

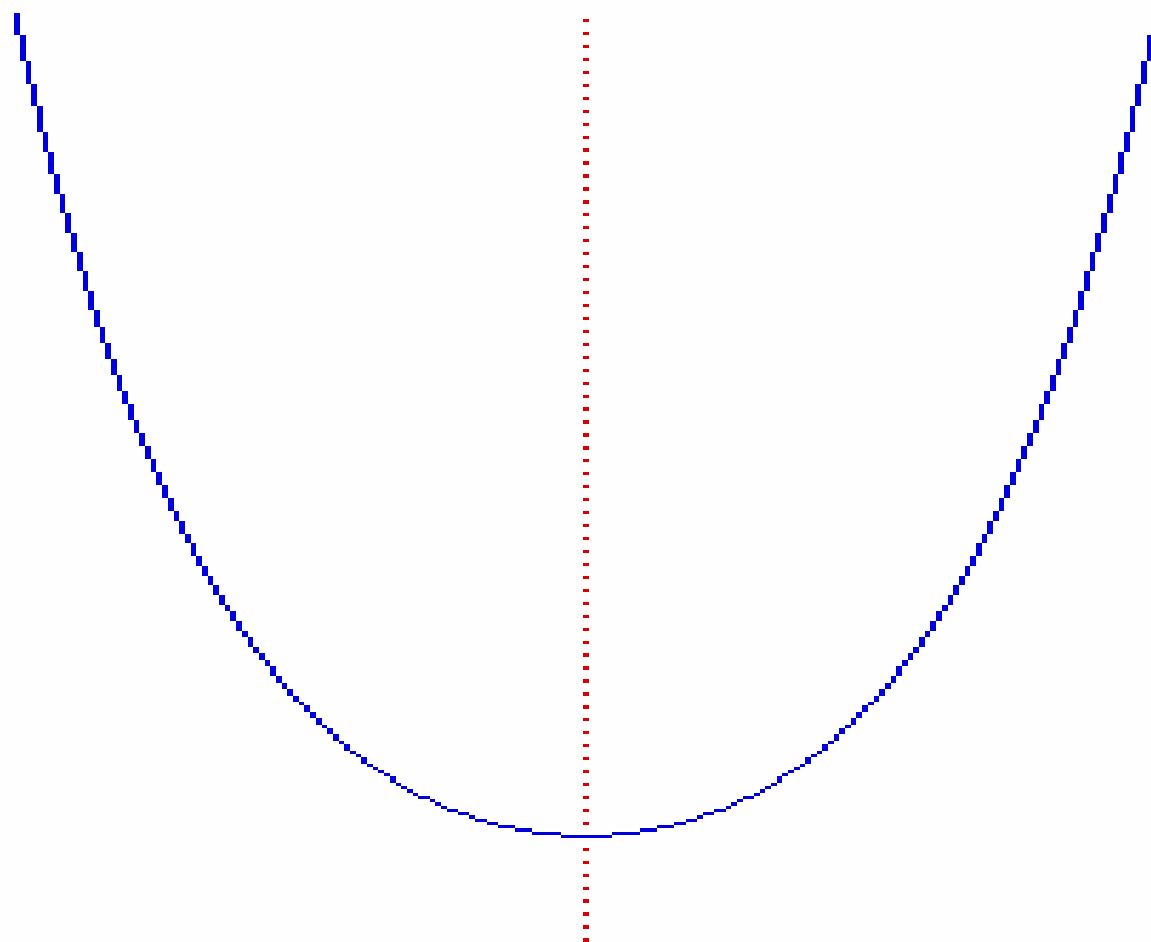
LA FORMA DEI CAVI SOSPESI

Ledo Stefanini



- ▶ Se si fissano a due sostegni gli estremi di una catena o di una fune pesante, questa assume una forma caratteristica, osservabile nei cavi dell'energia elettrica o delle funivie. Vogliamo riconoscere questa forma e individuare i parametri da cui dipende.

