipendere dalla condizione di partenza.

Studiare un sistema dinamico

Una delle cose che interessano di più quando si studia un sistema dinamico, è capire dove “vanno a finire” certe condizioni iniziali, ovvero qual è il limite della successione x_n se si parte da un certo dato iniziale x_0 . Naturalmente, il valore di questo limite può benissimo dipendere dalla condizione di partenza.

Ad esempio, nella mappa logistica

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

è chiaro che se la condizione iniziale è $x_0 = 0$, allora si avrà $x_n = 0$ per ogni n , e dunque anche il limite fa 0.

Studiare un sistema dinamico

Una delle cose che interessano di più quando si studia un sistema dinamico, è capire dove “vanno a finire” certe condizioni iniziali, ovvero qual è il limite della successione x_n se si parte da un certo dato iniziale x_0 . Naturalmente, il valore di questo limite può benissimo dipendere dalla condizione di partenza.

Ad esempio, nella mappa logistica

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

è chiaro che se la condizione iniziale è $x_0 = 0$, allora si avrà $x_n = 0$ per ogni n , e dunque anche il limite fa 0.

Ciò è molto naturale: se non ci sono individui all'inizio, essi non possono neanche cominciare a riprodursi, e quindi non ce ne saranno mai.

Studiare un sistema dinamico

Una delle cose che interessano di più quando si studia un sistema dinamico, è capire dove “vanno a finire” certe condizioni iniziali, ovvero qual è il limite della successione x_n se si parte da un certo dato iniziale x_0 . Naturalmente, il valore di questo limite può benissimo dipendere dalla condizione di partenza.

Ad esempio, nella mappa logistica

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

è chiaro che se la condizione iniziale è $x_0 = 0$, allora si avrà $x_n = 0$ per ogni n , e dunque anche il limite fa 0.

Ciò è molto naturale: se non ci sono individui all'inizio, essi non possono neanche cominciare a riprodursi, e quindi non ce ne saranno mai.

Questa conclusione, per quanto scontata, ci dice comunque che il modello non porta a conclusioni strampalate, almeno in questo caso.

Il metodo grafico

Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

Il metodo grafico

Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

- si disegna la funzione $f(x)$

Il metodo grafico

Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

- si disegna la funzione $f(x)$
- si traccia la bisettrice del I-III quadrante: $y = x$

Il metodo grafico

Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

- si disegna la funzione $f(x)$
- si traccia la bisettrice del I-III quadrante: $y = x$
- si parte sull'asse x dalla condizione iniziale x_0 , muovendosi poi **in verticale** fino al grafico di f , e **in orizzontale** fino alla bisettrice

Il metodo grafico

Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

- si disegna la funzione $f(x)$
- si traccia la bisettrice del I-III quadrante: $y = x$
- si parte sull'asse x dalla condizione iniziale x_0 , muovendosi poi **in verticale** fino al grafico di f , e **in orizzontale** fino alla bisettrice
- si continua così per un po' di volte, cercando di capire cosa succede alla traiettoria

Il metodo grafico

Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

- si disegna la funzione $f(x)$
- si traccia la bisettrice del I-III quadrante: $y = x$
- si parte sull'asse x dalla condizione iniziale x_0 , muovendosi poi **in verticale** fino al grafico di f , e **in orizzontale** fino alla bisettrice
- si continua così per un po' di volte, cercando di capire cosa succede alla traiettoria

Ogni volta che si interseca il grafico di f , si ottengono i valori della successione agli istanti successivi, quindi ci si può fare un'idea, anche se informale, su cosa succede alla successione all'aumentare di n .

Il metodo grafico

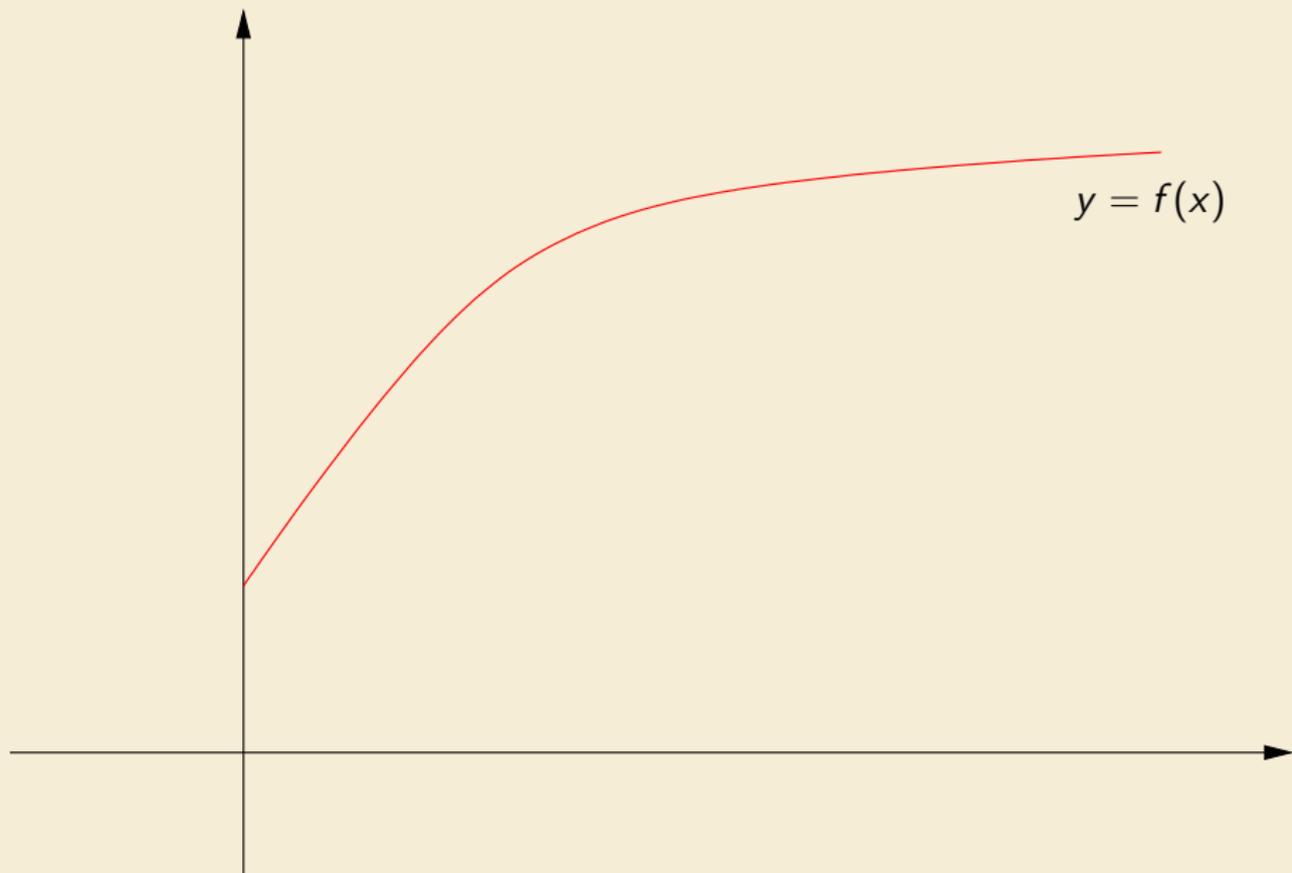
Esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali in una mappa iterata. Si fa così:

- si disegna la funzione $f(x)$
- si traccia la bisettrice del I-III quadrante: $y = x$
- si parte sull'asse x dalla condizione iniziale x_0 , muovendosi poi **in verticale** fino al grafico di f , e **in orizzontale** fino alla bisettrice
- si continua così per un po' di volte, cercando di capire cosa succede alla traiettoria

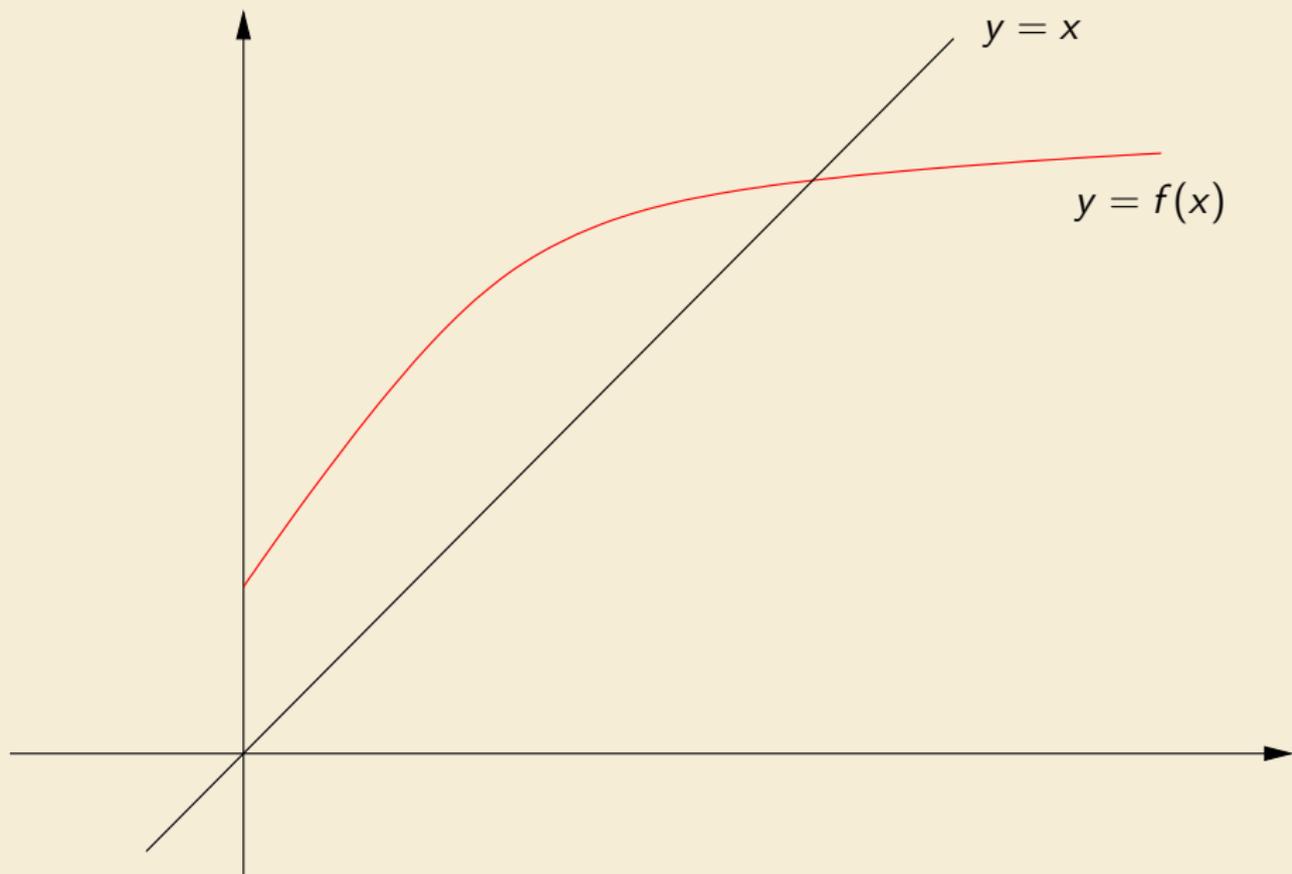
Ogni volta che si interseca il grafico di f , si ottengono i valori della successione agli istanti successivi, quindi ci si può fare un'idea, anche se informale, su cosa succede alla successione all'aumentare di n .

Ne vediamo un esempio nel prossimo lucido.

