

Una introduzione ai frattali

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Che cos'è un frattale?

I frattali sono figure “complesse”, piene di dettagli a scale via via sempre più piccole. Per darne una definizione rigorosa bisogna scomodare nozioni matematiche piuttosto avanzate, come la dimensione di Hausdorff, che sono un po' difficili da trattare.

Che cos'è un frattale?

I frattali sono figure “complesse”, piene di dettagli a scale via via sempre più piccole. Per darne una definizione rigorosa bisogna scomodare nozioni matematiche piuttosto avanzate, come la dimensione di Hausdorff, che sono un po' difficili da trattare.

In questi lucidi analizzeremo due esempi famosi di frattali, presi nella grande famiglia dei “frattali autosimili”: la curva di von Koch (detta anche “fiocco di neve”) e il triangolo di Sierpiński.

Che cos'è un frattale?

I frattali sono figure “complesse”, piene di dettagli a scale via via sempre più piccole. Per darne una definizione rigorosa bisogna scomodare nozioni matematiche piuttosto avanzate, come la dimensione di Hausdorff, che sono un po' difficili da trattare.

In questi lucidi analizzeremo due esempi famosi di frattali, presi nella grande famiglia dei “frattali autosimili”: la curva di von Koch (detta anche “fiocco di neve”) e il triangolo di Sierpiński.

Intuitivamente si parla di figura “autosimile” quando ogni sua parte, per quanto piccola, contiene in sé tutte le caratteristiche della figura stessa. Se si ingrandisce una parte della figura (come uno “zoom” al computer) si ottiene una figura con le stesse caratteristiche di quella di partenza: non si può capire quanto abbiamo ingrandito, il numero di dettagli visibili è sempre lo stesso.

Che cos'è un frattale?

I frattali sono figure “complesse”, piene di dettagli a scale via via sempre più piccole. Per darne una definizione rigorosa bisogna scomodare nozioni matematiche piuttosto avanzate, come la dimensione di Hausdorff, che sono un po' difficili da trattare.

In questi lucidi analizzeremo due esempi famosi di frattali, presi nella grande famiglia dei “frattali autosimili”: la curva di von Koch (detta anche “fiocco di neve”) e il triangolo di Sierpiński.

Intuitivamente si parla di figura “autosimile” quando ogni sua parte, per quanto piccola, contiene in sé tutte le caratteristiche della figura stessa. Se si ingrandisce una parte della figura (come uno “zoom” al computer) si ottiene una figura con le stesse caratteristiche di quella di partenza: non si può capire quanto abbiamo ingrandito, il numero di dettagli visibili è sempre lo stesso.

Cercheremo poi di introdurre, almeno in modo intuitivo, la nozione di dimensione di Hausdorff di una figura geometrica.

Il fiocco di neve

La curva di von Koch (o “fiocco di neve”) si costruisce in questo modo:

- si parte dal perimetro di un triangolo equilatero

Il fiocco di neve

La curva di von Koch (o “fiocco di neve”) si costruisce in questo modo:

- si parte dal perimetro di un triangolo equilatero
- si divide ogni lato in tre parti uguali, cancellando quella centrale

Il fiocco di neve

La curva di von Koch (o “fiocco di neve”) si costruisce in questo modo:

- si parte dal perimetro di un triangolo equilatero
- si divide ogni lato in tre parti uguali, cancellando quella centrale
- si sostituisce alla parte centrale una “punta” di un triangolo equilatero più piccolo

Il fiocco di neve

La curva di von Koch (o “fiocco di neve”) si costruisce in questo modo:

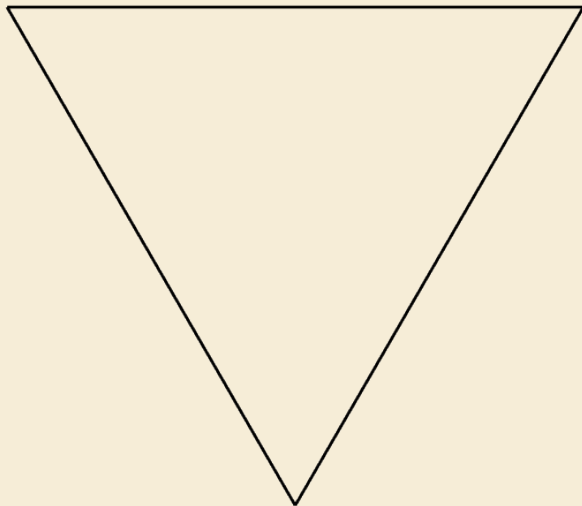
- si parte dal perimetro di un triangolo equilatero
- si divide ogni lato in tre parti uguali, cancellando quella centrale
- si sostituisce alla parte centrale una “punta” di un triangolo equilatero più piccolo
- si continua a ripetere il procedimento per ognuno dei segmenti rimasti.

