

La funzione esponenziale e logaritmica

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Subito un esempio

Consideriamo una popolazione di batteri che vive in un ambiente ricco di risorse. Tale popolazione ha una notevole capacità riproduttiva, visto che ogni cellula riesce a sdoppiarsi ogni 10 minuti circa.

Subito un esempio

Consideriamo una popolazione di batteri che vive in un ambiente ricco di risorse. Tale popolazione ha una notevole capacità riproduttiva, visto che ogni cellula riesce a sdoppiarsi ogni 10 minuti circa.

Non stiamo facendo una lezione di Scienze, ma di Matematica! Ci chiediamo quanti sono i batteri dopo due ore, supponendo che all'inizio del nostro conteggio ce ne fossero 80.

Subito un esempio

Consideriamo una popolazione di batteri che vive in un ambiente ricco di risorse. Tale popolazione ha una notevole capacità riproduttiva, visto che ogni cellula riesce a sdoppiarsi ogni 10 minuti circa.

Non stiamo facendo una lezione di Scienze, ma di Matematica! Ci chiediamo quanti sono i batteri dopo due ore, supponendo che all'inizio del nostro conteggio ce ne fossero 80.

Il conto è abbastanza semplice: ogni 10 minuti il numero di batteri raddoppia, quindi avremo la tabella seguente:

$$10\text{min} \mid 2 \cdot 80$$

Subito un esempio

Consideriamo una popolazione di batteri che vive in un ambiente ricco di risorse. Tale popolazione ha una notevole capacità riproduttiva, visto che ogni cellula riesce a sdoppiarsi ogni 10 minuti circa.

Non stiamo facendo una lezione di Scienze, ma di Matematica! Ci chiediamo quanti sono i batteri dopo due ore, supponendo che all'inizio del nostro conteggio ce ne fossero 80.

Il conto è abbastanza semplice: ogni 10 minuti il numero di batteri raddoppia, quindi avremo la tabella seguente:

10min	$2 \cdot 80$
20min	$4 \cdot 80$

Subito un esempio

Consideriamo una popolazione di batteri che vive in un ambiente ricco di risorse. Tale popolazione ha una notevole capacità riproduttiva, visto che ogni cellula riesce a sdoppiarsi ogni 10 minuti circa.

Non stiamo facendo una lezione di Scienze, ma di Matematica! Ci chiediamo quanti sono i batteri dopo due ore, supponendo che all'inizio del nostro conteggio ce ne fossero 80.

Il conto è abbastanza semplice: ogni 10 minuti il numero di batteri raddoppia, quindi avremo la tabella seguente:

10min	$2 \cdot 80$
20min	$4 \cdot 80$
30min	$8 \cdot 80$

Subito un esempio

Consideriamo una popolazione di batteri che vive in un ambiente ricco di risorse. Tale popolazione ha una notevole capacità riproduttiva, visto che ogni cellula riesce a sdoppiarsi ogni 10 minuti circa.

Non stiamo facendo una lezione di Scienze, ma di Matematica! Ci chiediamo quanti sono i batteri dopo due ore, supponendo che all'inizio del nostro conteggio ce ne fossero 80.

Il conto è abbastanza semplice: ogni 10 minuti il numero di batteri raddoppia, quindi avremo la tabella seguente:

10min	$2 \cdot 80$
20min	$4 \cdot 80$
30min	$8 \cdot 80$
40min	$16 \cdot 80$

Subito un esempio

Consideriamo una popolazione di batteri che vive in un ambiente ricco di risorse. Tale popolazione ha una notevole capacità riproduttiva, visto che ogni cellula riesce a sdoppiarsi ogni 10 minuti circa.

Non stiamo facendo una lezione di Scienze, ma di Matematica! Ci chiediamo quanti sono i batteri dopo due ore, supponendo che all'inizio del nostro conteggio ce ne fossero 80.

Il conto è abbastanza semplice: ogni 10 minuti il numero di batteri raddoppia, quindi avremo la tabella seguente:

10min	$2 \cdot 80$
20min	$4 \cdot 80$
30min	$8 \cdot 80$
40min	$16 \cdot 80$
50min	$32 \cdot 80$

Subito un esempio

Consideriamo una popolazione di batteri che vive in un ambiente ricco di risorse. Tale popolazione ha una notevole capacità riproduttiva, visto che ogni cellula riesce a sdoppiarsi ogni 10 minuti circa.

Non stiamo facendo una lezione di Scienze, ma di Matematica! Ci chiediamo quanti sono i batteri dopo due ore, supponendo che all'inizio del nostro conteggio ce ne fossero 80.

Il conto è abbastanza semplice: ogni 10 minuti il numero di batteri raddoppia, quindi avremo la tabella seguente:

10min	$2 \cdot 80$
20min	$4 \cdot 80$
30min	$8 \cdot 80$
40min	$16 \cdot 80$
50min	$32 \cdot 80$
60min	$64 \cdot 80$

Subito un esempio

Consideriamo una popolazione di batteri che vive in un ambiente ricco di risorse. Tale popolazione ha una notevole capacità riproduttiva, visto che ogni cellula riesce a sdoppiarsi ogni 10 minuti circa.

Non stiamo facendo una lezione di Scienze, ma di Matematica! Ci chiediamo quanti sono i batteri dopo due ore, supponendo che all'inizio del nostro conteggio ce ne fossero 80.

Il conto è abbastanza semplice: ogni 10 minuti il numero di batteri raddoppia, quindi avremo la tabella seguente:

10min	$2 \cdot 80$	70min	$128 \cdot 80$
20min	$4 \cdot 80$	80min	$256 \cdot 80$
30min	$8 \cdot 80$	90min	$512 \cdot 80$
40min	$16 \cdot 80$	100min	$1024 \cdot 80$
50min	$32 \cdot 80$	110min	$2048 \cdot 80$
60min	$64 \cdot 80$	120min	$4096 \cdot 80$

Subito un esempio

Consideriamo una popolazione di batteri che vive in un ambiente ricco di risorse. Tale popolazione ha una notevole capacità riproduttiva, visto che ogni cellula riesce a sdoppiarsi ogni 10 minuti circa.

Non stiamo facendo una lezione di Scienze, ma di Matematica! Ci chiediamo quanti sono i batteri dopo due ore, supponendo che all'inizio del nostro conteggio ce ne fossero 80.

Il conto è abbastanza semplice: ogni 10 minuti il numero di batteri raddoppia, quindi avremo la tabella seguente:

10min	$2 \cdot 80$	70min	$128 \cdot 80$
20min	$4 \cdot 80$	80min	$256 \cdot 80$
30min	$8 \cdot 80$	90min	$512 \cdot 80$
40min	$16 \cdot 80$	100min	$1024 \cdot 80$
50min	$32 \cdot 80$	110min	$2048 \cdot 80$
60min	$64 \cdot 80$	120min	$4096 \cdot 80$

Dopo due ore avremo la bellezza di $4096 \cdot 80 = 327680$ batteri!

Subito un esempio

Consideriamo una popolazione di batteri che vive in un ambiente ricco di risorse. Tale popolazione ha una notevole capacità riproduttiva, visto che ogni cellula riesce a sdoppiarsi ogni 10 minuti circa.