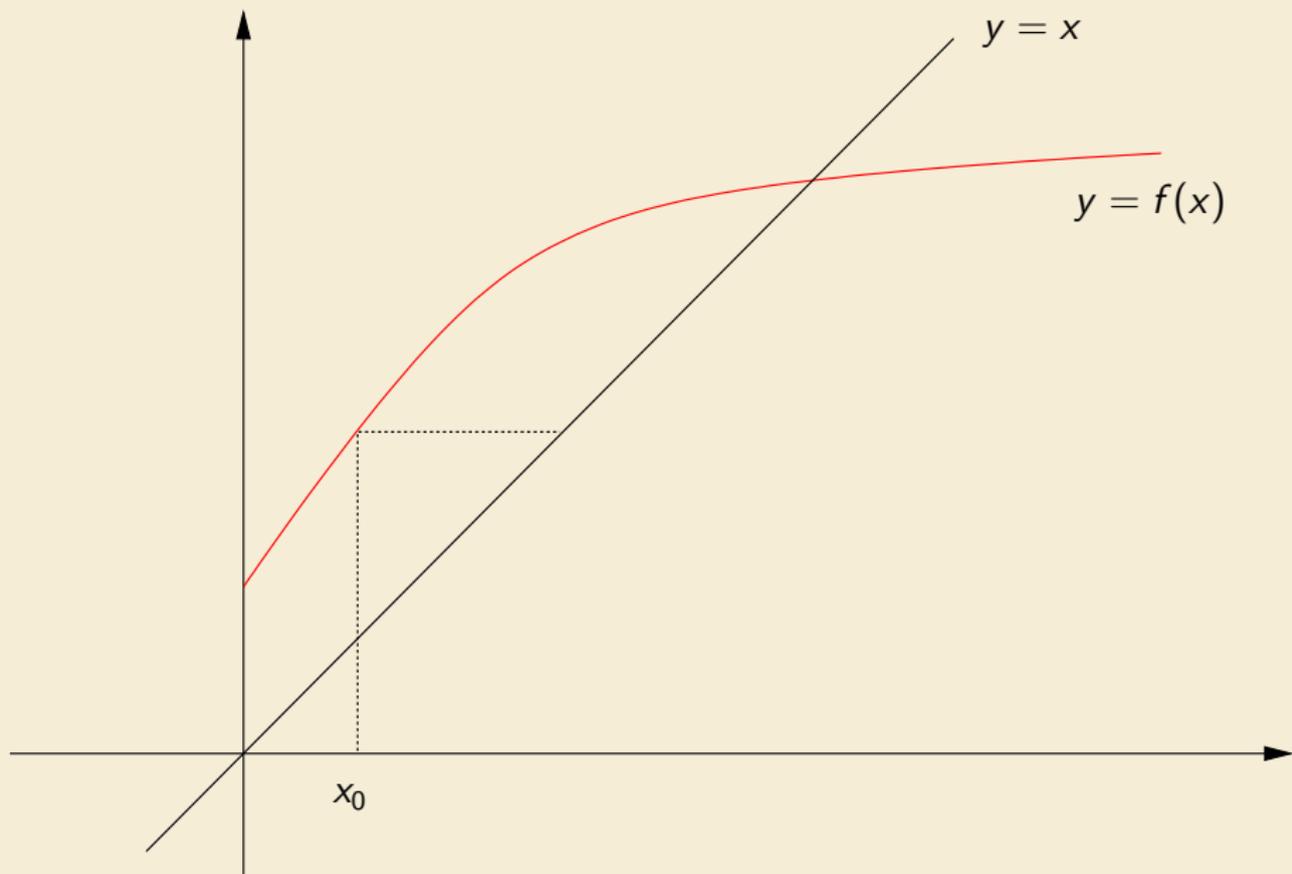
Metodo grafico



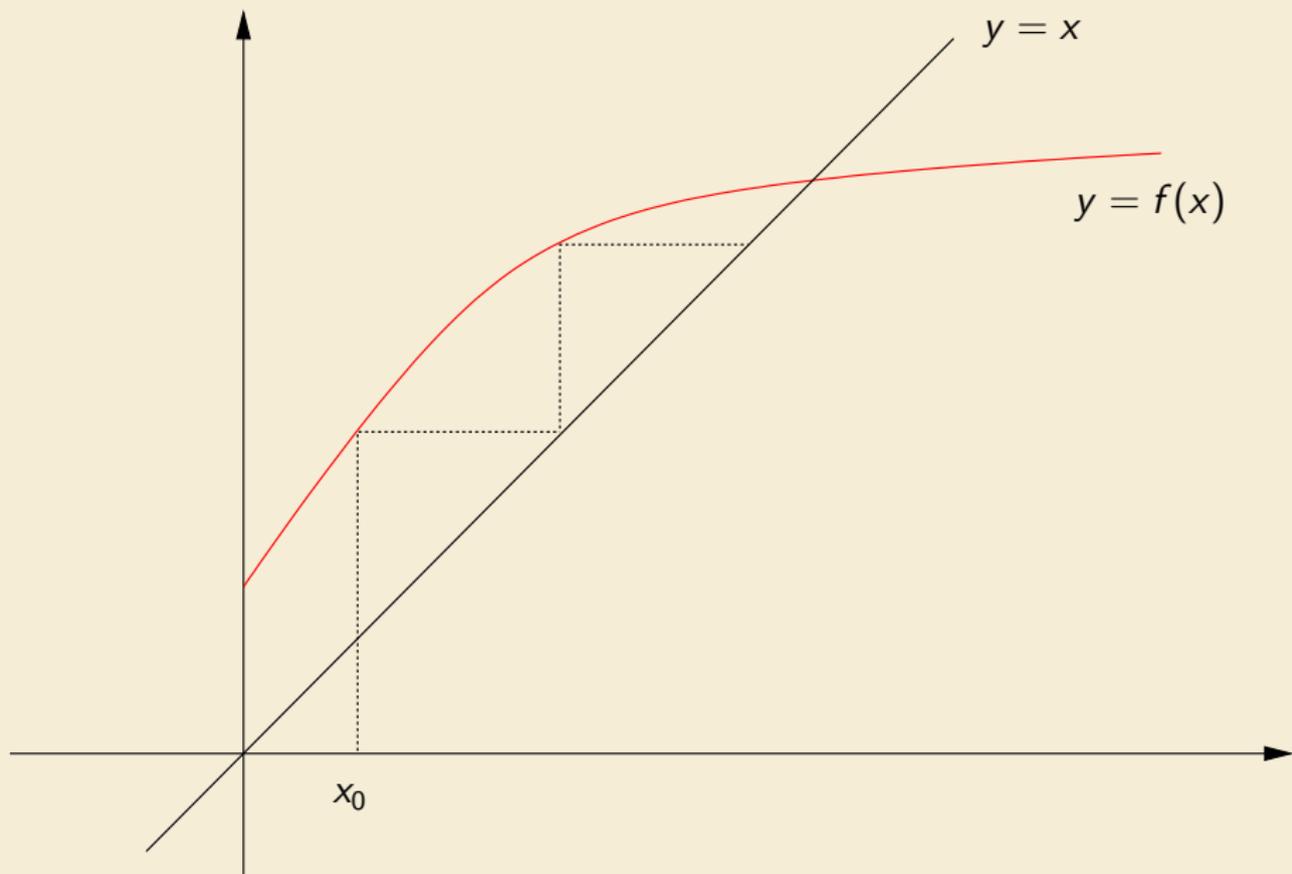
Metodo grafico



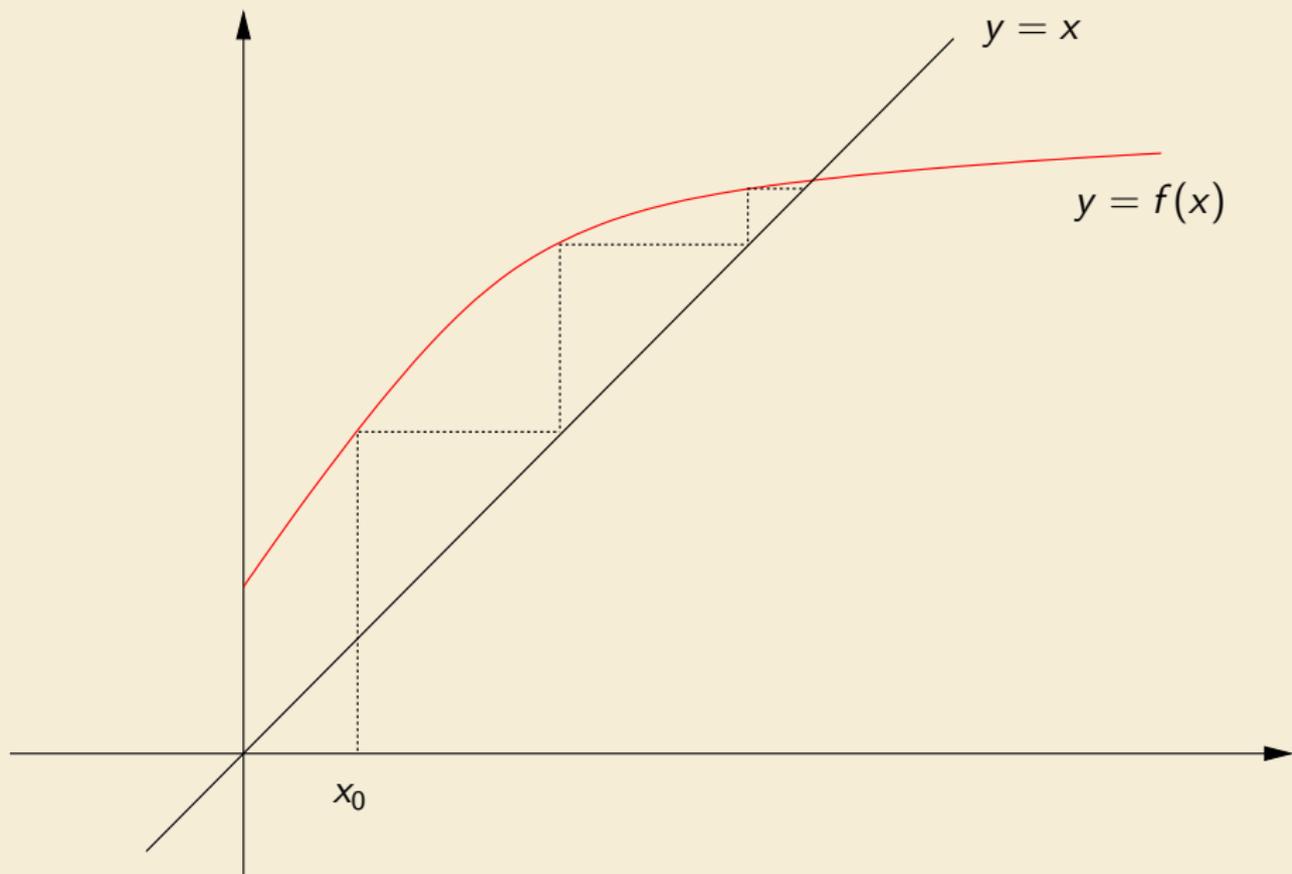
Metodo grafico



Metodo grafico



Metodo grafico



Commento al primo grafico

In questo caso si capisce che a partire da quella posizione x_0 si andrà a convergere verso una certa posizione, che è data dall'intersezione del grafico di f con la bisettrice, ovvero dall'equazione

$$f(x) = x.$$

Le soluzioni di questa equazione, che vengono chiamate **punti fissi** di f , sono le posizioni di equilibrio, ovvero: se si parte da lì, non ci si muove.

Commento al primo grafico

In questo caso si capisce che a partire da quella posizione x_0 si andrà a convergere verso una certa posizione, che è data dall'intersezione del grafico di f con la bisettrice, ovvero dall'equazione

$$f(x) = x.$$

Le soluzioni di questa equazione, che vengono chiamate **punti fissi** di f , sono le posizioni di equilibrio, ovvero: se si parte da lì, non ci si muove. Ad esempio, la posizione $x = 0$ per la mappa logistica è di equilibrio.

Commento al primo grafico

In questo caso si capisce che a partire da quella posizione x_0 si andrà a convergere verso una certa posizione, che è data dall'intersezione del grafico di f con la bisettrice, ovvero dall'equazione

$$f(x) = x.$$

Le soluzioni di questa equazione, che vengono chiamate **punti fissi** di f , sono le posizioni di equilibrio, ovvero: se si parte da lì, non ci si muove. Ad esempio, la posizione $x = 0$ per la mappa logistica è di equilibrio. Naturalmente, se fossimo partiti da un valore iniziale diverso avremmo potuto avere ben altro esito.

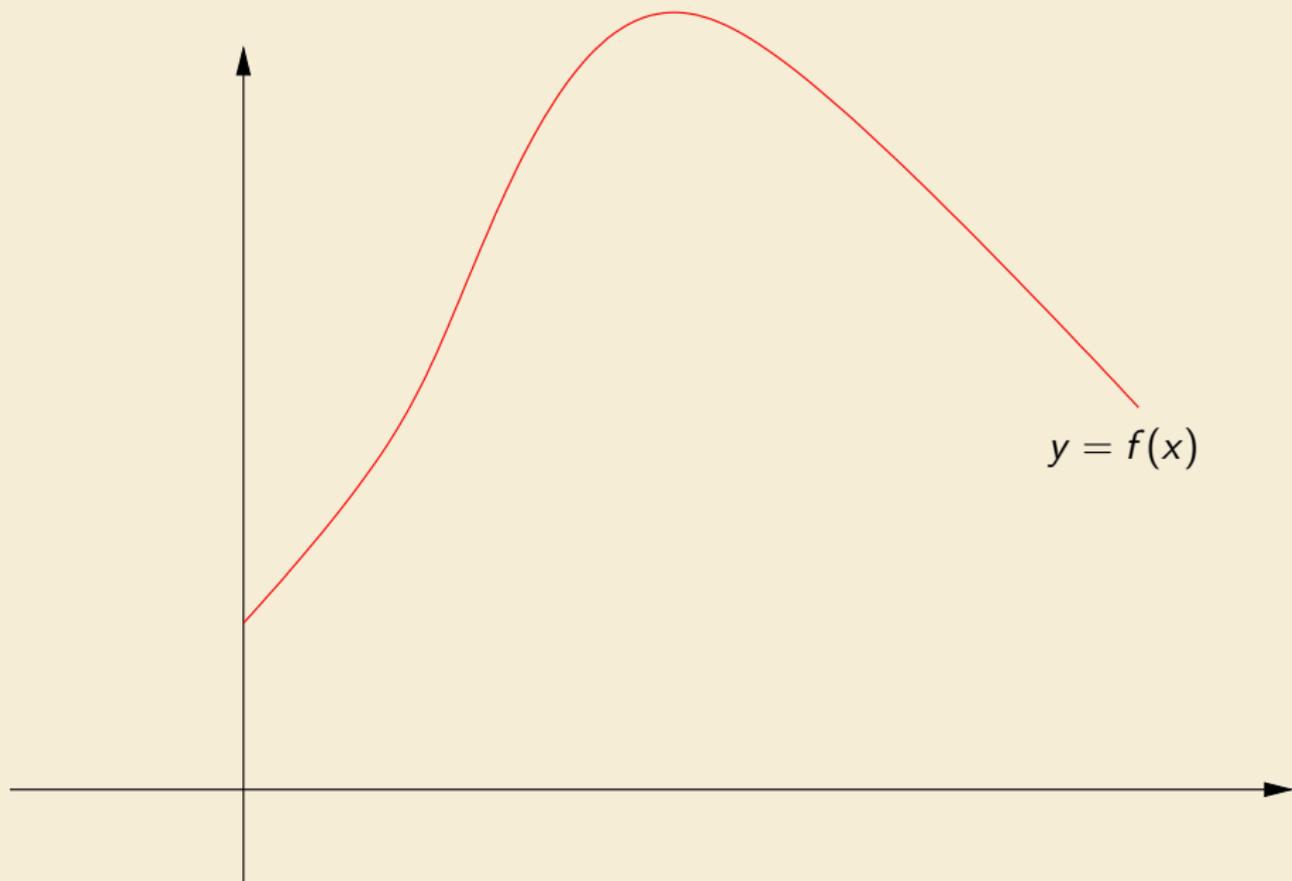
Commento al primo grafico

In questo caso si capisce che a partire da quella posizione x_0 si andrà a convergere verso una certa posizione, che è data dall'intersezione del grafico di f con la bisettrice, ovvero dall'equazione