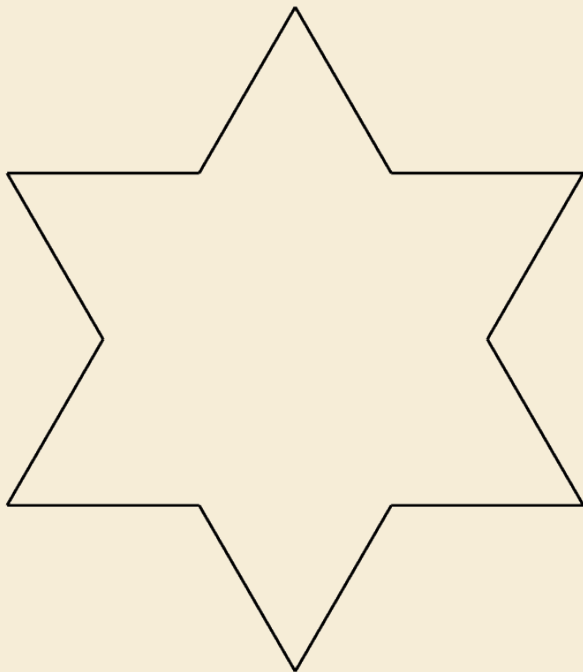
Il fiocco di neve

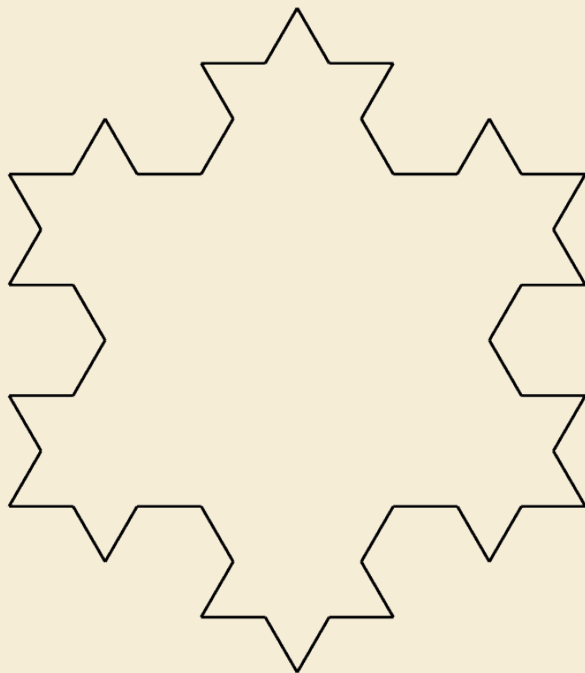
La curva di von Koch (o “fiocco di neve”) si costruisce in questo modo:

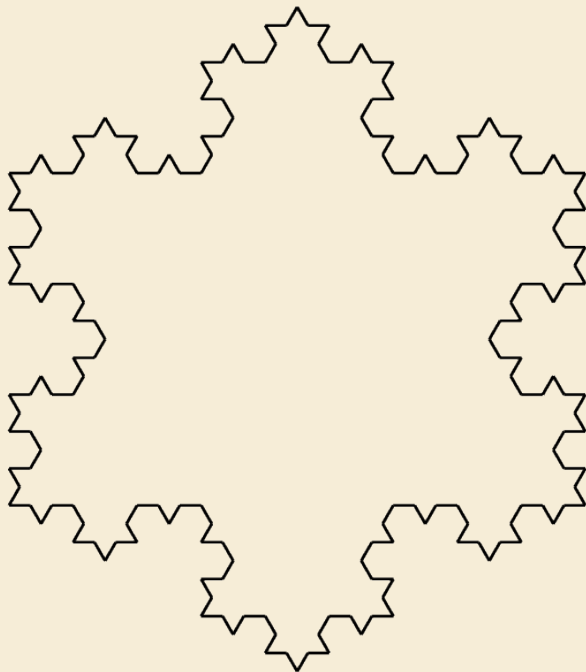
- si parte dal perimetro di un triangolo equilatero
- si divide ogni lato in tre parti uguali, cancellando quella centrale
- si sostituisce alla parte centrale una “punta” di un triangolo equilatero più piccolo
- si continua a ripetere il procedimento per ognuno dei segmenti rimasti.