Non stiamo facendo una lezione di Scienze, ma di Matematica! Ci chiediamo quanti sono i batteri dopo due ore, supponendo che all'inizio del nostro conteggio ce ne fossero 80.

Il conto è abbastanza semplice: ogni 10 minuti il numero di batteri raddoppia, quindi avremo la tabella seguente:

10min	$2 \cdot 80$	70min	$128 \cdot 80$
20min	$4 \cdot 80$	80min	$256 \cdot 80$
30min	$8 \cdot 80$	90min	$512 \cdot 80$
40min	$16 \cdot 80$	100min	$1024 \cdot 80$
50min	$32 \cdot 80$	110min	$2048 \cdot 80$
60min	$64 \cdot 80$	120min	$4096 \cdot 80$

Dopo due ore avremo la bellezza di $4096 \cdot 80 = 327680$ batteri!

Ce ne saranno 327600 in più di quelli all'inizio. . .

Legge esponenziale

Anche nel linguaggio comune, si dice che i batteri hanno avuto una **crescita esponenziale**. In formule, si può dire che il numero di batteri è

$$N = 80 \cdot 2^k \quad \text{dopo } 10k \text{ minuti.}$$

Legge esponenziale

Anche nel linguaggio comune, si dice che i batteri hanno avuto una **crescita esponenziale**. In formule, si può dire che il numero di batteri è

$$N = 80 \cdot 2^k \quad \text{dopo } 10k \text{ minuti.}$$

Questo è un tipico esempio di *legge esponenziale della crescita*, nota anche come **modello malthusiano**, dal nome di Thomas Malthus (1766-1834), che è uno dei padri della *demografia*.

Legge esponenziale

Anche nel linguaggio comune, si dice che i batteri hanno avuto una **crescita esponenziale**. In formule, si può dire che il numero di batteri è

$$N = 80 \cdot 2^k \quad \text{dopo } 10k \text{ minuti.}$$

Questo è un tipico esempio di *legge esponenziale della crescita*, nota anche come **modello malthusiano**, dal nome di Thomas Malthus (1766-1834), che è uno dei padri della *demografia*.

Ora però proviamo a chiederci: qual è il numero di batteri dopo 55 minuti?

Legge esponenziale

Anche nel linguaggio comune, si dice che i batteri hanno avuto una **crescita esponenziale**. In formule, si può dire che il numero di batteri è

$$N = 80 \cdot 2^k \quad \text{dopo } 10k \text{ minuti.}$$

Questo è un tipico esempio di *legge esponenziale della crescita*, nota anche come **modello malthusiano**, dal nome di Thomas Malthus (1766-1834), che è uno dei padri della *demografia*.

Ora però proviamo a chiederci: qual è il numero di batteri dopo 55 minuti?

È chiaro che la domanda potrebbe non avere molto senso: se una cellula impiega circa 10 minuti per scindersi, quante cellule ci sono dopo 5 minuti?

Legge esponenziale

Anche nel linguaggio comune, si dice che i batteri hanno avuto una **crescita esponenziale**. In formule, si può dire che il numero di batteri è

$$N = 80 \cdot 2^k \quad \text{dopo } 10k \text{ minuti.}$$

Questo è un tipico esempio di *legge esponenziale della crescita*, nota anche come **modello malthusiano**, dal nome di Thomas Malthus (1766-1834), che è uno dei padri della *demografia*.

Ora però proviamo a chiederci: qual è il numero di batteri dopo 55 minuti?

È chiaro che la domanda potrebbe non avere molto senso: se una cellula impiega circa 10 minuti per scindersi, quante cellule ci sono dopo 5 minuti? In questo caso, dato anche l'alto numero di individui presenti, è ragionevole pensare che i batteri non si scindano tutti contemporaneamente, ma in ogni istante ce ne siano alcuni che cominciano la scissione, altri che la terminano, altri che sono a metà, ecc. ecc.

Quindi possiamo pensare che la nostra legge valga anche in altri istanti.
Proviamo a riscrivere la legge esponenziale in forma leggermente diversa:

$$N = 80 \cdot 2^{k/10} \quad \text{dopo } k \text{ minuti}$$

Quindi possiamo pensare che la nostra legge valga anche in altri istanti.
Proviamo a riscrivere la legge esponenziale in forma leggermente diversa:

$$N = 80 \cdot 2^{k/10} \quad \text{dopo } k \text{ minuti}$$

Se vogliamo calcolarla dopo 55 minuti avremo

$$N = 80 \cdot 2^{55/10} = 80 \cdot 2^{11/2} = 80 \cdot 2^{5+\frac{1}{2}} = 80 \cdot 32 \cdot 2^{1/2}$$

dove abbiamo usato la proprietà delle potenze $a^{b+c} = a^b a^c$.

Quindi possiamo pensare che la nostra legge valga anche in altri istanti.
Proviamo a riscrivere la legge esponenziale in forma leggermente diversa:

$$N = 80 \cdot 2^{k/10} \quad \text{dopo } k \text{ minuti}$$

Se vogliamo calcolarla dopo 55 minuti avremo

$$N = 80 \cdot 2^{55/10} = 80 \cdot 2^{11/2} = 80 \cdot 2^{5+\frac{1}{2}} = 80 \cdot 32 \cdot 2^{1/2}$$

dove abbiamo usato la proprietà delle potenze $a^{b+c} = a^b a^c$.

Se ora ci ricordiamo che $2^{1/2} = \sqrt{2} \simeq 1.4142$, avremo $N \simeq 3620$, quindi ci saranno circa 3620 individui dopo 55 minuti.

Quindi possiamo pensare che la nostra legge valga anche in altri istanti.
Proviamo a riscrivere la legge esponenziale in forma leggermente diversa:

$$N = 80 \cdot 2^{k/10} \quad \text{dopo } k \text{ minuti}$$

Se vogliamo calcolarla dopo 55 minuti avremo

$$N = 80 \cdot 2^{55/10} = 80 \cdot 2^{11/2} = 80 \cdot 2^{5+\frac{1}{2}} = 80 \cdot 32 \cdot 2^{1/2}$$

dove abbiamo usato la proprietà delle potenze $a^{b+c} = a^b a^c$.

Se ora ci ricordiamo che $2^{1/2} = \sqrt{2} \simeq 1.4142$, avremo $N \simeq 3620$, quindi ci saranno circa 3620 individui dopo 55 minuti.

A questo punto possiamo farci la stessa domanda per un qualsiasi istante di tempo: anche se un batterio impiega 10 minuti a scindersi, la nostra legge prevede che, partendo da 80 batteri, dopo un minuto ce ne siano

$$80 \cdot 2^{1/10} \simeq 85.74,$$

cioè un numero compreso tra 85 e 86.

La funzione esponenziale

Le funzioni del tipo precedente si chiamano **funzioni esponenziali**, poiché la variabile x si trova a esponente di una certa base.

La funzione esponenziale

Le funzioni del tipo precedente si chiamano **funzioni esponenziali**, poiché la variabile x si trova a esponente di una certa base.

Tralasciando il fattore 80, che è soltanto una costante moltiplicativa di cui per ora possiamo non preoccuparci, possiamo dire che

La funzione esponenziale

Le funzioni del tipo precedente si chiamano **funzioni esponenziali**, poiché la variabile x si trova a esponente di una certa base.