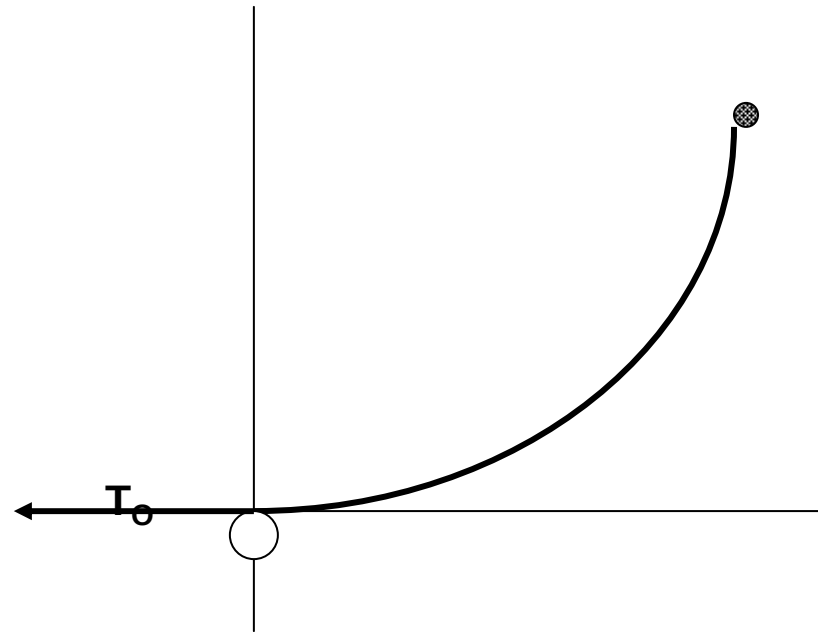
Catenary



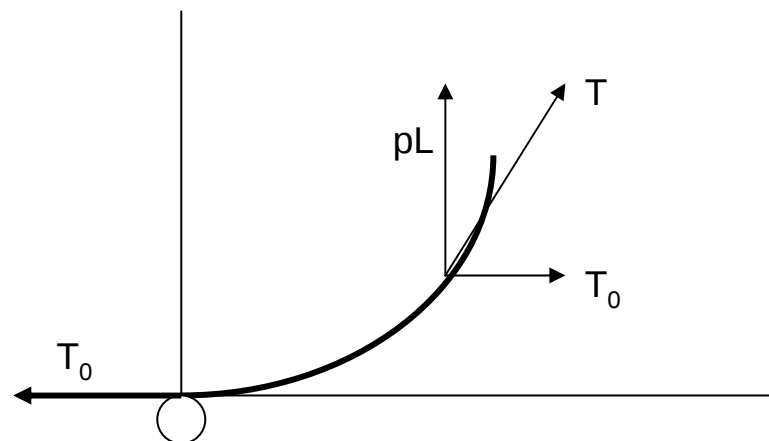
- ▶ In proposito, Galileo non aveva dubbi: si tratta di una parabola. Scrive, infatti, nella Prima Giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*:
- ▶ << ...L'altro modo, per disegnar la linea [parabola], che cerchiamo, procede così. Ferminsi ad alto due chiodi in un parete, equidistanti all'orizzonte e tra di loro lontani il doppio della larghezza del rettangolo su 'l quale vogliamo notare la semiparabola, e da questi due chiodi penda una catenella sottile, e tanto lunga che la sua sacca si stenda quanta è la lunghezza del prisma: questa catenella si piega in figura parabolica, sì che andando punteggiando sopra 'l muro la strada che vi fa essa catenella, aremo descritta un'intera parabola, la quale con un perpendicolo, che penda dal mezo di quei due chiodi, si dividerà in parti eguali.>>

- ▶ Se la curva fosse una parabola, dimezzando l'ascissa, l'ordinata dovrebbe diventare la quarta parte. Ma la curva descritta dalla catenella non soddisfa a questo criterio, se non approssimativamente: dobbiamo quindi ammettere che non si tratta di una parabola.

- ▶ Se tagliamo la corda a metà, per mantenere la sua forma dobbiamo applicare una tensione orizzontale T_0 .



- ▶ In ogni punto della corda vi è una tensione orizzontale uguale a T_0 , e una tensione verticale che è uguale al peso del tratto di corda sostenuto. Se la sua lunghezza è L e il peso per unità di lunghezza p , il peso è pL .