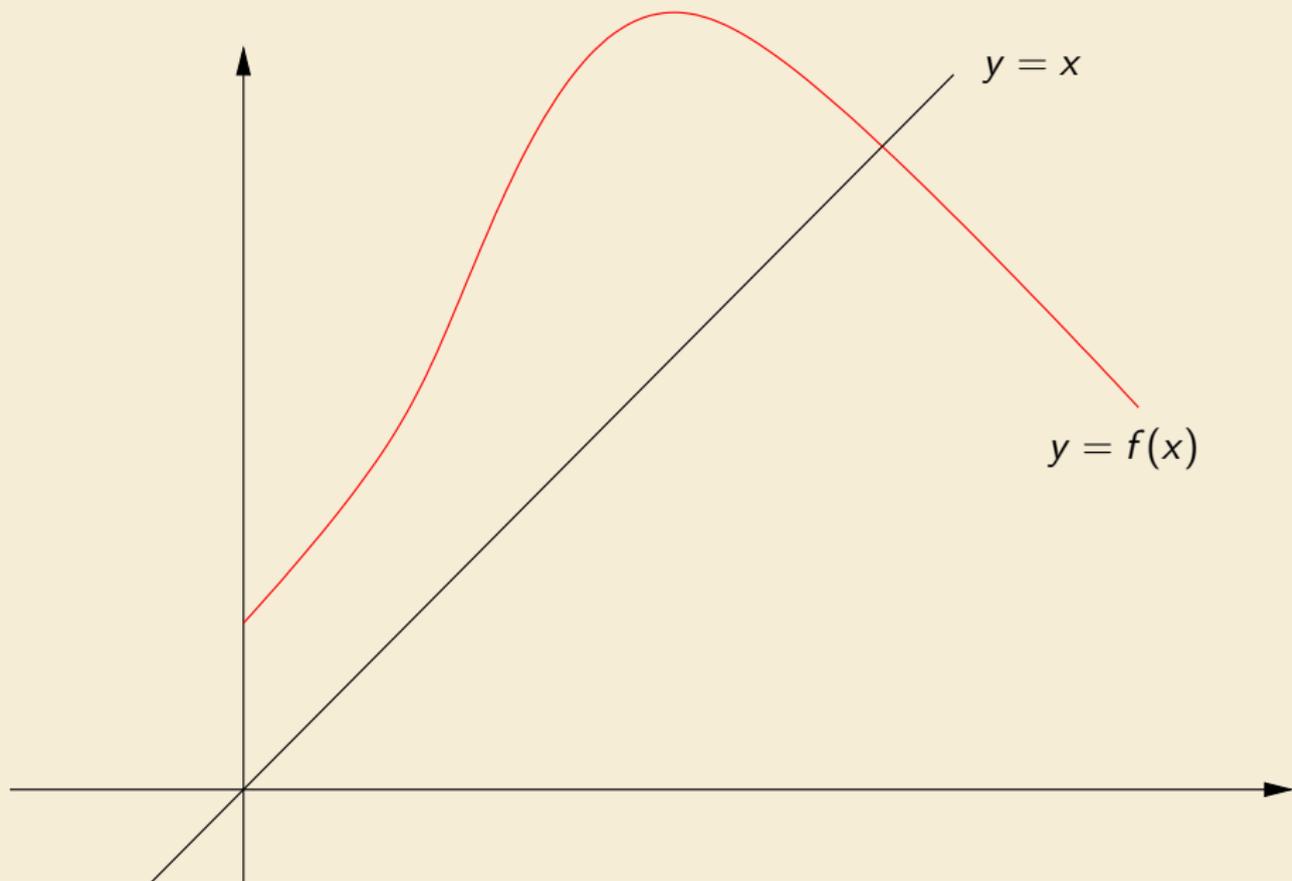
$$f(x) = x.$$

Le soluzioni di questa equazione, che vengono chiamate **punti fissi** di f , sono le posizioni di equilibrio, ovvero: se si parte da lì, non ci si muove. Ad esempio, la posizione $x = 0$ per la mappa logistica è di equilibrio. Naturalmente, se fossimo partiti da un valore iniziale diverso avremmo potuto avere ben altro esito. Vediamo nel prossimo lucido un esempio più complicato.