Tralasciando il fattore 80, che è soltanto una costante moltiplicativa di cui per ora possiamo non preoccuparci, possiamo dire che

data una base $a > 0$ con $a \neq 1$, definiamo *funzione esponenziale di base a* la funzione

$$f(x) = a^x.$$

La funzione esponenziale

Le funzioni del tipo precedente si chiamano **funzioni esponenziali**, poiché la variabile x si trova a esponente di una certa base.

Tralasciando il fattore 80, che è soltanto una costante moltiplicativa di cui per ora possiamo non preoccuparci, possiamo dire che

data una base $a > 0$ con $a \neq 1$, definiamo *funzione esponenziale di base a* la funzione

$$f(x) = a^x.$$

Si noti che poniamo $a \neq 0$ e $a \neq 1$ per evitare di ottenere funzioni costanti in tutti i punti: si ha infatti $0^x = 0$ e $1^x = 1$ per ogni x .

La funzione esponenziale

Le funzioni del tipo precedente si chiamano **funzioni esponenziali**, poiché la variabile x si trova a esponente di una certa base.

Tralasciando il fattore 80, che è soltanto una costante moltiplicativa di cui per ora possiamo non preoccuparci, possiamo dire che

data una base $a > 0$ con $a \neq 1$, definiamo *funzione esponenziale di base a* la funzione

$$f(x) = a^x.$$

Si noti che poniamo $a \neq 0$ e $a \neq 1$ per evitare di ottenere funzioni costanti in tutti i punti: si ha infatti $0^x = 0$ e $1^x = 1$ per ogni x .

Inoltre insistiamo sul fatto che la base debba essere positiva: non c'è modo infatti di estendere la funzione esponenziale anche a basi negative, a meno di non inoltrarsi nel difficile (ma affascinante) mondo dei numeri complessi. . .

Approfondimento: base con esponente reale

Perché non possiamo definire la funzione esponenziale con basi negative?
Il problema sta come al solito nelle radici di indice pari.

Approfondimento: base con esponente reale

Perché non possiamo definire la funzione esponenziale con basi negative?

Il problema sta come al solito nelle radici di indice pari.

Supponiamo di voler dare senso all'espressione $(-1)^x$, dove abbiamo scelto -1 ma potevamo prendere qualsiasi numero negativo.

Approfondimento: base con esponente reale

Perché non possiamo definire la funzione esponenziale con basi negative?

Il problema sta come al solito nelle radici di indice pari.

Supponiamo di voler dare senso all'espressione $(-1)^x$, dove abbiamo scelto -1 ma potevamo prendere qualsiasi numero negativo.

Ricordando che in generale si ha

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

è chiaro che l'espressione $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ non è definita, così come tutte le espressioni in cui il denominatore è pari.

Approfondimento: base con esponente reale

Perché non possiamo definire la funzione esponenziale con basi negative?

Il problema sta come al solito nelle radici di indice pari.

Supponiamo di voler dare senso all'espressione $(-1)^x$, dove abbiamo scelto -1 ma potevamo prendere qualsiasi numero negativo.

Ricordando che in generale si ha

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

è chiaro che l'espressione $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ non è definita, così come tutte le espressioni in cui il denominatore è pari.

Quindi dovremmo scartare dal dominio della funzione tutte le frazioni che, ridotte ai minimi termini, hanno il denominatore pari. E questo porterebbe ad avere una funzione con un dominio troppo “bucherellato”, che sarebbe difficile da trattare.

Approfondimento: base con esponente reale

Perché non possiamo definire la funzione esponenziale con basi negative?

Il problema sta come al solito nelle radici di indice pari.

Supponiamo di voler dare senso all'espressione $(-1)^x$, dove abbiamo scelto -1 ma potevamo prendere qualsiasi numero negativo.

Ricordando che in generale si ha

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

è chiaro che l'espressione $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ non è definita, così come tutte le espressioni in cui il denominatore è pari.

Quindi dovremmo scartare dal dominio della funzione tutte le frazioni che, ridotte ai minimi termini, hanno il denominatore pari. E questo porterebbe ad avere una funzione con un dominio troppo “bucherellato”, che sarebbe difficile da trattare.

Per questo si sceglie di avere $a > 0$.

Approfondimento: esponenziale di numeri irrazionali

Approfondimento: esponenziale di numeri irrazionali

Ci chiediamo ora se può avere senso un'espressione come

$$(-1)^{\sqrt{2}}.$$

Approfondimento: esponenziale di numeri irrazionali

Ci chiediamo ora se può avere senso un'espressione come

$$(-1)^{\sqrt{2}}.$$

Come per le radici di indice pari, anche questa espressione non è ben definita, perché il numero $\sqrt{2}$ è *irrazionale* e può essere approssimato da frazioni che hanno il denominatore pari, e che quindi sono da scartare.

Approfondimento: esponenziale di numeri irrazionali

Ci chiediamo ora se può avere senso un'espressione come

$$(-1)^{\sqrt{2}}.$$

Come per le radici di indice pari, anche questa espressione non è ben definita, perché il numero $\sqrt{2}$ è *irrazionale* e può essere approssimato da frazioni che hanno il denominatore pari, e che quindi sono da scartare.

Per definire la quantità

$$a^{\sqrt{2}}$$

si procede così: si prende una frazione $\frac{m}{n}$ che approssima $\sqrt{2}$ e si pone

$$a^{\sqrt{2}} \simeq a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Approfondimento: esponenziale di numeri irrazionali

Ci chiediamo ora se può avere senso un'espressione come

$$(-1)^{\sqrt{2}}.$$

Come per le radici di indice pari, anche questa espressione non è ben definita, perché il numero $\sqrt{2}$ è *irrazionale* e può essere approssimato da frazioni che hanno il denominatore pari, e che quindi sono da scartare.

Per definire la quantità

$$a^{\sqrt{2}}$$

si procede così: si prende una frazione $\frac{m}{n}$ che approssima $\sqrt{2}$ e si pone

$$a^{\sqrt{2}} \simeq a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Più la frazione $\frac{m}{n}$ approssima bene il valore $\sqrt{2}$, più la quantità $\sqrt[n]{a^m}$ si avvicina all'espressione che si vuole definire.

Approfondimento: esponenziale di numeri irrazionali

Ci chiediamo ora se può avere senso un'espressione come

$$(-1)^{\sqrt{2}}.$$

Come per le radici di indice pari, anche questa espressione non è ben definita, perché il numero $\sqrt{2}$ è *irrazionale* e può essere approssimato da frazioni che hanno il denominatore pari, e che quindi sono da scartare.

Per definire la quantità

$$a^{\sqrt{2}}$$

si procede così: si prende una frazione $\frac{m}{n}$ che approssima $\sqrt{2}$ e si pone

$$a^{\sqrt{2}} \simeq a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Più la frazione $\frac{m}{n}$ approssima bene il valore $\sqrt{2}$, più la quantità $\sqrt[n]{a^m}$ si avvicina all'espressione che si vuole definire.

Con un procedimento di **limite**, che impareremo a conoscere al quinto anno, si può formalizzare questa procedura.