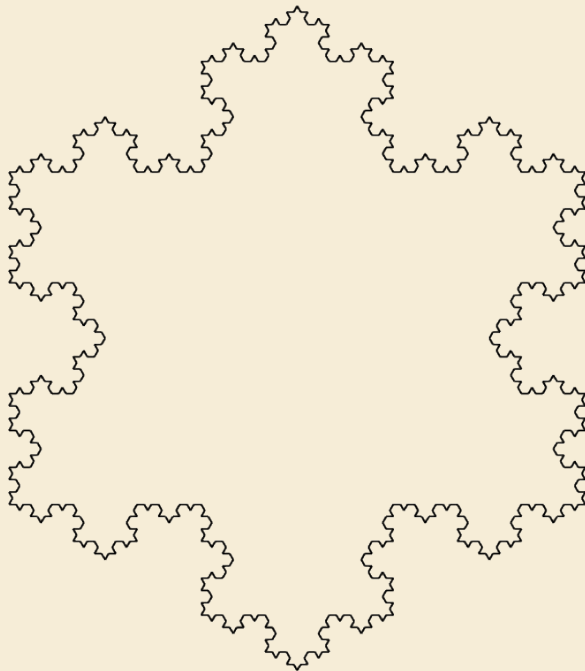
Il fiocco di neve è la curva “limite” di tale procedura, ovvero la curva ottenuta ripetendo la costruzione infinite volte.

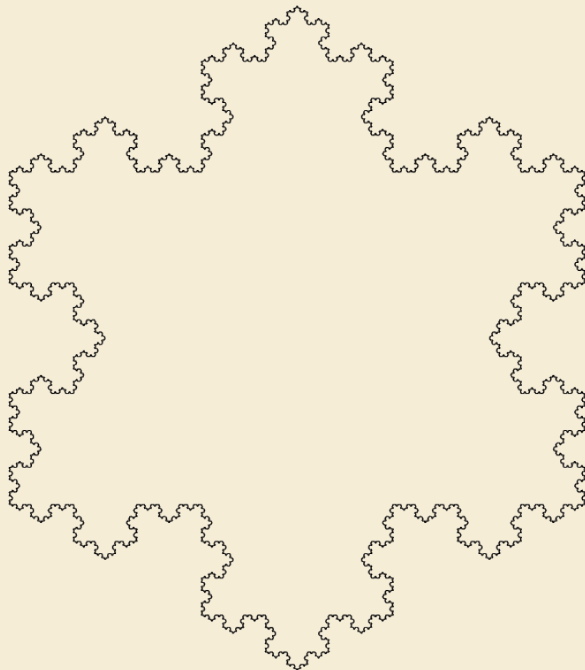












Lunghezza del fiocco di neve

Vediamo ora alcune proprietà di questa curva.

Lunghezza del fiocco di neve

Vediamo ora alcune proprietà di questa curva.

La lunghezza della curva di von Koch è infinita.

Lunghezza del fiocco di neve

Vediamo ora alcune proprietà di questa curva.

La lunghezza della curva di von Koch è infinita.

Ovvero il fiocco di neve è infinitamente pieno di anfratti, rientranze, protuberanze.

Lunghezza del fiocco di neve

Vediamo ora alcune proprietà di questa curva.

La lunghezza della curva di von Koch è infinita.

Ovvero il fiocco di neve è infinitamente pieno di anfratti, rientranze, protuberanze.

Ma come fare, in termini matematici, a dimostrare che la lunghezza della curva è infinita?

Lunghezza del fiocco di neve

Vediamo ora alcune proprietà di questa curva.

La lunghezza della curva di von Koch è infinita.

Ovvero il fiocco di neve è infinitamente pieno di anfratti, rientranze, protuberanze.

Ma come fare, in termini matematici, a dimostrare che la lunghezza della curva è infinita?

Notiamo che ad ogni passo della costruzione della curva per ogni lato togliamo un terzo della sua lunghezza e ne aggiungiamo due terzi. Quindi in tutto la curva cresce di un terzo della sua lunghezza ad ogni passo.

Lunghezza del fiocco di neve

Vediamo ora alcune proprietà di questa curva.

La lunghezza della curva di von Koch è infinita.