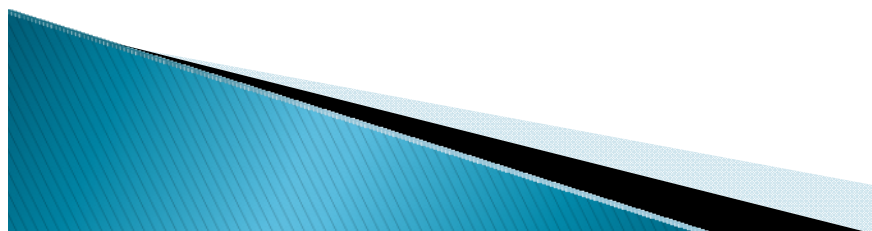
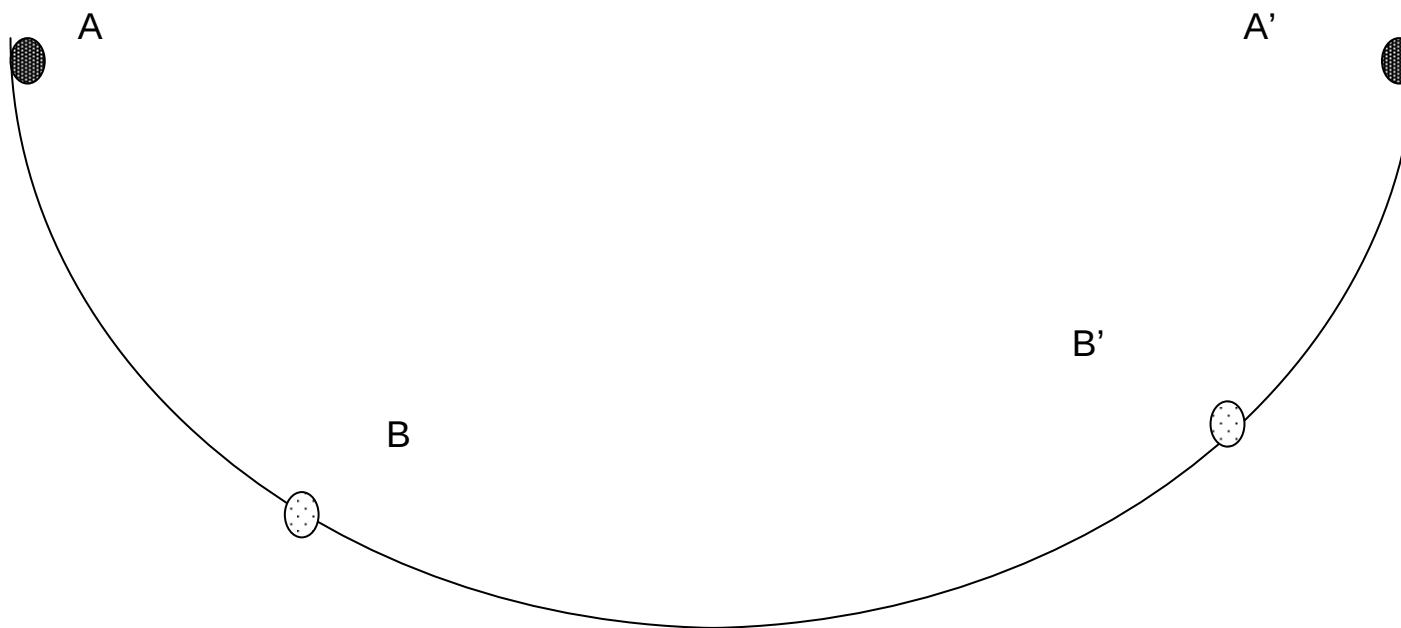
- ▶ Poiché la tensione ha la direzione della corda in quel punto, il rapporto tra la componente verticale della tensione e quella orizzontale ha la direzione della tangente alla corda nel punto stesso:

$$pend = \frac{p}{T_0} L$$

- ▶ Si osservi che il rapporto T_0 / p
- ▶ ha le dimensioni di una lunghezza.
- ▶ E' questa la proprietà che caratterizza la forma dei cavi sospesi: che la pendenza è, in ogni punto, proporzionale alla distanza dal centro, misurata sulla corda:

$$pend \propto L$$

- ▶ Questo significa che, se il cavo è appeso a due sostegni A ed A', e li sostituiamo con altri due B e B' in posizioni diverse, la forma del cavo non muta:



- ▶ Vi è una sola curva che gode di questa proprietà: il *coseno iperbolico*. La sua equazione è

$$y + 1 = \frac{1}{2} \left(e^x + e^{-x} \right)$$

- ▶ dove e indica la base dei logaritmi naturali e
- ▶ le coordinate sono misurate in unità di una lunghezza caratteristica:

$$\lambda = \frac{T_0}{p}$$

- ▶ Si tratta di un risultato sorprendente: tutti i cavi sospesi assumono la stessa forma.
- ▶ Ovvero, tutte le curve descritte da cavi sospesi sono sovrapponibili, indipendentemente dalla lunghezza e dal peso dei cavi.
- ▶ Il grafico di una rappresenta tutte le possibili catenarie.

- ▶ Il parametro λ ha un importante significato:
- ▶ Quando le dimensioni della curva sono piccole in confronto a λ , allora è legittimo confondere la curva con una parabola. Significa che l'errore di Galileo non era così grande.

- ▶ Se $x \ll \lambda$; $y \ll \lambda$, la curva è assimilabile ad una parabola di equazione

$$y = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

- ▶ dove l'unità di misura è λ .
- ▶ La curva descritta dai cavi sospesi si chiama

CATENARIA