Grafico della funzione esponenziale

Essendo $a > 0$, la funzione esponenziale è sempre positiva. Il suo comportamento però è ben diverso a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.

Grafico della funzione esponenziale

Essendo $a > 0$, la funzione esponenziale è sempre positiva. Il suo comportamento però è ben diverso a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.

Nel primo caso la funzione decresce e si avvicina a zero al crescere di x .

Grafico della funzione esponenziale

Essendo $a > 0$, la funzione esponenziale è sempre positiva. Il suo comportamento però è ben diverso a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.

Nel primo caso la funzione decresce e si avvicina a zero al crescere di x .
Nel secondo caso la funzione cresce e si avvicina a $+\infty$ al crescere di x .

Grafico della funzione esponenziale

Essendo $a > 0$, la funzione esponenziale è sempre positiva. Il suo comportamento però è ben diverso a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.

Nel primo caso la funzione decresce e si avvicina a zero al crescere di x .
Nel secondo caso la funzione cresce e si avvicina a $+\infty$ al crescere di x .

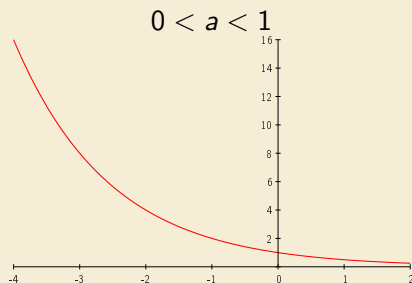


Grafico della funzione esponenziale

Essendo $a > 0$, la funzione esponenziale è sempre positiva. Il suo comportamento però è ben diverso a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.

Nel primo caso la funzione decresce e si avvicina a zero al crescere di x .
Nel secondo caso la funzione cresce e si avvicina a $+\infty$ al crescere di x .

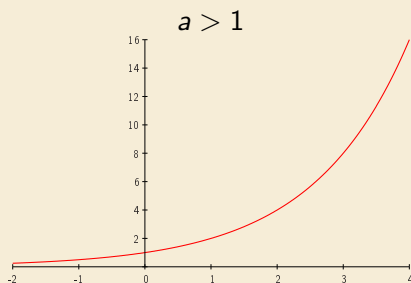
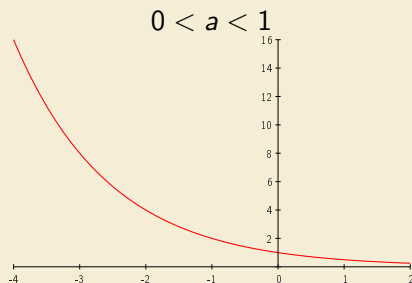
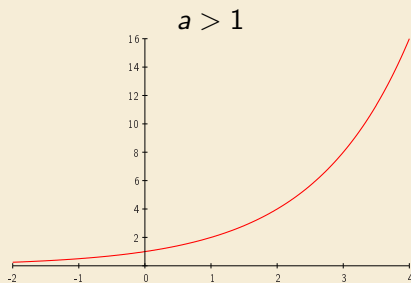
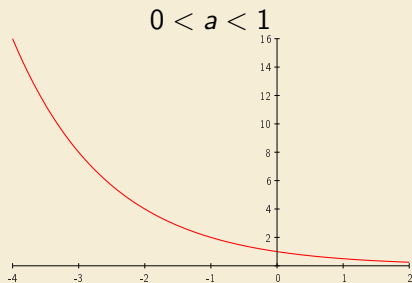


Grafico della funzione esponenziale

Essendo $a > 0$, la funzione esponenziale è sempre positiva. Il suo comportamento però è ben diverso a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.

Nel primo caso la funzione decresce e si avvicina a zero al crescere di x .
Nel secondo caso la funzione cresce e si avvicina a $+\infty$ al crescere di x .



In ogni caso, per $x = 0$ si ha $a^x = 1$.

La base e

Di solito la funzione esponenziale viene scritta nella base *naturale* e , che viene detto **numero di Nepero** e vale

$$e \simeq 2.71828$$

La base e

Di solito la funzione esponenziale viene scritta nella base *naturale* e , che viene detto **numero di Nepero** e vale

$$e \simeq 2.71828$$

Ma da dove viene questo numero irrazionale? Ne vedremo l'origine storica fra qualche lucido, quando presenteremo i logaritmi.

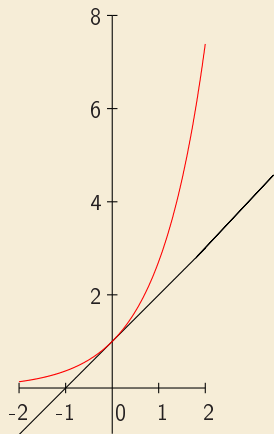
La base e

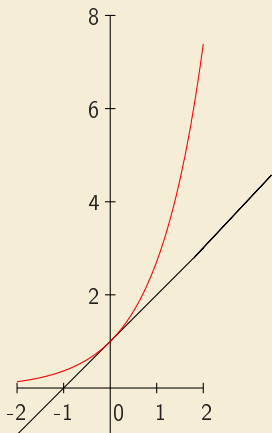
Di solito la funzione esponenziale viene scritta nella base *naturale* e , che viene detto **numero di Nepero** e vale

$$e \simeq 2.71828$$

Ma da dove viene questo numero irrazionale? Ne vedremo l'origine storica fra qualche lucido, quando presenteremo i logaritmi.

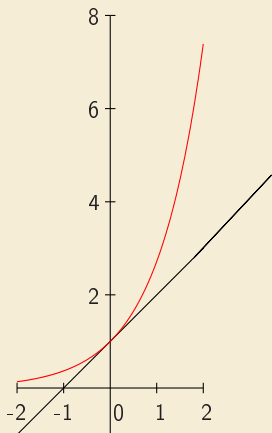
Però già adesso possiamo presentare una proprietà della funzione $f(x) = e^x$. Confrontiamo questa funzione con la retta $y = x + 1$, facendo un grafico in scala nel prossimo lucido.





Come si vede, la retta $y = x + 1$ è tangente alla funzione e^x . Inoltre vale la relazione

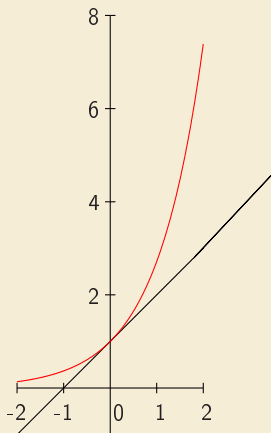
$$e^x \geq x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$



Come si vede, la retta $y = x + 1$ è tangente alla funzione e^x . Inoltre vale la relazione

$$e^x \geq x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Si può mostrare che e è l'unica base delle funzioni esponenziali che verifica questa proprietà.



Come si vede, la retta $y = x + 1$ è tangente alla funzione e^x . Inoltre vale la relazione

$$e^x \geq x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Si può mostrare che e è l'unica base delle funzioni esponenziali che verifica questa proprietà.

Quindi, anche se e è un numero “strano”, la tangente alla curva esponenziale $y = e^x$ nel punto $(0; 1)$ è la più “semplice” possibile. Questa è una delle caratterizzazioni del numero di Nepero.