Ovvero il fiocco di neve è infinitamente pieno di anfratti, rientranze, protuberanze.

Ma come fare, in termini matematici, a dimostrare che la lunghezza della curva è infinita?

Notiamo che ad ogni passo della costruzione della curva per ogni lato togliamo un terzo della sua lunghezza e ne aggiungiamo due terzi. Quindi in tutto la curva cresce di un terzo della sua lunghezza ad ogni passo. Si può quindi dire che al passo $n + 1$ la curva è lunga $\frac{4}{3}$ di quanto era lunga al passo n .

Lunghezza del fiocco di neve

Denotando con P_n la lunghezza della curva al passo n della costruzione, e con P_0 il perimetro del triangolo equilatero iniziale, si ha

$$P_n = \frac{4}{3}P_{n-1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}P_{n-2} = \cdots = \left(\frac{4}{3}\right)^n P_0.$$

Lunghezza del fiocco di neve

Denotando con P_n la lunghezza della curva al passo n della costruzione, e con P_0 il perimetro del triangolo equilatero iniziale, si ha

$$P_n = \frac{4}{3}P_{n-1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}P_{n-2} = \cdots = \left(\frac{4}{3}\right)^n P_0.$$

Perciò per avere la lunghezza totale basta calcolare un semplice limite:

$$\text{lunghezza} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n P_0 = \infty,$$

che evidentemente risulta infinito.

Area racchiusa dalla curva di von Koch

Un'altra proprietà importante è la seguente:

L'area racchiusa dalla curva è finita.

Area racchiusa dalla curva di von Koch

Un'altra proprietà importante è la seguente:

L'area racchiusa dalla curva è finita.

Questo fatto, piuttosto evidente (visto che l'abbiamo disegnata, anche se in modo approssimato), rende la curva molto speciale: essa è *una curva infinita che racchiude un'area finita*.

Area racchiusa dalla curva di von Koch

Un'altra proprietà importante è la seguente:

L'area racchiusa dalla curva è finita.

Questo fatto, piuttosto evidente (visto che l'abbiamo disegnata, anche se in modo approssimato), rende la curva molto speciale: essa è *una curva infinita che racchiude un'area finita*.

Per poter calcolare la misura di tale area, dobbiamo prima ricordare che cosa sono le *serie geometriche*.

Approfondimento: la serie geometrica

Brevemente, ricordiamo che una **serie geometrica di ragione q** è la somma di tutte le infinite potenze q^k , per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Approfondimento: la serie geometrica

Brevemente, ricordiamo che una **serie geometrica di ragione q** è la somma di tutte le infinite potenze q^k , per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Scriveremo

$$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Approfondimento: la serie geometrica

Brevemente, ricordiamo che una **serie geometrica di ragione** q è la somma di tutte le infinite potenze q^k , per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Scriveremo

$$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Anche se sommiamo un numero infinito di termini, è ben noto che una somma infinita può dare un risultato finito.

Approfondimento: la serie geometrica

Brevemente, ricordiamo che una **serie geometrica di ragione q** è la somma di tutte le infinite potenze q^k , per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Scriveremo

$$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Anche se sommiamo un numero infinito di termini, è ben noto che una somma infinita può dare un risultato finito.

Abbiamo già dimostrato altrove che, per una serie geometrica, se $|q| < 1$ la somma della serie ha un valore finito e vale

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

Approfondimento: la serie geometrica

Brevemente, ricordiamo che una **serie geometrica di ragione q** è la somma di tutte le infinite potenze q^k , per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Scriveremo

$$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Anche se sommiamo un numero infinito di termini, è ben noto che una somma infinita può dare un risultato finito.

Abbiamo già dimostrato altrove che, per una serie geometrica, se $|q| < 1$ la somma della serie ha un valore finito e vale

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

Al contrario, se $|q| \geq 1$ la somma della serie dà infinito, ovvero la serie *diverge*.

Il calcolo della misura dell'area

La misura dell'area è calcolabile come somma di una serie geometrica.

Il calcolo della misura dell'area

La misura dell'area è calcolabile come somma di una serie geometrica. Prima calcoliamo il numero L_n dei lati del poligono che si ottiene ad ogni passo della costruzione: all'inizio (passo 0) i lati sono 3, quindi $L_0 = 3$.