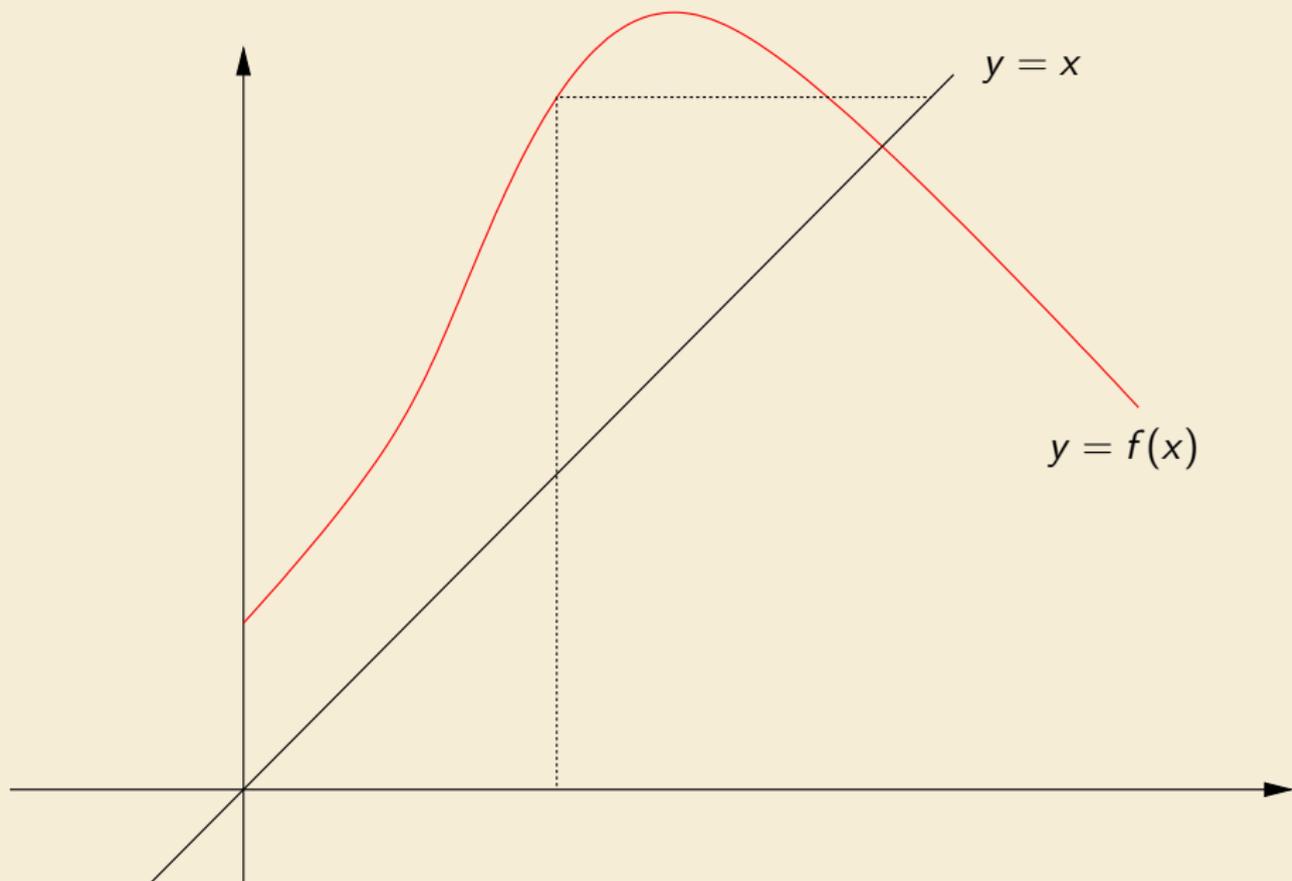
Metodo grafico



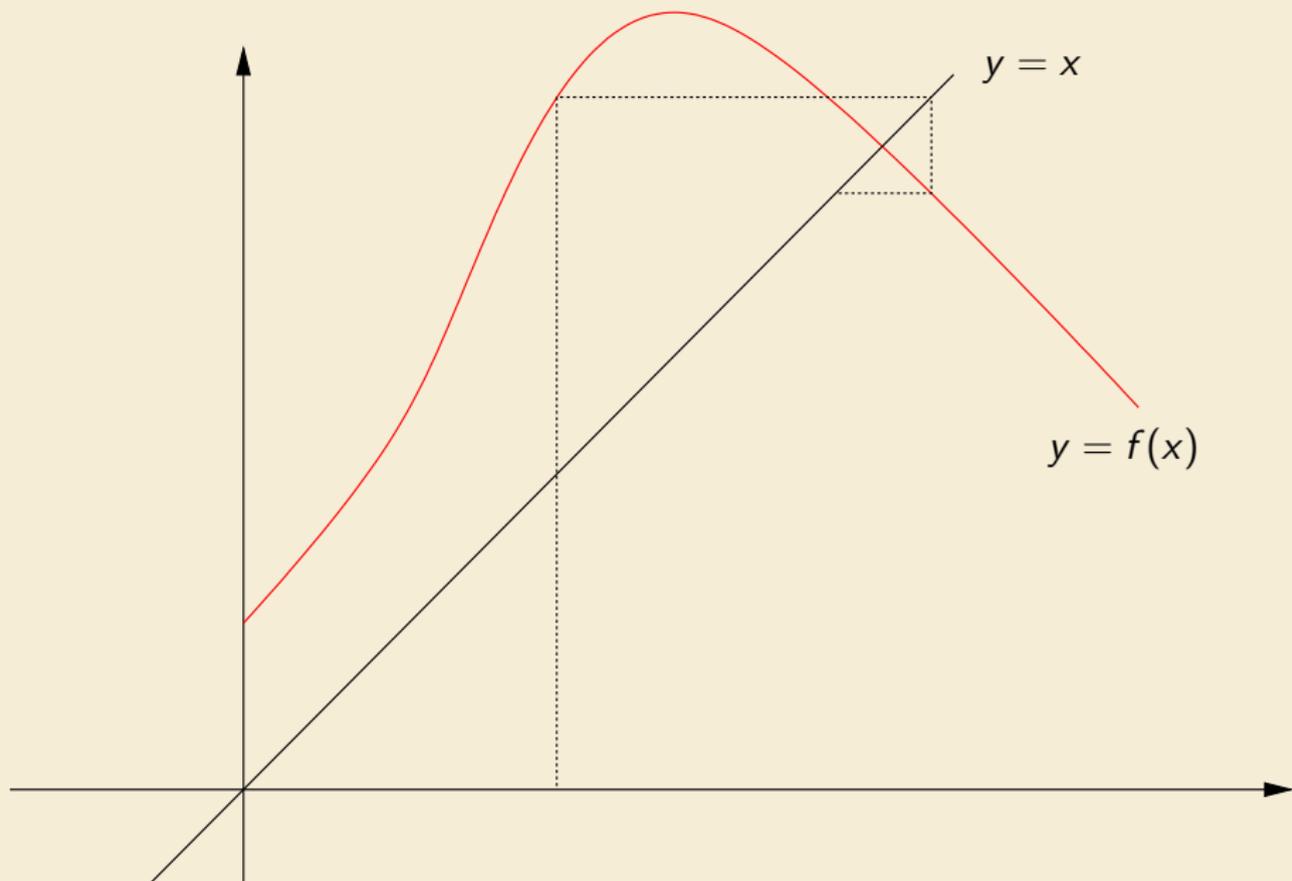
Metodo grafico



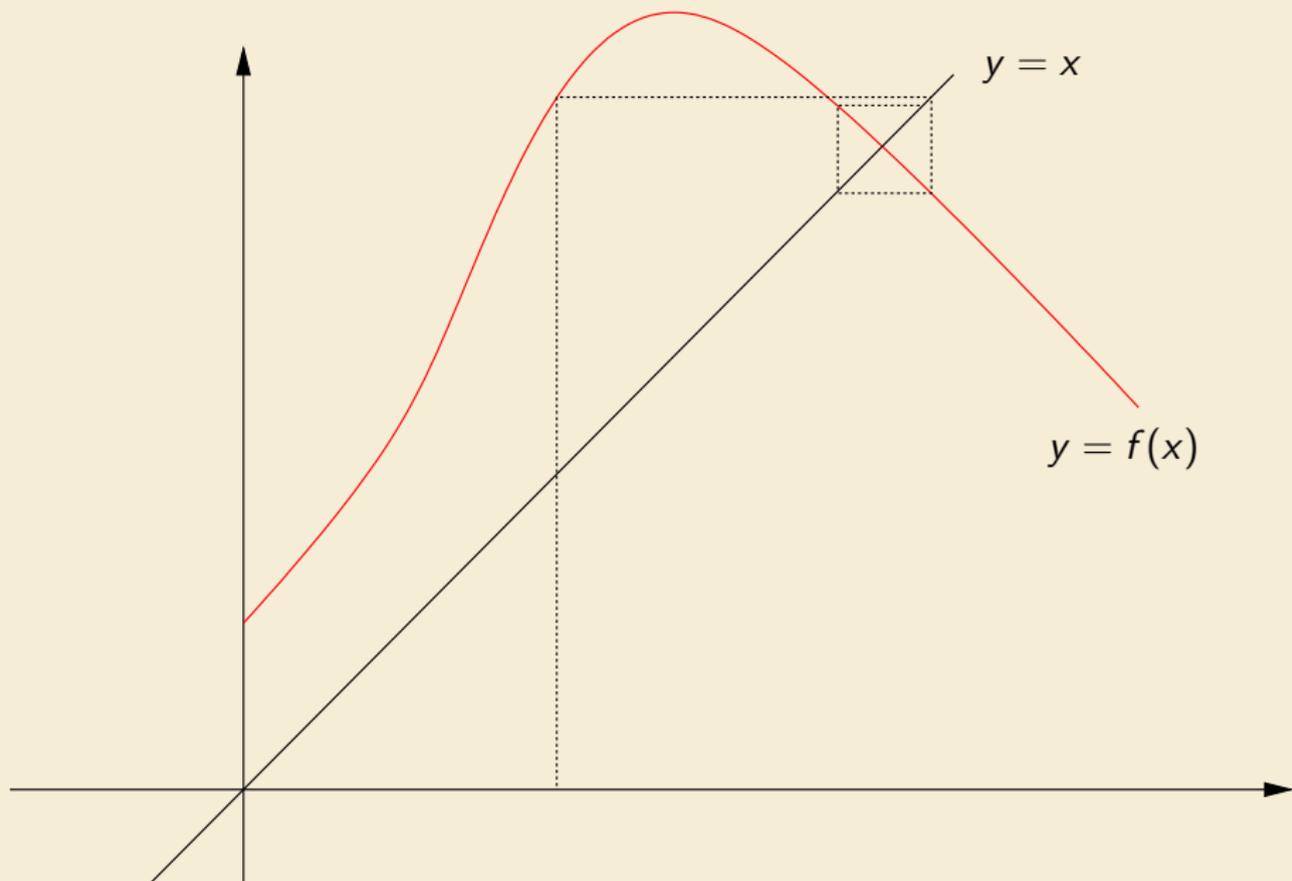
Metodo grafico



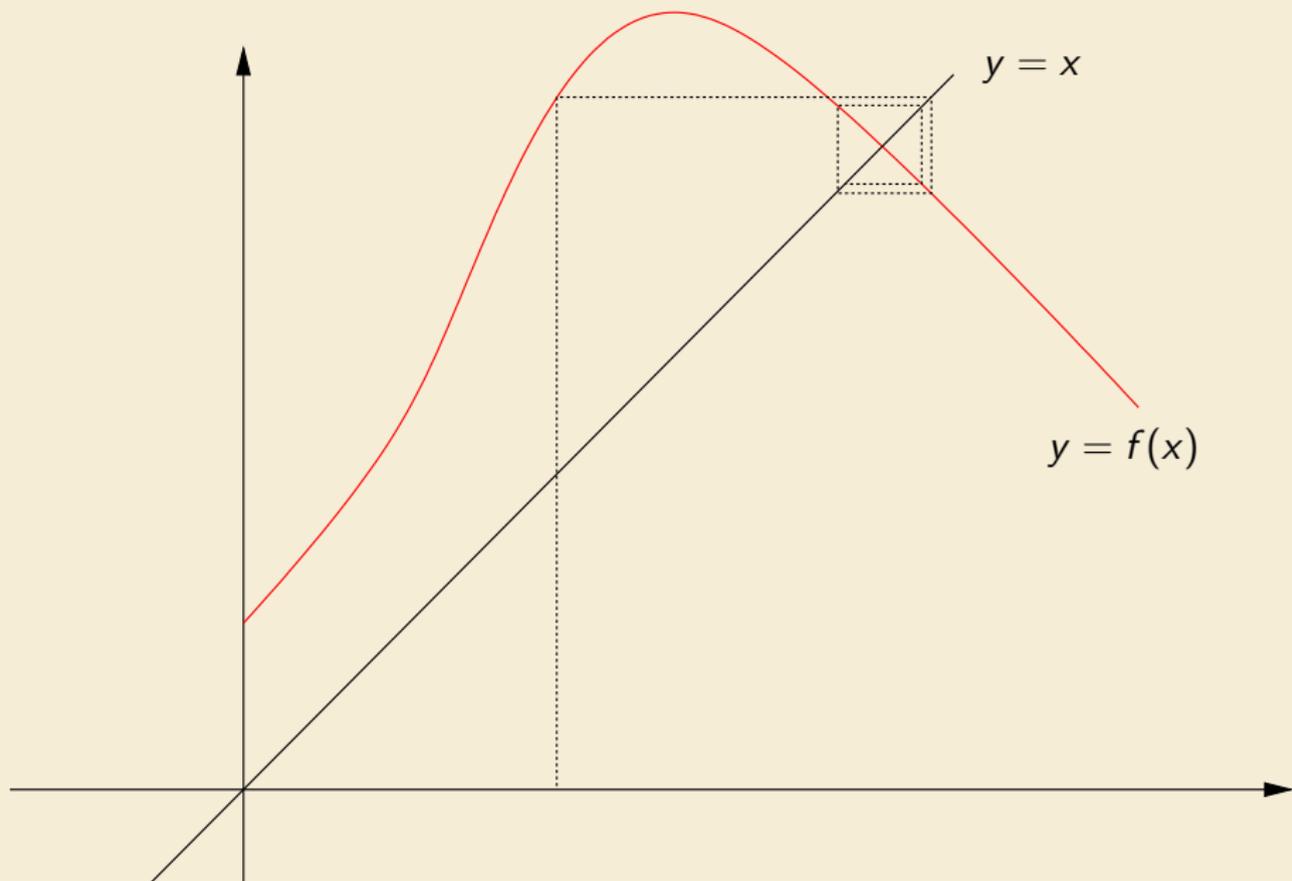
Metodo grafico



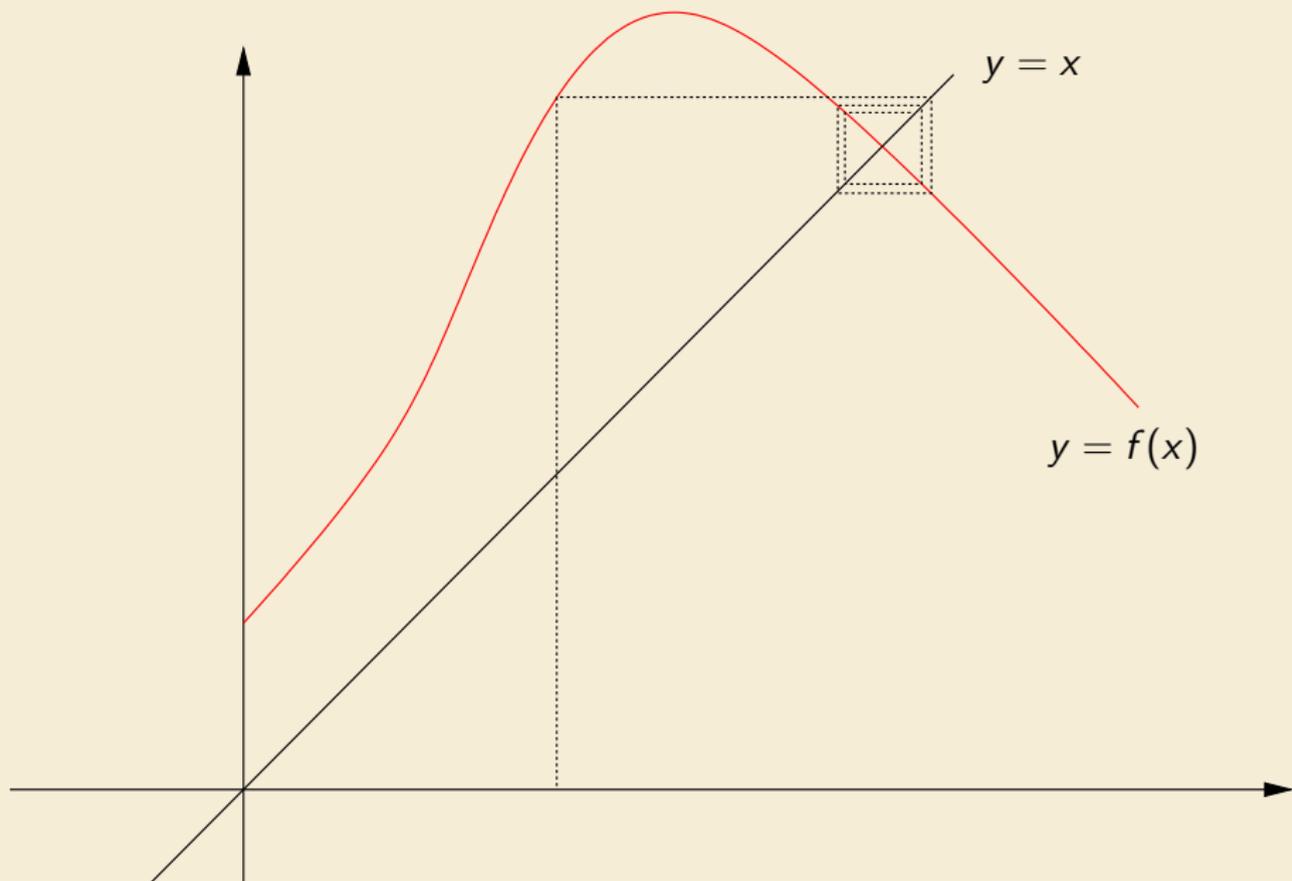
Metodo grafico



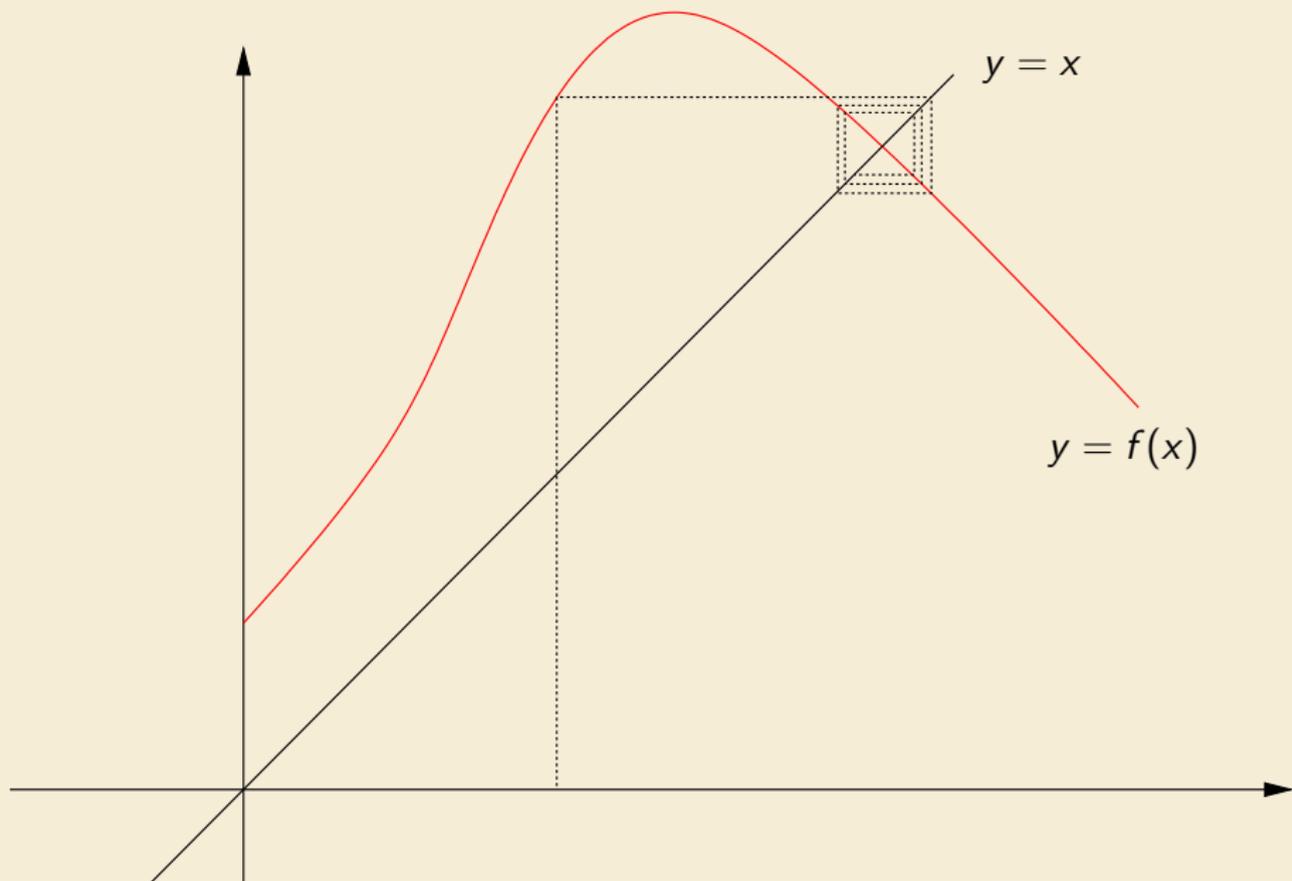
Metodo grafico



Metodo grafico



Metodo grafico



Commento al secondo grafico

In questo caso non è ben chiaro dove vada a finire la posizione iniziale. Si avvicina un po' a un punto fisso, ma potrebbe anche andare verso un "quadrato".

Commento al secondo grafico

In questo caso non è ben chiaro dove vada a finire la posizione iniziale. Si avvicina un po' a un punto fisso, ma potrebbe anche andare verso un "quadrato".

Ciò significa che il sistema potrebbe tendere ad oscillare tra due posizioni, senza assestarsi mai, un po' come la successione $(-1)^n$.

Commento al secondo grafico

In questo caso non è ben chiaro dove vada a finire la posizione iniziale. Si avvicina un po' a un punto fisso, ma potrebbe anche andare verso un "quadrato".

Ciò significa che il sistema potrebbe tendere ad oscillare tra due posizioni, senza assestarsi mai, un po' come la successione $(-1)^n$.

Quando succede questo, si dice che il sistema assume una periodicità di periodo 2.

Commento al secondo grafico

In questo caso non è ben chiaro dove vada a finire la posizione iniziale. Si avvicina un po' a un punto fisso, ma potrebbe anche andare verso un "quadrato".

Ciò significa che il sistema potrebbe tendere ad oscillare tra due posizioni, senza assestarsi mai, un po' come la successione $(-1)^n$.

Quando succede questo, si dice che il sistema assume una periodicità di periodo 2.

Naturalmente, potrebbero esserci situazioni in cui la periodicità diventa 4, 8, 16, come vedremo nella mappa logistica.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

Definizione di equilibrio stabile

Una posizione di equilibrio, cioè un punto fisso della funzione $y = f(x)$, è **stabile** se “attira” le posizioni del sistema che le sono vicine, nel senso che quando il sistema arriva abbastanza vicino a tale posizione, allora non può più allontanarsene.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

Definizione di equilibrio stabile

Una posizione di equilibrio, cioè un punto fisso della funzione $y = f(x)$, è **stabile** se “attira” le posizioni del sistema che le sono vicine, nel senso che quando il sistema arriva abbastanza vicino a tale posizione, allora non può più allontanarsene.

Le posizioni di equilibrio stabili sono molto interessanti, perché si sa che il sistema andrà prima o poi a cadere verso di loro, se ci arriva vicino.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

Definizione di equilibrio stabile

Una posizione di equilibrio, cioè un punto fisso della funzione $y = f(x)$, è **stabile** se “attira” le posizioni del sistema che le sono vicine, nel senso che quando il sistema arriva abbastanza vicino a tale posizione, allora non può più allontanarsene.

Le posizioni di equilibrio stabili sono molto interessanti, perché si sa che il sistema andrà prima o poi a cadere verso di loro, se ci arriva vicino.

C'è un modo semplice per capire se una posizione di equilibrio, cioè una posizione \bar{x} per cui $\bar{x} = f(\bar{x})$, è stabile:

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

Definizione di equilibrio stabile

Una posizione di equilibrio, cioè un punto fisso della funzione $y = f(x)$, è **stabile** se “attira” le posizioni del sistema che le sono vicine, nel senso che quando il sistema arriva abbastanza vicino a tale posizione, allora non può più allontanarsene.

Le posizioni di equilibrio stabili sono molto interessanti, perché si sa che il sistema andrà prima o poi a cadere verso di loro, se ci arriva vicino.

C'è un modo semplice per capire se una posizione di equilibrio, cioè una posizione \bar{x} per cui $\bar{x} = f(\bar{x})$, è stabile: deve valere che

$$-1 < f'(\bar{x}) < 1$$

cioè la derivata deve essere “più piccola” di quella della bisettrice.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

Definizione di equilibrio stabile

Una posizione di equilibrio, cioè un punto fisso della funzione $y = f(x)$, è **stabile** se “attira” le posizioni del sistema che le sono vicine, nel senso che quando il sistema arriva abbastanza vicino a tale posizione, allora non può più allontanarsene.