Proprietà dell'esponenziale

Le tipiche proprietà degli esponenti interi si estendono a tutti i numeri reali. Quindi per ogni $a, b > 0$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ avremo

$$a^{x+y} = a^x a^y,$$

Proprietà dell'esponenziale

Le tipiche proprietà degli esponenti interi si estendono a tutti i numeri reali. Quindi per ogni $a, b > 0$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ avremo

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy},$$

Proprietà dell'esponenziale

Le tipiche proprietà degli esponenti interi si estendono a tutti i numeri reali. Quindi per ogni $a, b > 0$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ avremo

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x,$$

Proprietà dell'esponenziale

Le tipiche proprietà degli esponenti interi si estendono a tutti i numeri reali. Quindi per ogni $a, b > 0$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ avremo

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

Proprietà dell'esponenziale

Le tipiche proprietà degli esponenti interi si estendono a tutti i numeri reali. Quindi per ogni $a, b > 0$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ avremo

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

Inoltre, in analogia col caso naturale, introdurremo il simbolo

$$\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}} \quad \text{per ogni } x \neq 0$$

che denota la “radice x -esima di a ”.

I logaritmi

Ora passiamo a uno degli argomenti che di solito sono ritenuti tra i più ostici: parliamo dei logaritmi.

I logaritmi

Ora passiamo a uno degli argomenti che di solito sono ritenuti tra i più ostici: parliamo dei logaritmi.

La funzione *logaritmo* non è altro che la funzione inversa dell'esponenziale. Data una base $a > 0$, $a \neq 1$, abbiamo visto che la funzione $f(x) = a^x$ è sempre crescente (se $a > 1$) o decrescente (se $a < 1$), quindi in particolare possiamo invertire la funzione.

I logaritmi

Ora passiamo a uno degli argomenti che di solito sono ritenuti tra i più ostici: parliamo dei logaritmi.

La funzione *logaritmo* non è altro che la funzione inversa dell'esponenziale. Data una base $a > 0$, $a \neq 1$, abbiamo visto che la funzione $f(x) = a^x$ è sempre crescente (se $a > 1$) o decrescente (se $a < 1$), quindi in particolare possiamo invertire la funzione.

In questo caso invertire la funzione esponenziale significa chiedersi:

Dato un numero b , a che esponente devo elevare a per ottenere b ?

I logaritmi

Ora passiamo a uno degli argomenti che di solito sono ritenuti tra i più ostici: parliamo dei logaritmi.

La funzione *logaritmo* non è altro che la funzione inversa dell'esponenziale. Data una base $a > 0$, $a \neq 1$, abbiamo visto che la funzione $f(x) = a^x$ è sempre crescente (se $a > 1$) o decrescente (se $a < 1$), quindi in particolare possiamo invertire la funzione.

In questo caso invertire la funzione esponenziale significa chiedersi:

Dato un numero b , a che esponente devo elevare a per ottenere b ?

Ebbene, quell'esponente è proprio quel numero che viene denotato con

$$\log_a b.$$

I logaritmi

Ora passiamo a uno degli argomenti che di solito sono ritenuti tra i più ostici: parliamo dei logaritmi.

La funzione *logaritmo* non è altro che la funzione inversa dell'esponenziale. Data una base $a > 0$, $a \neq 1$, abbiamo visto che la funzione $f(x) = a^x$ è sempre crescente (se $a > 1$) o decrescente (se $a < 1$), quindi in particolare possiamo invertire la funzione.

In questo caso invertire la funzione esponenziale significa chiedersi:

Dato un numero b , a che esponente devo elevare a per ottenere b ?

Ebbene, quell'esponente è proprio quel numero che viene denotato con

$$\log_a b.$$

Quindi dobbiamo pensare al logaritmo come a un **esponente**, proprio quell'esponente a cui elevare la base a per ottenere l'argomento b .

La funzione logaritmica

Fissata una base $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione logaritmica è la funzione

$$f(x) = \log_a x$$

che a ogni numero x associa il valore del suo logaritmo in base a .

La funzione logaritmica

Fissata una base $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione logaritmica è la funzione

$$f(x) = \log_a x$$

che a ogni numero x associa il valore del suo logaritmo in base a .

Poiché abbiamo visto che i valori della funzione esponenziale sono sempre positivi, non ha senso chiedersi cosa sia il logaritmo di un numero negativo, per cui la funzione è definita solo per $x > 0$.

La funzione logaritmica

Fissata una base $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione logaritmica è la funzione

$$f(x) = \log_a x$$

che a ogni numero x associa il valore del suo logaritmo in base a .

Poiché abbiamo visto che i valori della funzione esponenziale sono sempre positivi, non ha senso chiedersi cosa sia il logaritmo di un numero negativo, per cui la funzione è definita solo per $x > 0$.

Quindi il **dominio** della funzione logaritmica è l'intervallo $]0; +\infty[$, qualsiasi sia la base.

La funzione logaritmica

Fissata una base $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione logaritmica è la funzione

$$f(x) = \log_a x$$

che a ogni numero x associa il valore del suo logaritmo in base a .

Poiché abbiamo visto che i valori della funzione esponenziale sono sempre positivi, non ha senso chiedersi cosa sia il logaritmo di un numero negativo, per cui la funzione è definita solo per $x > 0$.

Quindi il **dominio** della funzione logaritmica è l'intervallo $]0; +\infty[$, qualsiasi sia la base.

Inoltre, poiché l'esponenziale di 0 fa 1 in ogni base, si avrà che

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{in ogni base.}$$

Grafico della funzione logaritmica

Come per le esponenziali, l'andamento delle funzioni logaritmiche è qualitativamente diverso a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.

Grafico della funzione logaritmica

Come per le esponenziali, l'andamento delle funzioni logaritmiche è qualitativamente diverso a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.

$$0 < a < 1$$

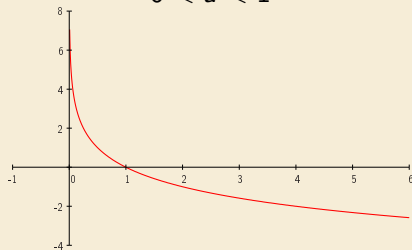
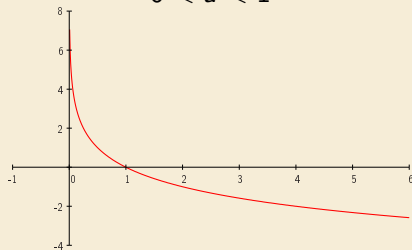


Grafico della funzione logaritmica

Come per le esponenziali, l'andamento delle funzioni logaritmiche è qualitativamente diverso a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.

$$0 < a < 1$$



$$a > 1$$

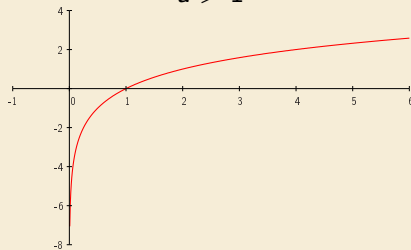
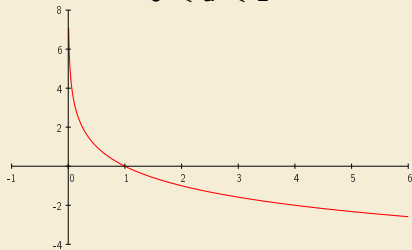


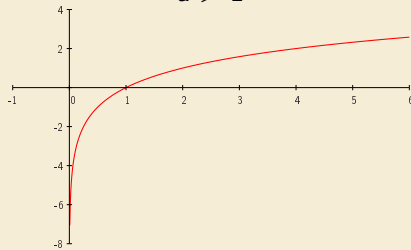
Grafico della funzione logaritmica

Come per le esponenziali, l'andamento delle funzioni logaritmiche è qualitativamente diverso a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.