Il calcolo della misura dell'area

La misura dell'area è calcolabile come somma di una serie geometrica. Prima calcoliamo il numero L_n dei lati del poligono che si ottiene ad ogni passo della costruzione: all'inizio (passo 0) i lati sono 3, quindi $L_0 = 3$. Poi, ad ogni passo al posto di un lato ne nascono quattro, quindi il numero dei lati quadruplica ogni volta.

Il calcolo della misura dell'area

La misura dell'area è calcolabile come somma di una serie geometrica. Prima calcoliamo il numero L_n dei lati del poligono che si ottiene ad ogni passo della costruzione: all'inizio (passo 0) i lati sono 3, quindi $L_0 = 3$. Poi, ad ogni passo al posto di un lato ne nascono quattro, quindi il numero dei lati quadruplica ogni volta.

Si ha allora

$$L_1 = 4 \cdot 3, \quad L_2 = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3, \quad \dots, \quad \boxed{L_n = 4^n \cdot 3.}$$

Il calcolo della misura dell'area

La misura dell'area è calcolabile come somma di una serie geometrica. Prima calcoliamo il numero L_n dei lati del poligono che si ottiene ad ogni passo della costruzione: all'inizio (passo 0) i lati sono 3, quindi $L_0 = 3$. Poi, ad ogni passo al posto di un lato ne nascono quattro, quindi il numero dei lati quadruplica ogni volta. Si ha allora

$$L_1 = 4 \cdot 3, \quad L_2 = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3, \quad \dots, \quad \boxed{L_n = 4^n \cdot 3.}$$

Per quanto riguarda le aree, basta considerare che su ogni lato si aggiunge un triangolino che ha area $\frac{1}{9}$ del triangolo precedente, visto che la sua base è grande $\frac{1}{3}$ della precedente.

Il calcolo della misura dell'area

La misura dell'area è calcolabile come somma di una serie geometrica. Prima calcoliamo il numero L_n dei lati del poligono che si ottiene ad ogni passo della costruzione: all'inizio (passo 0) i lati sono 3, quindi $L_0 = 3$. Poi, ad ogni passo al posto di un lato ne nascono quattro, quindi il numero dei lati quadruplica ogni volta. Si ha allora

$$L_1 = 4 \cdot 3, \quad L_2 = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3, \quad \dots, \quad \boxed{L_n = 4^n \cdot 3.}$$

Per quanto riguarda le aree, basta considerare che su ogni lato si aggiunge un triangolino che ha area $\frac{1}{9}$ del triangolo precedente, visto che la sua base è grande $\frac{1}{3}$ della precedente.

Indicando con A_0 la misura dell'area iniziale e con A_n la misura dell'area *aggiunta* al passo n , si ha

$$A_n = L_{n-1} \left(\frac{1}{9} \right)^n \cdot A_0 = 4^{n-1} \left(\frac{1}{9} \right)^n \cdot 3A_0.$$

Il calcolo della misura dell'area

Ora finalmente costruiamo la serie geometrica: l'area totale è la somma di tutte le aree aggiunte ad ogni passo, quindi

$$A_{\text{totale}} = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots =$$

Il calcolo della misura dell'area

Ora finalmente costruiamo la serie geometrica: l'area totale è la somma di tutte le aree aggiunte ad ogni passo, quindi

$$A_{\text{totale}} = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n =$$

Il calcolo della misura dell'area

Ora finalmente costruiamo la serie geometrica: l'area totale è la somma di tutte le aree aggiunte ad ogni passo, quindi

$$A_{\text{totale}} = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 3A_0.$$

Il calcolo della misura dell'area

Ora finalmente costruiamo la serie geometrica: l'area totale è la somma di tutte le aree aggiunte ad ogni passo, quindi

$$A_{\text{totale}} = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 3A_0.$$

Poiché $\left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 3 = \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}$, possiamo riscrivere la serie in questo modo:

Il calcolo della misura dell'area

Ora finalmente costruiamo la serie geometrica: l'area totale è la somma di tutte le aree aggiunte ad ogni passo, quindi

$$A_{\text{totale}} = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 3A_0.$$

Poiché $\left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 3 = \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}$, possiamo riscrivere la serie in questo modo:

$$A_{\text{totale}} = A_0 + \frac{A_0}{3} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = A_0 + \frac{A_0}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Il calcolo della misura dell'area

Ora finalmente costruiamo la serie geometrica: l'area totale è la somma di tutte le aree aggiunte ad ogni passo, quindi

$$A_{\text{totale}} = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 3A_0.$$