Le posizioni di equilibrio stabili sono molto interessanti, perché si sa che il sistema andrà prima o poi a cadere verso di loro, se ci arriva vicino.

C'è un modo semplice per capire se una posizione di equilibrio, cioè una posizione \bar{x} per cui $\bar{x} = f(\bar{x})$, è stabile: deve valere che

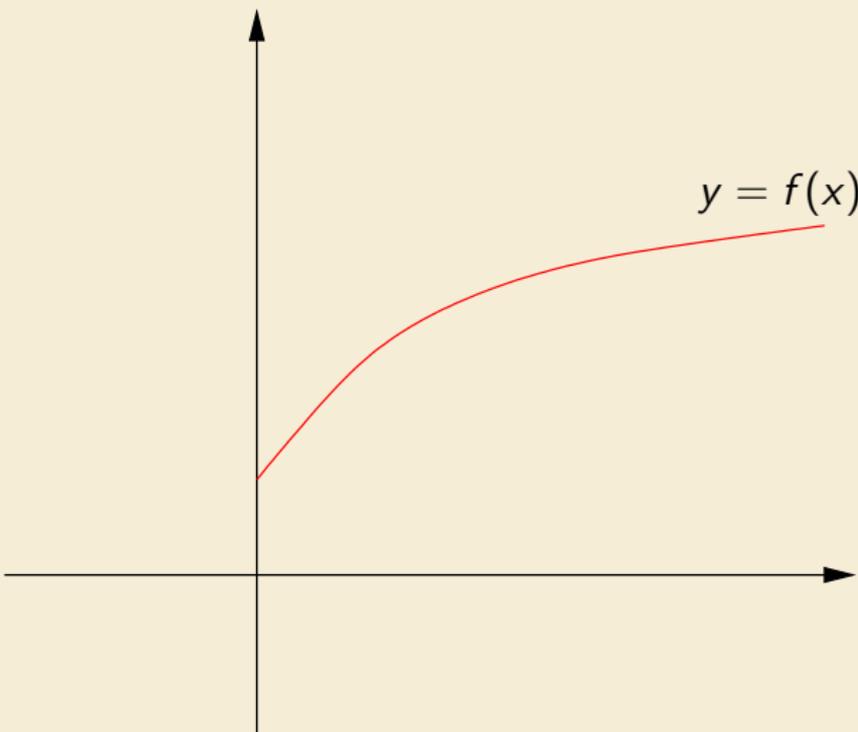
$$-1 < f'(\bar{x}) < 1$$

cioè la derivata deve essere “più piccola” di quella della bisettrice.

Se invece $|f'(\bar{x})| > 1$, allora la posizione è **instabile** e il sistema, anche se si trova vicino alla posizione, se ne allontana.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

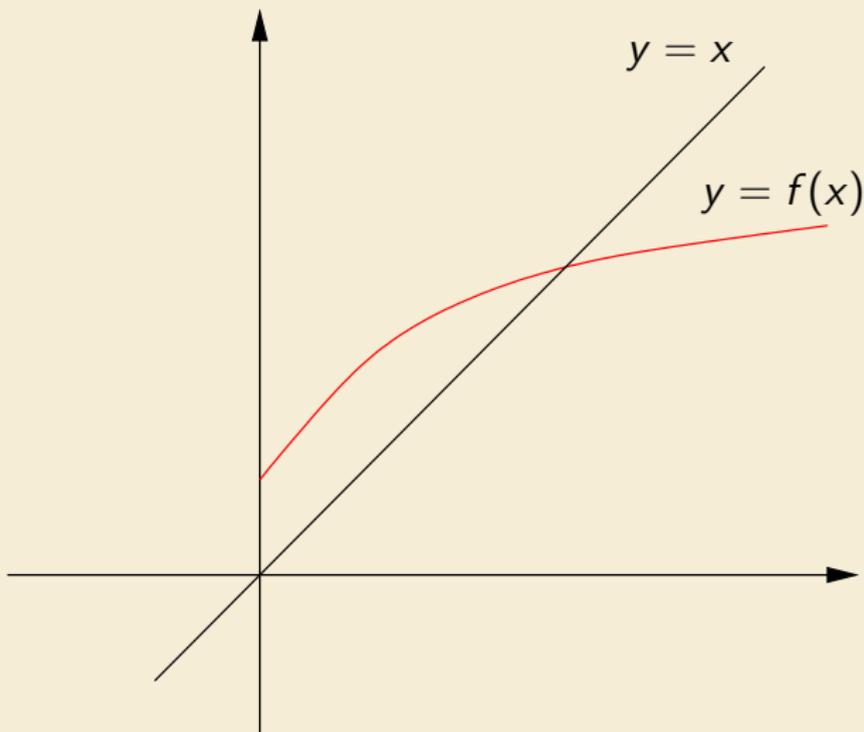
Cerchiamo di capire il perché con un disegno.



Nel caso in cui la derivata sia più piccola di 1, si vede che il punto fisso attira tutte le posizioni.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

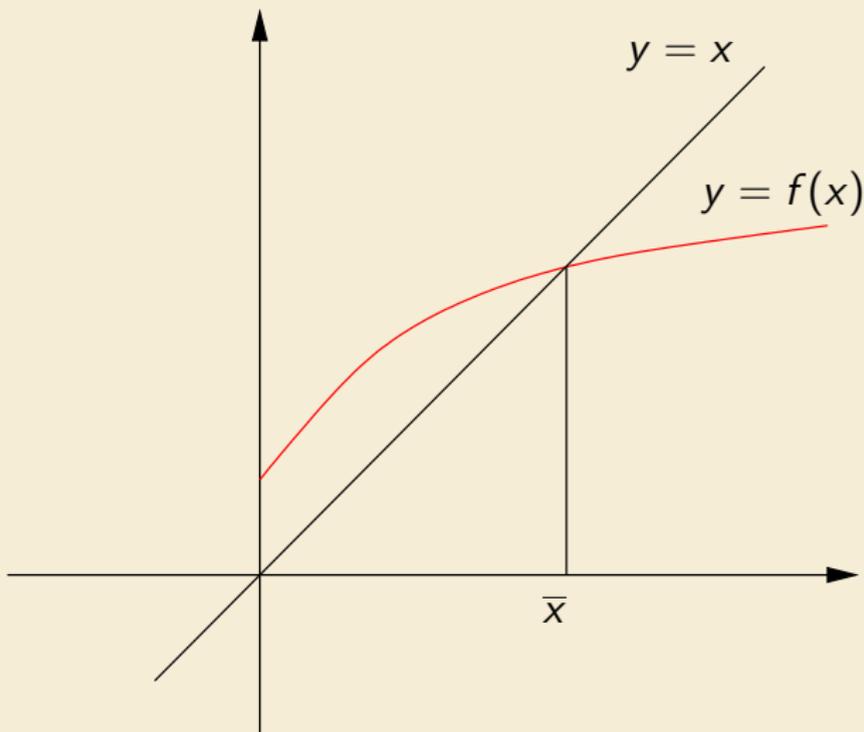
Cerchiamo di capire il perché con un disegno.



Nel caso in cui la derivata sia più piccola di 1, si vede che il punto fisso attira tutte le posizioni.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

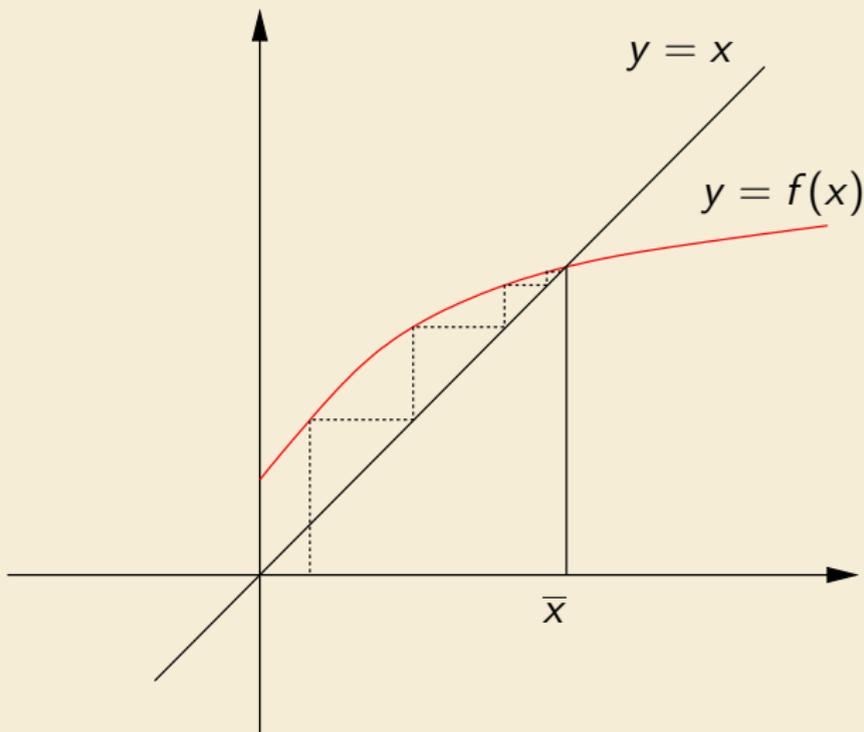
Cerchiamo di capire il perché con un disegno.



Nel caso in cui la derivata sia più piccola di 1, si vede che il punto fisso attira tutte le posizioni.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

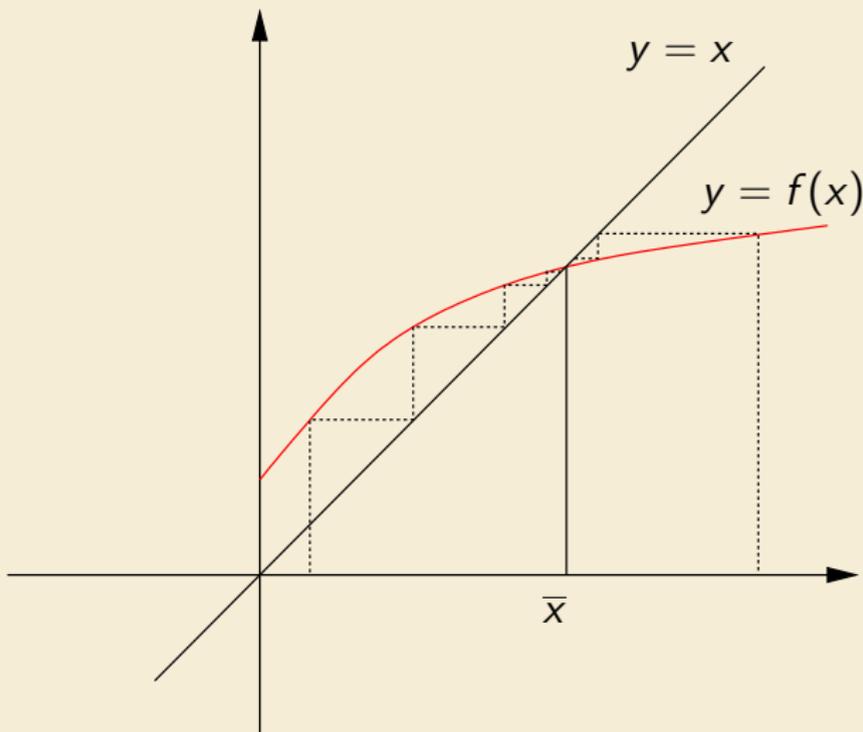
Cerchiamo di capire il perché con un disegno.



Nel caso in cui la derivata sia più piccola di 1, si vede che il punto fisso attira tutte le posizioni.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

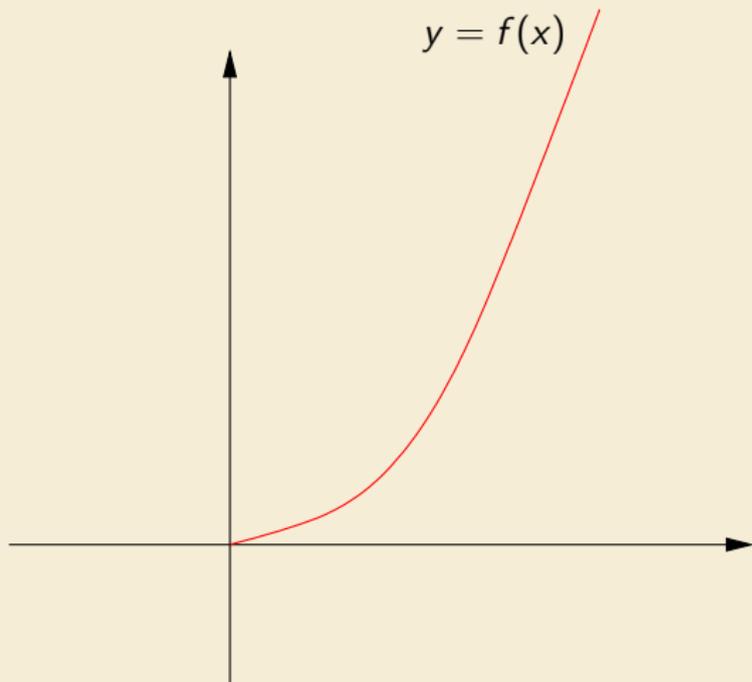
Cerchiamo di capire il perché con un disegno.



Nel caso in cui la derivata sia più piccola di 1, si vede che il punto fisso attira tutte le posizioni.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

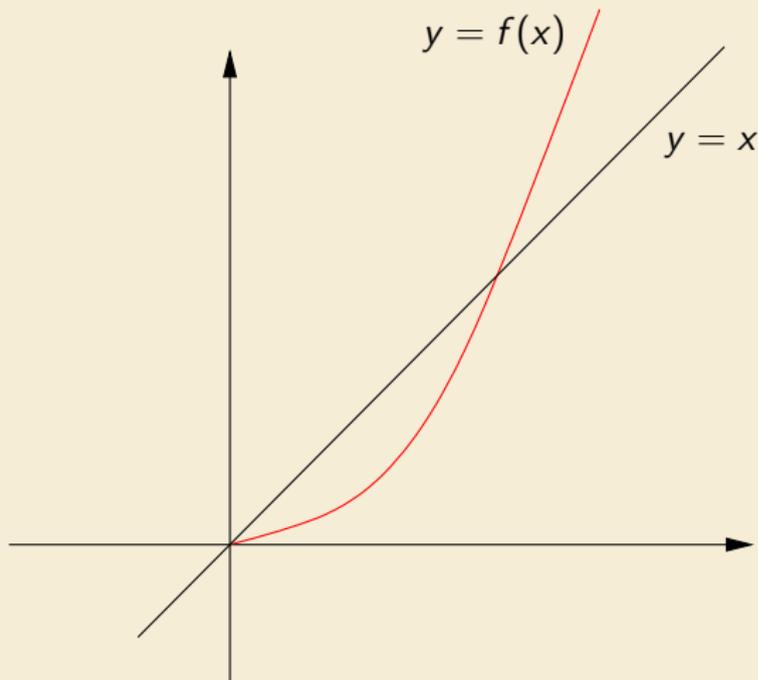
Cerchiamo di capire il perché con un disegno.