$0 < a < 1$



$a > 1$

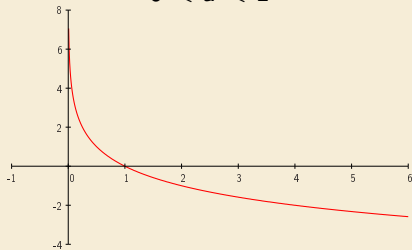


La funzione logaritmica è decrescente per $a < 1$ e crescente per $a > 1$. In ogni caso, per $x = 1$ si ha $\log_a x = 0$.

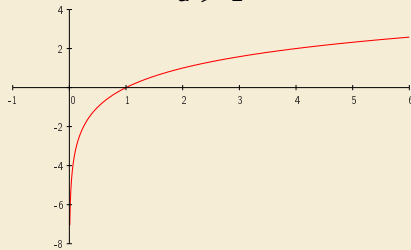
Grafico della funzione logaritmica

Come per le esponenziali, l'andamento delle funzioni logaritmiche è qualitativamente diverso a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.

$0 < a < 1$



$a > 1$



La funzione logaritmica è decrescente per $a < 1$ e crescente per $a > 1$. In ogni caso, per $x = 1$ si ha $\log_a x = 0$.

Inoltre l'asse delle y è un **asintoto verticale**: la funzione logaritmica tende all'infinito se il suo argomento si avvicina a 0.

Proprietà dei logaritmi

Poiché le funzioni esponenziale e logaritmica sono una l'inversa dell'altra, avremo le formule

Proprietà dei logaritmi

Poiché le funzioni esponenziale e logaritmica sono una l'inversa dell'altra, avremo le formule

$$x = \log_a(a^x),$$

Proprietà dei logaritmi

Poiché le funzioni esponenziale e logaritmica sono una l'inversa dell'altra, avremo le formule

$$x = \log_a(a^x), \quad x = a^{\log_a x}.$$

Proprietà dei logaritmi

Poiché le funzioni esponenziale e logaritmica sono una l'inversa dell'altra, avremo le formule

$$x = \log_a(a^x), \quad x = a^{\log_a x}.$$

Inoltre, poiché i logaritmi sono degli esponenti, essi verificano alcune proprietà che discendono da quelle dell'esponenziale: per ogni $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y > 0$ si ha

Proprietà dei logaritmi

Poiché le funzioni esponenziale e logaritmica sono una l'inversa dell'altra, avremo le formule

$$x = \log_a(a^x), \quad x = a^{\log_a x}.$$

Inoltre, poiché i logaritmi sono degli esponenti, essi verificano alcune proprietà che discendono da quelle dell'esponenziale: per ogni $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y > 0$ si ha

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

Proprietà dei logaritmi

Poiché le funzioni esponenziale e logaritmica sono una l'inversa dell'altra, avremo le formule

$$x = \log_a(a^x), \quad x = a^{\log_a x}.$$

Inoltre, poiché i logaritmi sono degli esponenti, essi verificano alcune proprietà che discendono da quelle dell'esponenziale: per ogni $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y > 0$ si ha

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a(x^y) = y \log_a x,$$

Proprietà dei logaritmi

Poiché le funzioni esponenziale e logaritmica sono una l'inversa dell'altra, avremo le formule

$$x = \log_a(a^x), \quad x = a^{\log_a x}.$$

Inoltre, poiché i logaritmi sono degli esponenti, essi verificano alcune proprietà che discendono da quelle dell'esponenziale: per ogni $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y > 0$ si ha

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a(x^y) = y \log_a x,$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x,$$

Proprietà dei logaritmi

Poiché le funzioni esponenziale e logaritmica sono una l'inversa dell'altra, avremo le formule

$$x = \log_a(a^x), \quad x = a^{\log_a x}.$$

Inoltre, poiché i logaritmi sono degli esponenti, essi verificano alcune proprietà che discendono da quelle dell'esponenziale: per ogni $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y > 0$ si ha

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a(x^y) = y \log_a x,$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Proprietà dei logaritmi

Poiché le funzioni esponenziale e logaritmica sono una l'inversa dell'altra, avremo le formule

$$x = \log_a(a^x), \quad x = a^{\log_a x}.$$

Inoltre, poiché i logaritmi sono degli esponenti, essi verificano alcune proprietà che discendono da quelle dell'esponenziale: per ogni $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y > 0$ si ha

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a(x^y) = y \log_a x,$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

L'ultima formula ci permette di *cambiare base* al logaritmo.

Dimostrazione delle proprietà dei logaritmi

Come esempio, dimostriamo la prima proprietà. Partiamo dalla proprietà dell'esponenziale

$$a^{b+c} = a^b a^c.$$

Dimostrazione delle proprietà dei logaritmi

Come esempio, dimostriamo la prima proprietà. Partiamo dalla proprietà dell'esponenziale

$$a^{b+c} = a^b a^c.$$

Se poniamo $x = a^b$ e $y = a^c$, per definizione di logaritmo avremo che

$$b = \log_a x, \quad c = \log_a y$$

e l'uguaglianza diventa $a^{b+c} = xy$ da cui, sempre per definizione di logaritmo,

$$b + c = \log_a(xy).$$

Dimostrazione delle proprietà dei logaritmi

Come esempio, dimostriamo la prima proprietà. Partiamo dalla proprietà dell'esponenziale

$$a^{b+c} = a^b a^c.$$

Se poniamo $x = a^b$ e $y = a^c$, per definizione di logaritmo avremo che

$$b = \log_a x, \quad c = \log_a y$$

e l'uguaglianza diventa $a^{b+c} = xy$ da cui, sempre per definizione di logaritmo,

$$b + c = \log_a(xy).$$

Sostituendo, otteniamo

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$$

che è la prima proprietà. Le altre si dimostrano in modo simile. □

L'uso dei logaritmi per i conti

L'origine storica del logaritmo **non** è quella che abbiamo appena visto, come funzione inversa dell'esponenziale, ma esso fu introdotto per semplificare i conti.

L'uso dei logaritmi per i conti

L'origine storica del logaritmo **non** è quella che abbiamo appena visto, come funzione inversa dell'esponenziale, ma esso fu introdotto per semplificare i conti.

La data è il 1614, e l'autore è Giovanni Nepero (John Napier, 1550-1617), un ricco possidente scozzese.

L'uso dei logaritmi per i conti

L'origine storica del logaritmo **non** è quella che abbiamo appena visto, come funzione inversa dell'esponenziale, ma esso fu introdotto per semplificare i conti.