Nel caso in cui la derivata sia più grande di 1, si vede che anche partendo vicino al punto fisso si va o verso un altro punto fisso o addirittura all'infinito.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

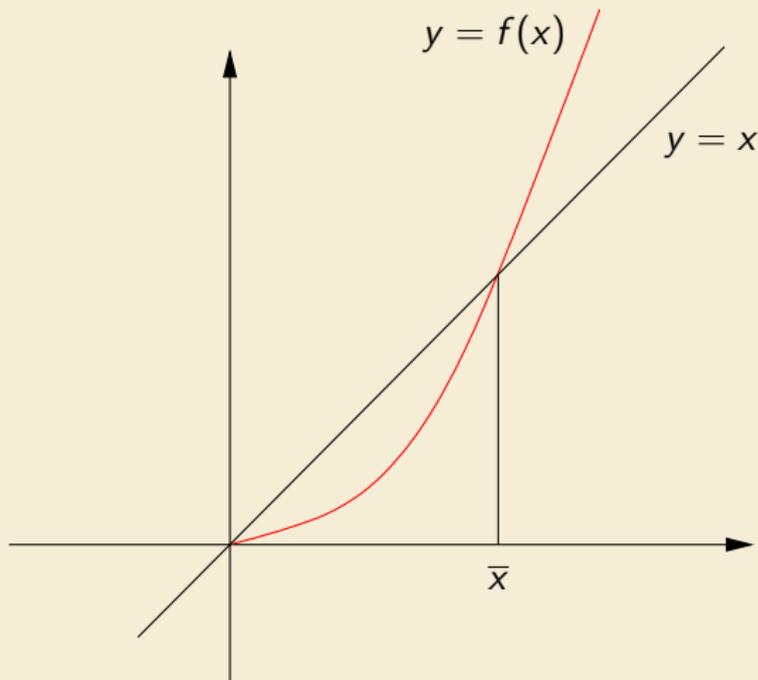
Cerchiamo di capire il perché con un disegno.



Nel caso in cui la derivata sia più grande di 1, si vede che anche partendo vicino al punto fisso si va o verso un altro punto fisso o addirittura all'infinito.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

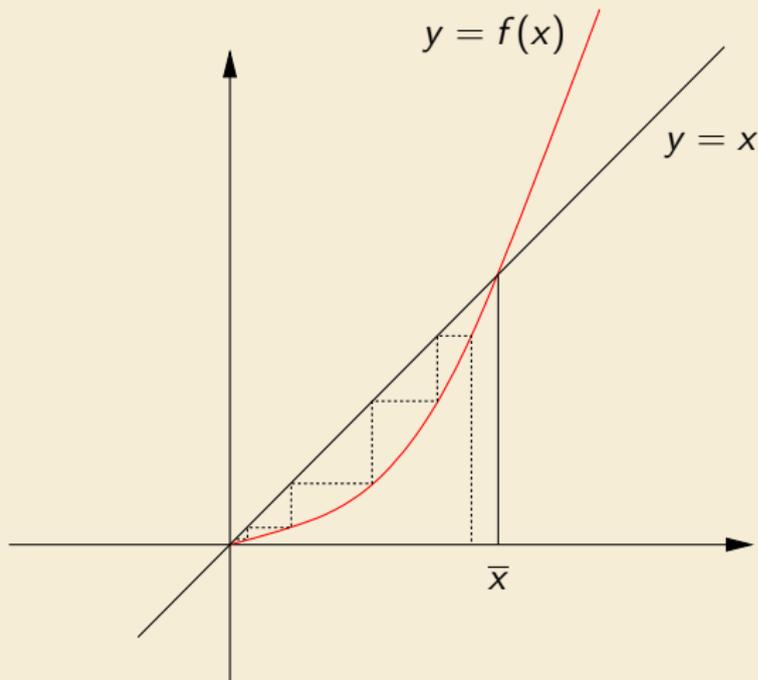
Cerchiamo di capire il perché con un disegno.



Nel caso in cui la derivata sia più grande di 1, si vede che anche partendo vicino al punto fisso si va o verso un altro punto fisso o addirittura all'infinito.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

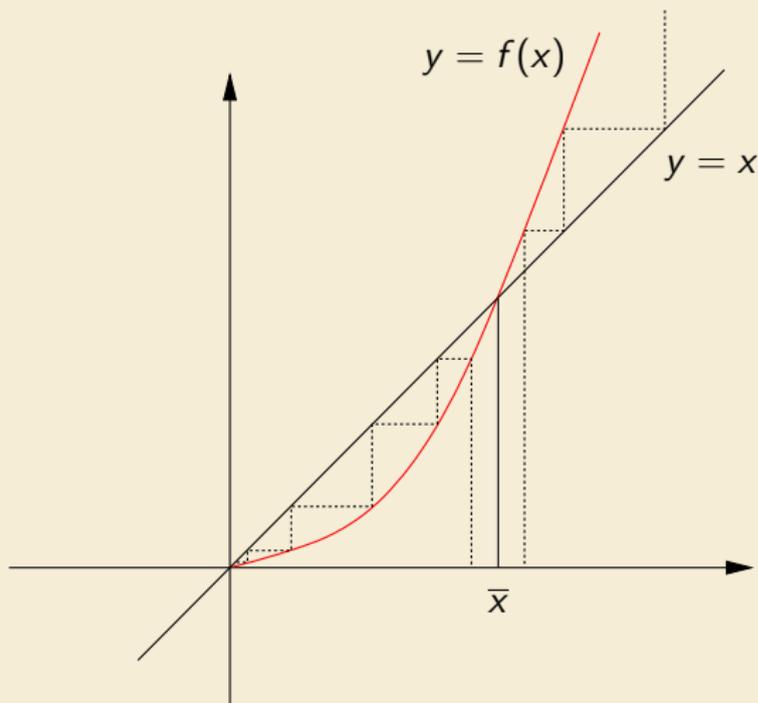
Cerchiamo di capire il perché con un disegno.



Nel caso in cui la derivata sia più grande di 1, si vede che anche partendo vicino al punto fisso si va o verso un altro punto fisso o addirittura all'infinito.

Intermezzo: stabilità dei punti di equilibrio

Cerchiamo di capire il perché con un disegno.



Nel caso in cui la derivata sia più grande di 1, si vede che anche partendo vicino al punto fisso si va o verso un altro punto fisso o addirittura all'infinito.

La mappa logistica

Veniamo ora alla mappa logistica:

$$f(x) = ax(1 - x).$$

La mappa logistica

Veniamo ora alla mappa logistica:

$$f(x) = ax(1 - x).$$

Per il significato che abbiamo dato a questo sistema dinamico (il coefficiente a rappresenta una capacità riproduttiva, x la frazione di individui su un massimo di 1), ha senso studiarla nel caso $a > 1$ e $0 \leq x \leq 1$.

La mappa logistica

Veniamo ora alla mappa logistica:

$$f(x) = ax(1 - x).$$

Per il significato che abbiamo dato a questo sistema dinamico (il coefficiente a rappresenta una capacità riproduttiva, x la frazione di individui su un massimo di 1), ha senso studiarla nel caso $a > 1$ e $0 \leq x \leq 1$.

Cerchiamo i punti di equilibrio: bisogna risolvere l'equazione di secondo grado

$$x = ax(1 - x) \quad \Rightarrow \quad x(ax - a + 1) = 0$$

da cui subito $x = 0$ e $x = 1 - \frac{1}{a}$, che sono entrambe accettabili.

Stabilità

Vediamo la stabilità dei punti fissi: intanto si ha

$$f'(x) = a - 2ax = a(1 - 2x)$$

e quindi

$$f'(0) = a, \quad f'\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 2 - a.$$

Ricordando che $a > 1$, troviamo che la posizione nulla è sempre instabile, mentre la posizione $1 - \frac{1}{a}$ è stabile per $a < 3$, e poi diventa instabile.

Stabilità

Vediamo la stabilità dei punti fissi: intanto si ha

$$f'(x) = a - 2ax = a(1 - 2x)$$

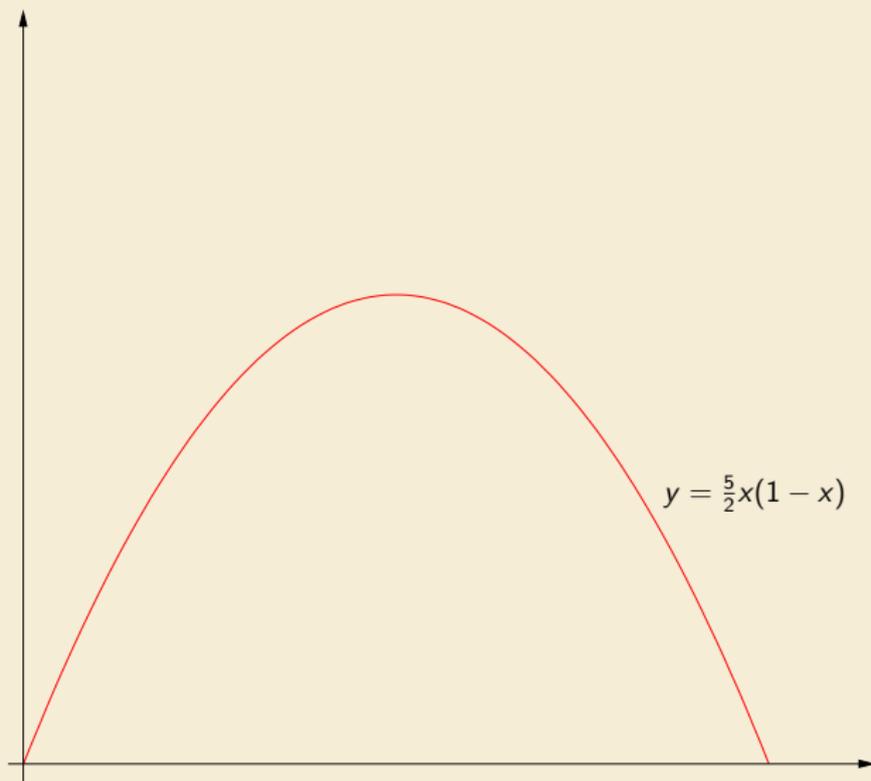
e quindi

$$f'(0) = a, \quad f'\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 2 - a.$$

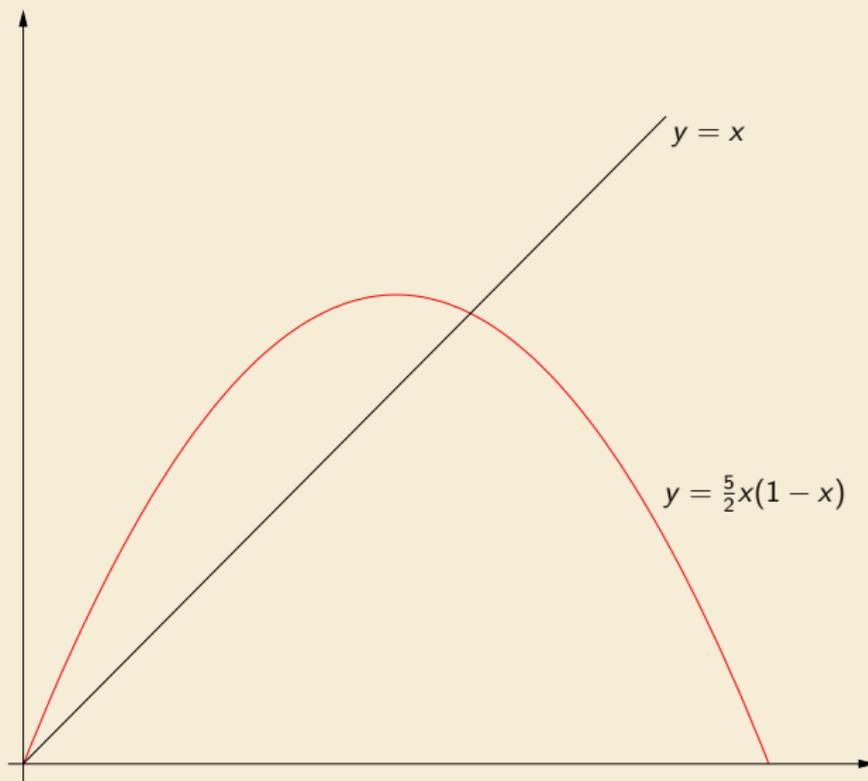
Ricordando che $a > 1$, troviamo che la posizione nulla è sempre instabile, mentre la posizione $1 - \frac{1}{a}$ è stabile per $a < 3$, e poi diventa instabile.

Il significato biologico è il seguente: se la capacità riproduttiva della specie non è troppo alta, il numero di individui tende verso un valore prefissato, e tale valore è $1 - \frac{1}{a}$.

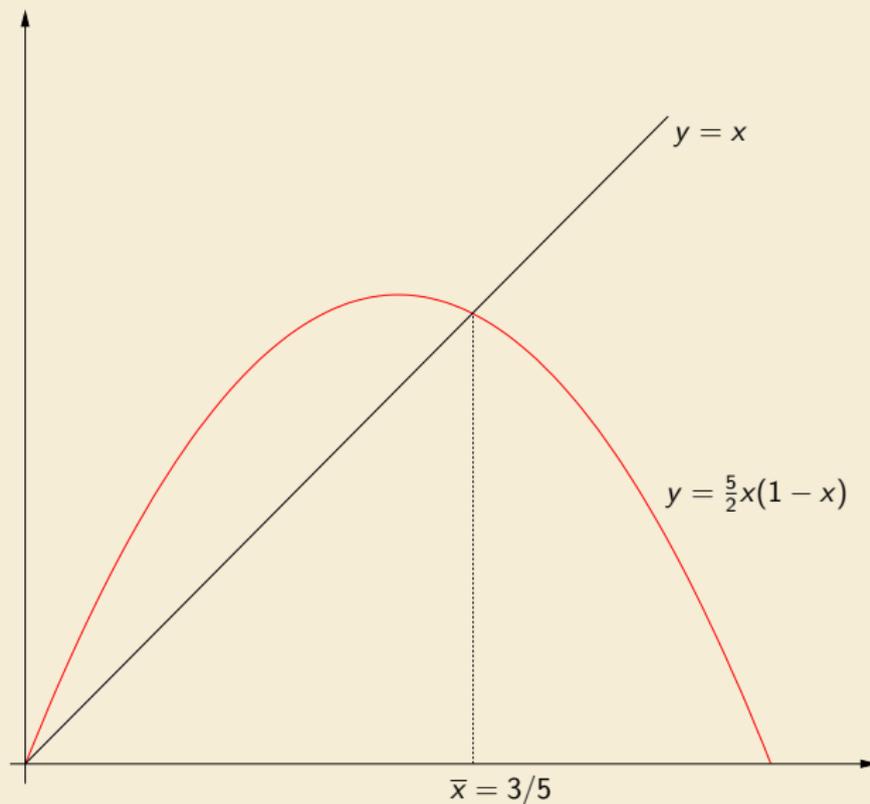
Disegno nel caso $a < 3$ (qui $a = 5/2$)



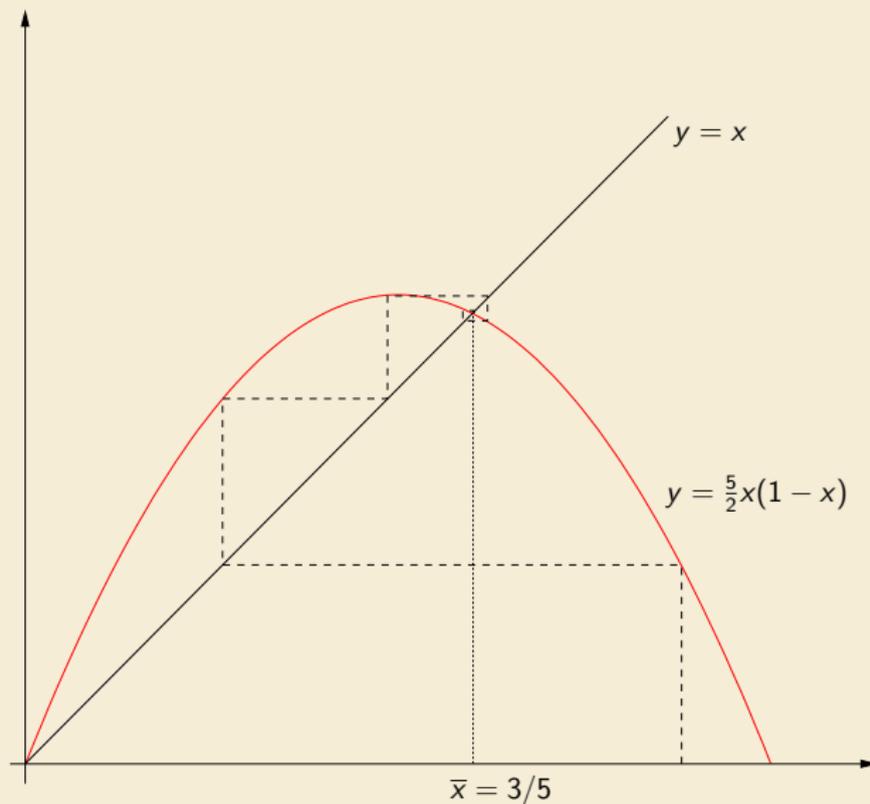
Disegno nel caso $a < 3$ (qui $a = 5/2$)



Disegno nel caso $a < 3$ (qui $a = 5/2$)



Disegno nel caso $a < 3$ (qui $a = 5/2$)



Il caso $a > 3$

Ma cosa succede nel caso $a > 3$? Il sistema non ha altri punti di equilibrio verso cui convergere!

Il caso $a > 3$

Ma cosa succede nel caso $a > 3$? Il sistema non ha altri punti di equilibrio verso cui convergere!

Qui le cose si fanno più complicate: appaiono dei cicli di ordine 2 (quelli che nel disegno sembrano dei “quadrati”), che restano stabili per

$$3 < a < 1 + \sqrt{6} \quad (\simeq 3,45).$$

Il caso $a > 3$

Ma cosa succede nel caso $a > 3$? Il sistema non ha altri punti di equilibrio verso cui convergere!

Qui le cose si fanno più complicate: appaiono dei cicli di ordine 2 (quelli che nel disegno sembrano dei “quadrati”), che restano stabili per

$$3 < a < 1 + \sqrt{6} \quad (\simeq 3,45).$$

Per capirlo, basta osservare che i cicli di ordine due sono punti fissi della mappa $f^2(x) = f(f(x))$. Ma i conti diventano complicati, e non li vedremo.

Il caso $a > 3$

Se ora si guarda il valore della derivata di f^2 nei nuovi punti fissi (ma forse è meglio lasciarlo fare a un computer. . .) si trova che questi nuovi punti, che rappresentano i cicli di ordine 2, sono stabili fino al valore $a = 1 + \sqrt{6}$ che abbiamo citato prima.

Il caso $a > 3$

Se ora si guarda il valore della derivata di f^2 nei nuovi punti fissi (ma forse è meglio lasciarlo fare a un computer. . .) si trova che questi nuovi punti, che rappresentano i cicli di ordine 2, sono stabili fino al valore $a = 1 + \sqrt{6}$ che abbiamo citato prima.

Dal punto di vista biologico: per un intervallo di valori ben preciso della capacità riproduttiva, il numero degli individui tenderà a oscillare periodicamente tra due valori ben precisi.

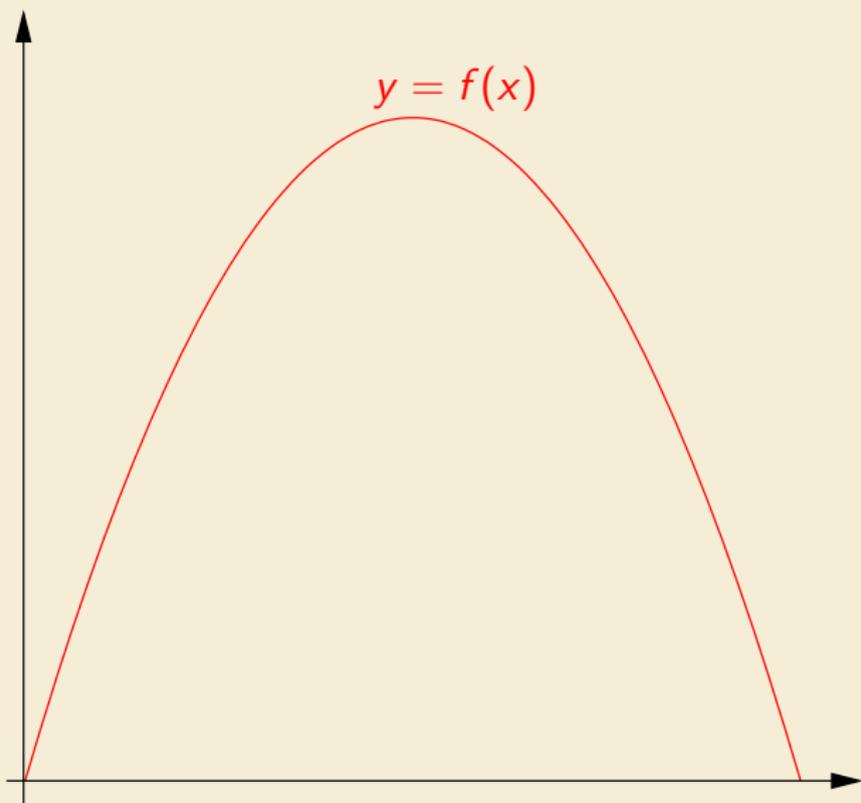
Il caso $a > 3$

Se ora si guarda il valore della derivata di f^2 nei nuovi punti fissi (ma forse è meglio lasciarlo fare a un computer. . .) si trova che questi nuovi punti, che rappresentano i cicli di ordine 2, sono stabili fino al valore $a = 1 + \sqrt{6}$ che abbiamo citato prima.

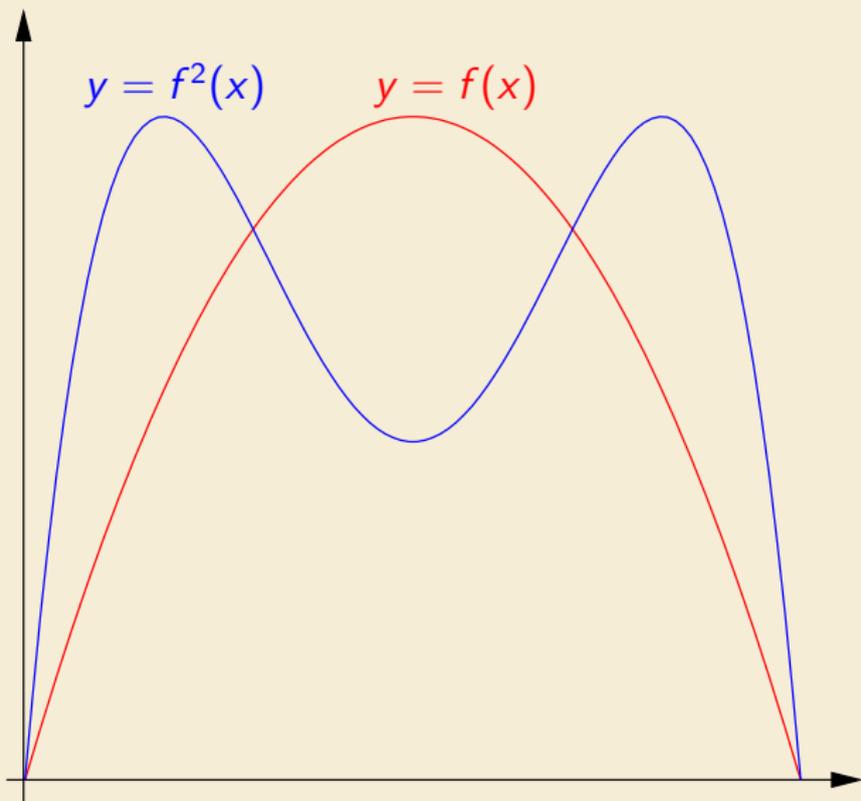
Dal punto di vista biologico: per un intervallo di valori ben preciso della capacità riproduttiva, il numero degli individui tenderà a oscillare periodicamente tra due valori ben precisi.

Nel disegno che vedremo ora, dove abbiamo scelto $a = 3,4$, la curva **rossa** è la mappa logistica, la curva **blu** è la composizione f^2 e il quadrato rappresenta il ciclo di ordine 2 stabile.

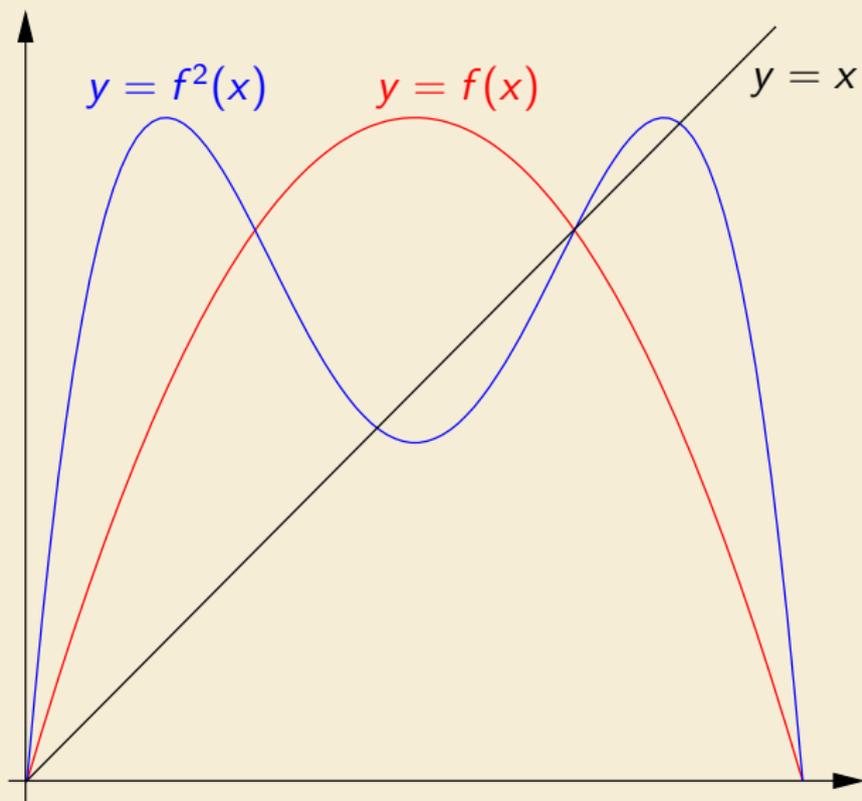
Disegno nel caso $a > 3$ (qui $a = 3,4$)



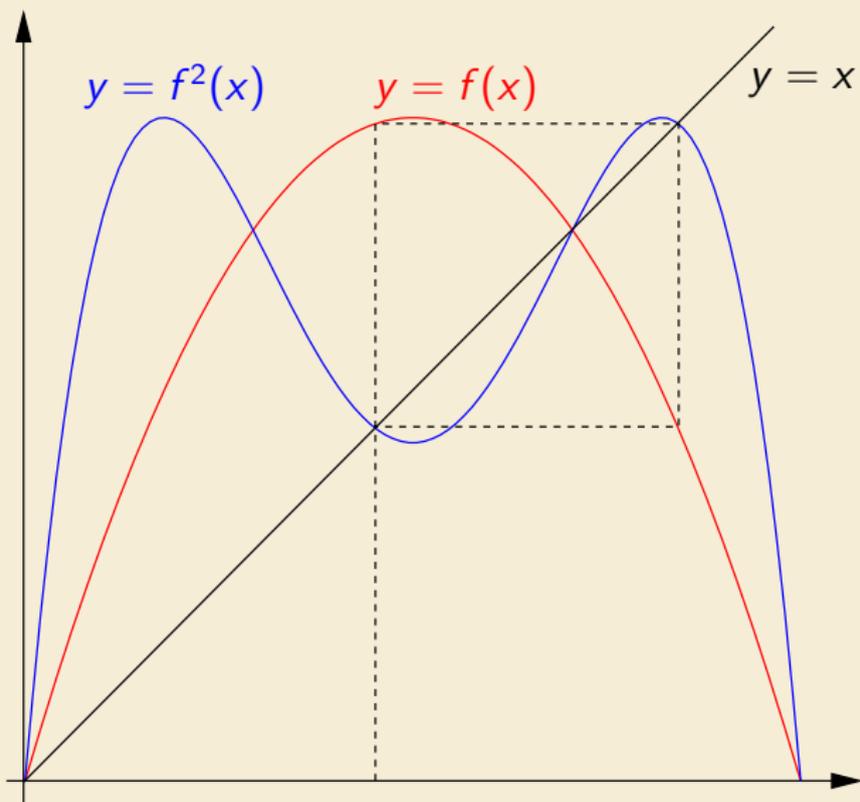
Disegno nel caso $a > 3$ (qui $a = 3, 4$)



Disegno nel caso $a > 3$ (qui $a = 3,4$)



Disegno nel caso $a > 3$ (qui $a = 3,4$)



Il caso $a > 1 + \sqrt{6}$

E per valori di a ancora più grandi, cosa succede? In questo caso si presenteranno progressivamente cicli di ordine 4, 8, 16, \dots , corrispondenti ai punti fissi di f^4 , f^8 , f^{16} , \dots

Il caso $a > 1 + \sqrt{6}$

E per valori di a ancora più grandi, cosa succede? In questo caso si presenteranno progressivamente cicli di ordine 4, 8, 16, \dots , corrispondenti ai punti fissi di f^4 , f^8 , f^{16} , \dots .