La data è il 1614, e l'autore è Giovanni Nepero (John Napier, 1550-1617), un ricco possidente scozzese.

Riletta con gli occhi contemporanei, l'idea di Nepero si basa sulla proprietà

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

che **trasforma un prodotto in una somma**.

L'uso dei logaritmi per i conti

L'origine storica del logaritmo **non** è quella che abbiamo appena visto, come funzione inversa dell'esponenziale, ma esso fu introdotto per semplificare i conti.

La data è il 1614, e l'autore è Giovanni Nepero (John Napier, 1550-1617), un ricco possidente scozzese.

Riletta con gli occhi contemporanei, l'idea di Nepero si basa sulla proprietà

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

che **trasforma un prodotto in una somma**.

In breve: se conoscessimo i logaritmi di *tutti* i numeri, per moltiplicare tra loro x e y potremmo procedere così:

L'uso dei logaritmi per i conti

L'origine storica del logaritmo **non** è quella che abbiamo appena visto, come funzione inversa dell'esponenziale, ma esso fu introdotto per semplificare i conti.

La data è il 1614, e l'autore è Giovanni Nepero (John Napier, 1550-1617), un ricco possidente scozzese.

Riletta con gli occhi contemporanei, l'idea di Nepero si basa sulla proprietà

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

che **trasforma un prodotto in una somma**.

In breve: se conoscessimo i logaritmi di *tutti* i numeri, per moltiplicare tra loro x e y potremmo procedere così:

- cerchiamo $\log_a x$ e $\log_a y$;

L'uso dei logaritmi per i conti

L'origine storica del logaritmo **non** è quella che abbiamo appena visto, come funzione inversa dell'esponenziale, ma esso fu introdotto per semplificare i conti.

La data è il 1614, e l'autore è Giovanni Nepero (John Napier, 1550-1617), un ricco possidente scozzese.

Riletta con gli occhi contemporanei, l'idea di Nepero si basa sulla proprietà

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

che **trasforma un prodotto in una somma**.

In breve: se conoscessimo i logaritmi di *tutti* i numeri, per moltiplicare tra loro x e y potremmo procedere così:

- cerchiamo $\log_a x$ e $\log_a y$;
- *sommiamo* i due logaritmi;

L'uso dei logaritmi per i conti

L'origine storica del logaritmo **non** è quella che abbiamo appena visto, come funzione inversa dell'esponenziale, ma esso fu introdotto per semplificare i conti.

La data è il 1614, e l'autore è Giovanni Nepero (John Napier, 1550-1617), un ricco possidente scozzese.

Riletta con gli occhi contemporanei, l'idea di Nepero si basa sulla proprietà

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

che **trasforma un prodotto in una somma**.

In breve: se conoscessimo i logaritmi di *tutti* i numeri, per moltiplicare tra loro x e y potremmo procedere così:

- cerchiamo $\log_a x$ e $\log_a y$;
- *sommiamo* i due logaritmi;
- cerchiamo quel numero il cui logaritmo è la somma appena trovata.

L'uso dei logaritmi per i conti

L'origine storica del logaritmo **non** è quella che abbiamo appena visto, come funzione inversa dell'esponenziale, ma esso fu introdotto per semplificare i conti.

La data è il 1614, e l'autore è Giovanni Nepero (John Napier, 1550-1617), un ricco possidente scozzese.

Riletta con gli occhi contemporanei, l'idea di Nepero si basa sulla proprietà

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

che **trasforma un prodotto in una somma**.

In breve: se conoscessimo i logaritmi di *tutti* i numeri, per moltiplicare tra loro x e y potremmo procedere così:

- cerchiamo $\log_a x$ e $\log_a y$;
- *sommiamo* i due logaritmi;
- cerchiamo quel numero il cui logaritmo è la somma appena trovata.

Il numero finale è proprio xy .

Ovviamente, nello stesso identico modo le divisioni vengono trasformate in differenze, poiché vale la proprietà

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y.$$

Ovviamente, nello stesso identico modo le divisioni vengono trasformate in differenze, poiché vale la proprietà

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y.$$

Anche per l'estrazione di radice, operazione notoriamente laboriosa, si procede nello stesso modo: poiché

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a \left(x^{1/n} \right) = \frac{1}{n} \log_a x,$$

usando la stessa idea di prima si può:

Ovviamente, nello stesso identico modo le divisioni vengono trasformate in differenze, poiché vale la proprietà

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y.$$

Anche per l'estrazione di radice, operazione notoriamente laboriosa, si procede nello stesso modo: poiché

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a \left(x^{1/n} \right) = \frac{1}{n} \log_a x,$$

usando la stessa idea di prima si può:

- trovare $\log_a x$
- dividere il numero per n ;
- cercare il numero che ha per logaritmo il risultato trovato.

Ovviamente, nello stesso identico modo le divisioni vengono trasformate in differenze, poiché vale la proprietà

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y.$$

Anche per l'estrazione di radice, operazione notoriamente laboriosa, si procede nello stesso modo: poiché

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a \left(x^{1/n} \right) = \frac{1}{n} \log_a x,$$

usando la stessa idea di prima si può:

- trovare $\log_a x$
- dividere il numero per n ;
- cercare il numero che ha per logaritmo il risultato trovato.

Quel numero sarà proprio $\sqrt[n]{x}$.

Le tavole logaritmiche

Certo, pare assurdo che per calcolare il prodotto di due numeri si debba trovare il loro logaritmo! Come facciamo senza una calcolatrice?

Le tavole logaritmiche

Certo, pare assurdo che per calcolare il prodotto di due numeri si debba trovare il loro logaritmo! Come facciamo senza una calcolatrice?

Il compito di Nepero fu proprio quello di predisporre delle **tavole logaritmiche** in cui venivano elencati i logaritmi di parecchi numeri. In questo modo il compito di trovare il logaritmo di due numeri e poi di invertire la funzione era svolto semplicemente scorrendo le tavole e usando il numero più vicino.

Le tavole logaritmiche

Certo, pare assurdo che per calcolare il prodotto di due numeri si debba trovare il loro logaritmo! Come facciamo senza una calcolatrice?

Il compito di Nepero fu proprio quello di predisporre delle **tavole logaritmiche** in cui venivano elencati i logaritmi di parecchi numeri. In questo modo il compito di trovare il logaritmo di due numeri e poi di invertire la funzione era svolto semplicemente scorrendo le tavole e usando il numero più vicino.

Pensate che per predisporre le sue tavole Nepero impiegò **20 anni!** Però ne valse la pena: grazie a quelle tavole (che vennero ulteriormente ampliate e migliorate nei decenni successivi, soprattutto da Henry Briggs) gli astronomi poterono effettuare calcoli sempre più sofisticati sulle orbite dei pianeti, fino ad arrivare alla formulazione delle leggi di Keplero e poi alla loro dimostrazione da parte di Newton.