Questo fenomeno si chiama **raddoppio del periodo**: ogni volta che un ciclo periodico diventa instabile, nasce un ciclo periodico stabile di periodo doppio.

Il caso $a > 1 + \sqrt{6}$

E per valori di a ancora più grandi, cosa succede? In questo caso si presenteranno progressivamente cicli di ordine 4, 8, 16, ..., corrispondenti ai punti fissi di f^4 , f^8 , f^{16} , ...

Questo fenomeno si chiama **raddoppio del periodo**: ogni volta che un ciclo periodico diventa instabile, nasce un ciclo periodico stabile di periodo doppio.

Questo significa che per alcuni valori del parametro a il numero degli individui tenderà a oscillare periodicamente fra quattro valori diversi, per valori di a più grandi oscillerà tra 8 valori diversi, e così via.

Il caso $a > 1 + \sqrt{6}$

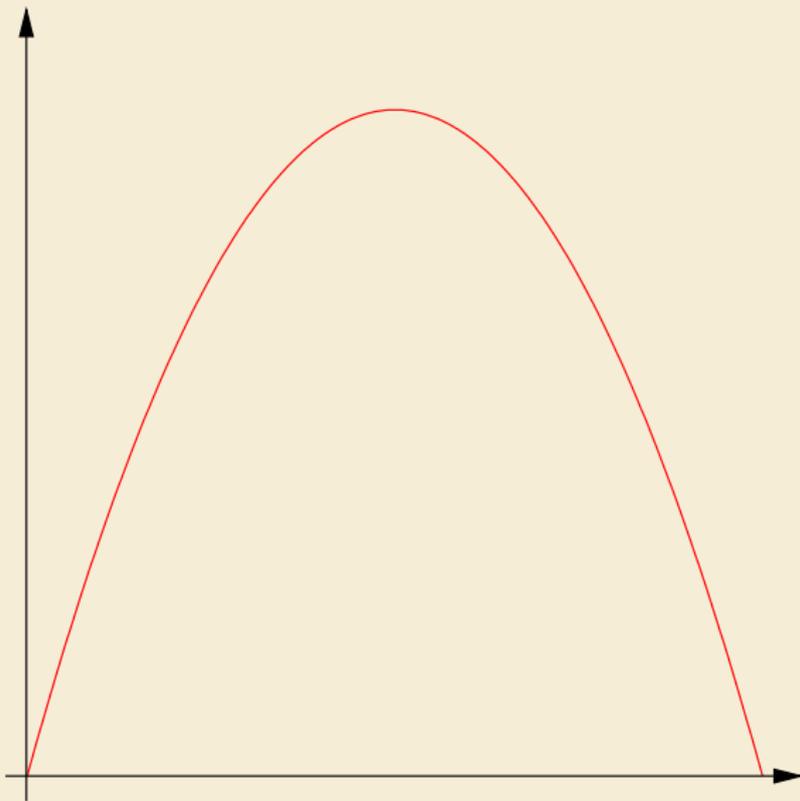
E per valori di a ancora più grandi, cosa succede? In questo caso si presenteranno progressivamente cicli di ordine 4, 8, 16, \dots , corrispondenti ai punti fissi di f^4 , f^8 , f^{16} , \dots .

Questo fenomeno si chiama **raddoppio del periodo**: ogni volta che un ciclo periodico diventa instabile, nasce un ciclo periodico stabile di periodo doppio.

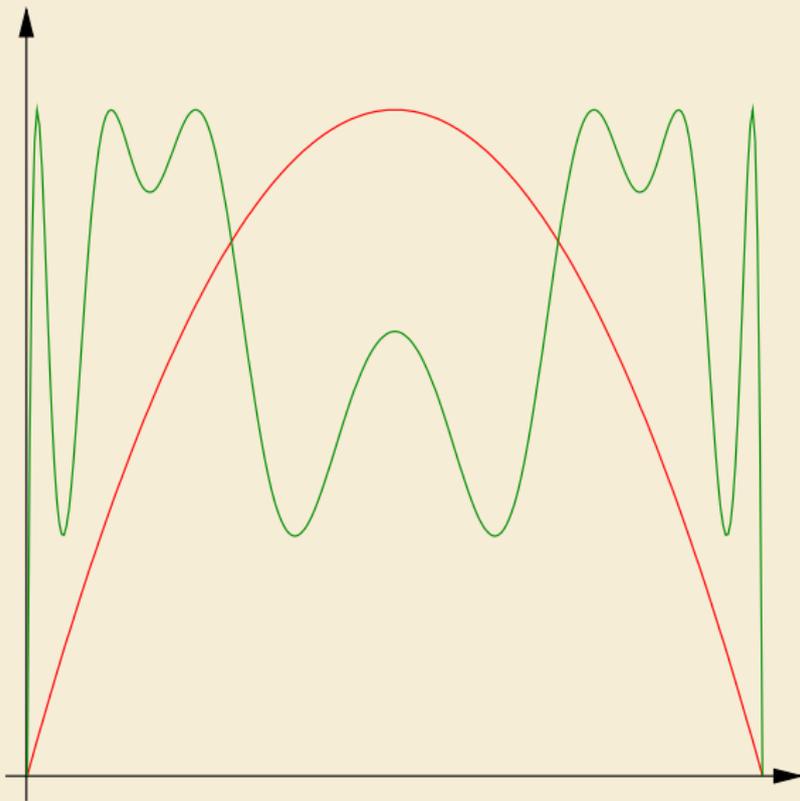
Questo significa che per alcuni valori del parametro a il numero degli individui tenderà a oscillare periodicamente fra quattro valori diversi, per valori di a più grandi oscillerà tra 8 valori diversi, e così via.

Per i più temerari, il prossimo grafico mostra il ciclo di ordine 4 che nasce come punto fisso di f^4 (di cui non scrivo neppure l'espressione). Nel caso disegnato, in cui $a = 3,4$, il ciclo di ordine 4 è stabile.

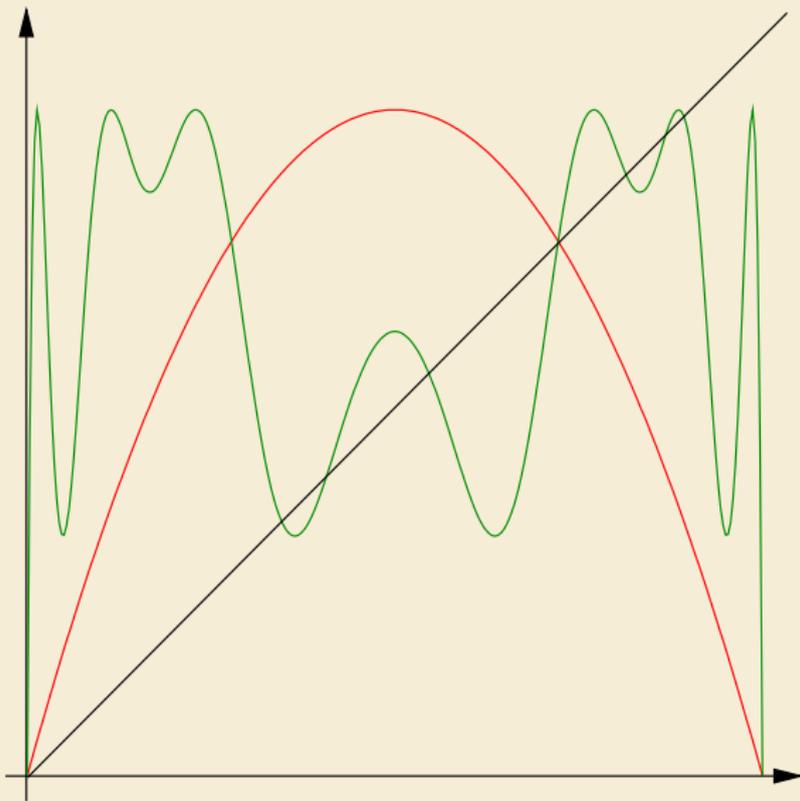
Disegno nel caso $a > 1 + \sqrt{6}$ (qui $a = 3,6$)



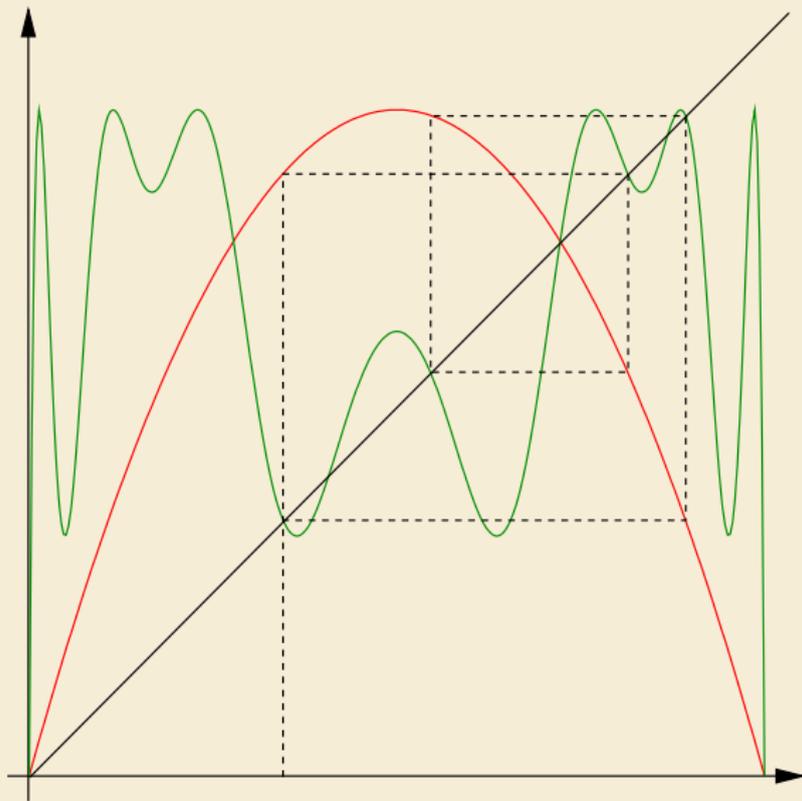
Disegno nel caso $a > 1 + \sqrt{6}$ (qui $a = 3,6$)



Disegno nel caso $a > 1 + \sqrt{6}$ (qui $a = 3,6$)



Disegno nel caso $a > 1 + \sqrt{6}$ (qui $a = 3,6$)



Il caos

La cosa più sorprendente della mappa logistica è che i valori del parametro a per cui il periodo si raddoppia non tendono all'infinito, ma si accumulano verso un misterioso numero che vale all'incirca

$$a \simeq 3,57.$$

Il caos

La cosa più sorprendente della mappa logistica è che i valori del parametro a per cui il periodo si raddoppia non tendono all'infinito, ma si accumulano verso un misterioso numero che vale all'incirca

$$a \simeq 3,57.$$

Per valori di a più grandi di 3,57 il comportamento della mappa logistica diventa

caos!

Il caos

La cosa più sorprendente della mappa logistica è che i valori del parametro a per cui il periodo si raddoppia non tendono all'infinito, ma si accumulano verso un misterioso numero che vale all'incirca

$$a \simeq 3,57.$$

Per valori di a più grandi di 3,57 il comportamento della mappa logistica diventa

caos!

Questo significa che nella successione dei valori non è più possibile prevedere un comportamento, neppure al limite. La successione oscilla tra tanti valori in modo apparentemente casuale (anche se la successione è descritta da una formula semplice e non ambigua).

Il caos

La cosa più sorprendente della mappa logistica è che i valori del parametro a per cui il periodo si raddoppia non tendono all'infinito, ma si accumulano verso un misterioso numero che vale all'incirca

$$a \simeq 3,57.$$

Per valori di a più grandi di 3,57 il comportamento della mappa logistica diventa

caos!

Questo significa che nella successione dei valori non è più possibile prevedere un comportamento, neppure al limite. La successione oscilla tra tanti valori in modo apparentemente casuale (anche se la successione è descritta da una formula semplice e non ambigua).

Si parla, in questo caso, di **caos deterministico**. Tale espressione, che mette insieme due parole contrastanti, vuole descrivere proprio la nascita di fenomeni di tipo casuale da modelli che sono perfettamente deterministici, ovvero descritti in modo rigoroso.

L'effetto farfalla

Soprattutto, avviene che a partire da due condizioni iniziali vicine si arriva, dopo pochi passi, in punti completamente diversi, in modo quasi imprevedibile. Questa si chiama **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**, ed è uno tra gli aspetti principali del caos deterministico.

L'effetto farfalla

Soprattutto, avviene che a partire da due condizioni iniziali vicine si arriva, dopo pochi passi, in punti completamente diversi, in modo quasi imprevedibile. Questa si chiama **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**, ed è uno tra gli aspetti principali del caos deterministico.

Tale fenomeno viene anche detto **effetto farfalla**, dal famoso titolo di una conferenza del 1972 di Edward Lorenz, uno tra i primi studiosi di questi aspetti:

L'effetto farfalla

Soprattutto, avviene che a partire da due condizioni iniziali vicine si arriva, dopo pochi passi, in punti completamente diversi, in modo quasi imprevedibile. Questa si chiama **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**, ed è uno tra gli aspetti principali del caos deterministico.

Tale fenomeno viene anche detto **effetto farfalla**, dal famoso titolo di una conferenza del 1972 di Edward Lorenz, uno tra i primi studiosi di questi aspetti:

“Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?”

ovvero

Può il battito d'ali di una farfalla in Brasile provocare un tornado in Texas?