Esempio

Per calcolare la radice quinta del numero 3.142 si procedeva così:

Esempio

Per calcolare la radice quinta del numero 3.142 si procedeva così:

- si cercava sulle tavole (quelle moderne sono in base 10) il logaritmo di 3.142, trovando 0.49721;

Esempio

Per calcolare la radice quinta del numero 3.142 si procedeva così:

- si cercava sulle tavole (quelle moderne sono in base 10) il logaritmo di 3.142, trovando 0.49721;
- si divideva 0.49721 per 5, ottenendo 0.09944;

Esempio

Per calcolare la radice quinta del numero 3.142 si procedeva così:

- si cercava sulle tavole (quelle moderne sono in base 10) il logaritmo di 3.142, trovando 0.49721;
- si divideva 0.49721 per 5, ottenendo 0.09944;
- si cercava sulle tavole il numero più vicino a quest'ultimo: sulle mie ho trovato 0.09934, che è il logaritmo (in base 10) di 1.257.

Esempio

Per calcolare la radice quinta del numero 3.142 si procedeva così:

- si cercava sulle tavole (quelle moderne sono in base 10) il logaritmo di 3.142, trovando 0.49721;
- si divideva 0.49721 per 5, ottenendo 0.09944;
- si cercava sulle tavole il numero più vicino a quest'ultimo: sulle mie ho trovato 0.09934, che è il logaritmo (in base 10) di 1.257.

Quindi $\sqrt[5]{3.142} \simeq 1.257$.

Esempio

Per calcolare la radice quinta del numero 3.142 si procedeva così:

- si cercava sulle tavole (quelle moderne sono in base 10) il logaritmo di 3.142, trovando 0.49721;
- si divideva 0.49721 per 5, ottenendo 0.09944;
- si cercava sulle tavole il numero più vicino a quest'ultimo: sulle mie ho trovato 0.09934, che è il logaritmo (in base 10) di 1.257.

Quindi $\sqrt[5]{3.142} \simeq 1.257$.

Se proviamo a fare il conto con un qualsiasi software di calcolo (ad esempio Maxima), otteniamo

$$\sqrt[5]{3.142} \simeq 1.25730671821151,$$

che ha una precisione notevolmente superiore.

Esempio

Per calcolare la radice quinta del numero 3.142 si procedeva così:

- si cercava sulle tavole (quelle moderne sono in base 10) il logaritmo di 3.142, trovando 0.49721;
- si divideva 0.49721 per 5, ottenendo 0.09944;
- si cercava sulle tavole il numero più vicino a quest'ultimo: sulle mie ho trovato 0.09934, che è il logaritmo (in base 10) di 1.257.

Quindi $\sqrt[5]{3.142} \simeq 1.257$.

Se proviamo a fare il conto con un qualsiasi software di calcolo (ad esempio Maxima), otteniamo

$$\sqrt[5]{3.142} \simeq 1.25730671821151,$$

che ha una precisione notevolmente superiore.

Ma anche il conto fatto con le tavole era giusto fino alla terza cifra decimale. E l'unico calcolo manuale è stato una divisione per 5.

Il logaritmo naturale

Il metodo di Nepero funziona per qualsiasi base dei logaritmi. E allora perché la costante e , che abbiamo incontrato prima, viene anche detta **numero di Nepero**?

Il logaritmo naturale

Il metodo di Nepero funziona per qualsiasi base dei logaritmi. E allora perché la costante e , che abbiamo incontrato prima, viene anche detta **numero di Nepero**?

Perché la base scelta da Nepero, per poter compilare le tavole in maniera più agevole, fu il numero

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \simeq 0.367879$$

e questo numero è molto, molto vicino al valore di $1/e$.

Il logaritmo naturale

Il metodo di Nepero funziona per qualsiasi base dei logaritmi. E allora perché la costante e , che abbiamo incontrato prima, viene anche detta **numero di Nepero**?

Perché la base scelta da Nepero, per poter compilare le tavole in maniera più agevole, fu il numero

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \simeq 0.367879$$

e questo numero è molto, molto vicino al valore di $1/e$.

Quindi il logaritmo in base e , spesso denotato con $\ln x$, viene anche chiamato *logaritmo naturale* o *neperiano*.

Il logaritmo naturale

Il metodo di Nepero funziona per qualsiasi base dei logaritmi. E allora perché la costante e , che abbiamo incontrato prima, viene anche detta **numero di Nepero**?

Perché la base scelta da Nepero, per poter compilare le tavole in maniera più agevole, fu il numero

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \simeq 0.367879$$

e questo numero è molto, molto vicino al valore di $1/e$.

Quindi il logaritmo in base e , spesso denotato con $\ln x$, viene anche chiamato *logaritmo naturale* o *neperiano*.

In realtà, lo strumento sviluppato da Nepero è simile al logaritmo attuale, ma non è proprio la stessa cosa. La nozione di logaritmo così come la conosciamo noi fu introdotta da Briggs pochi anni dopo, e notevolmente migliorata da Eulero almeno un secolo più tardi.

Conclusione

Le tavole logaritmiche sono state utilizzate fino a qualche decennio fa, quindi hanno avuto una vita lunga più di tre secoli. Ancora negli anni '80 (del secolo scorso) si trovavano tavole logaritmiche allegate ai manuali di matematica per le scuole medie e superiori.

Conclusione

Le tavole logaritmiche sono state utilizzate fino a qualche decennio fa, quindi hanno avuto una vita lunga più di tre secoli. Ancora negli anni '80 (del secolo scorso) si trovavano tavole logaritmiche allegate ai manuali di matematica per le scuole medie e superiori.

Inoltre fino a quegli anni si è usato anche il **regolo calcolatore**, che era uno strumento di calcolo molto essenziale, una sorta di doppio righello scorrevole, basato sul principio dei logaritmi.

Conclusione

Le tavole logaritmiche sono state utilizzate fino a qualche decennio fa, quindi hanno avuto una vita lunga più di tre secoli. Ancora negli anni '80 (del secolo scorso) si trovavano tavole logaritmiche allegate ai manuali di matematica per le scuole medie e superiori.

Inoltre fino a quegli anni si è usato anche il **regolo calcolatore**, che era uno strumento di calcolo molto essenziale, una sorta di doppio righello scorrevole, basato sul principio dei logaritmi.

Le tavole e il regolo sono stati infine soppiantati dall'avvento delle calcolatrici e dei computer. Oggi le tavole che Nepero compose con infinita pazienza e parecchia abilità nel giro di 20 anni, potrebbero essere prodotte e stampate da un qualsiasi computer nel giro di pochi secondi.

Conclusione

Le tavole logaritmiche sono state utilizzate fino a qualche decennio fa, quindi hanno avuto una vita lunga più di tre secoli. Ancora negli anni '80 (del secolo scorso) si trovavano tavole logaritmiche allegate ai manuali di matematica per le scuole medie e superiori.

Inoltre fino a quegli anni si è usato anche il **regolo calcolatore**, che era uno strumento di calcolo molto essenziale, una sorta di doppio righello scorrevole, basato sul principio dei logaritmi.

Le tavole e il regolo sono stati infine soppiantati dall'avvento delle calcolatrici e dei computer. Oggi le tavole che Nepero compose con infinita pazienza e parecchia abilità nel giro di 20 anni, potrebbero essere prodotte e stampate da un qualsiasi computer nel giro di pochi secondi.

Ma forse è anche grazie allo strumento introdotto da Nepero che la tecnologia ha potuto avere questo notevole sviluppo.