Poiché $\left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 3 = \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}$, possiamo riscrivere la serie in questo modo:

$$A_{\text{totale}} = A_0 + \frac{A_0}{3} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = A_0 + \frac{A_0}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Quindi abbiamo ottenuto una serie geometrica di ragione $q = \frac{4}{9}$, che dà un numero finito e vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}.$$

Il calcolo della misura dell'area

Ora finalmente costruiamo la serie geometrica: l'area totale è la somma di tutte le aree aggiunte ad ogni passo, quindi

$$A_{\text{totale}} = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 3A_0.$$

Poiché $\left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 3 = \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}$, possiamo riscrivere la serie in questo modo:

$$A_{\text{totale}} = A_0 + \frac{A_0}{3} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = A_0 + \frac{A_0}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Quindi abbiamo ottenuto una serie geometrica di ragione $q = \frac{4}{9}$, che dà un numero finito e vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}.$$

L'area totale vale

$$A_{\text{totale}} = A_0 + \frac{A_0}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = A_0 + \frac{A_0}{3} \cdot \frac{9}{5} = \boxed{\frac{8}{5}A_0}.$$

Il triangolo di Sierpiński

Un altro frattale molto famoso, costruito con una ripetizione infinita di passi, è il **triangolo di Sierpiński**.

Il triangolo di Sierpiński

Un altro frattale molto famoso, costruito con una ripetizione infinita di passi, è il **triangolo di Sierpiński**.

- Partiamo di nuovo da un triangolo equilatero, stavolta “pieno” (ma potremmo partire da un triangolo qualsiasi).

Il triangolo di Sierpiński

Un altro frattale molto famoso, costruito con una ripetizione infinita di passi, è il **triangolo di Sierpiński**.

- Partiamo di nuovo da un triangolo equilatero, stavolta “pieno” (ma potremmo partire da un triangolo qualsiasi).
- Suddividiamo il triangolo in quattro triangoli equilateri congruenti e rimuoviamo quello centrale (lasciandone i lati, rimuoviamo solo la parte interna).

Il triangolo di Sierpiński

Un altro frattale molto famoso, costruito con una ripetizione infinita di passi, è il **triangolo di Sierpiński**.

- Partiamo di nuovo da un triangolo equilatero, stavolta “pieno” (ma potremmo partire da un triangolo qualsiasi).
- Suddividiamo il triangolo in quattro triangoli equilateri congruenti e rimuoviamo quello centrale (lasciandone i lati, rimuoviamo solo la parte interna).
- Ripetiamo lo stesso procedimento su ognuno dei tre triangoli rimasti.

Il triangolo di Sierpiński

Un altro frattale molto famoso, costruito con una ripetizione infinita di passi, è il **triangolo di Sierpiński**.

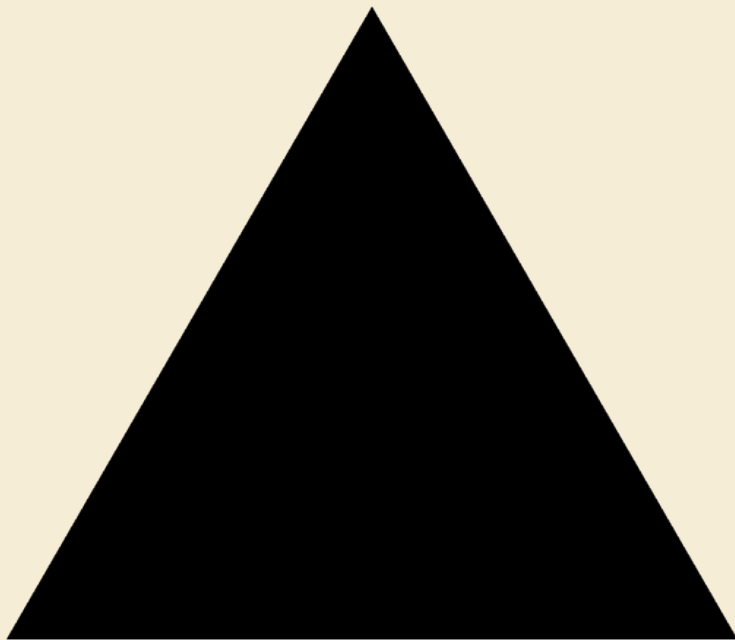
- Partiamo di nuovo da un triangolo equilatero, stavolta “pieno” (ma potremmo partire da un triangolo qualsiasi).
- Suddividiamo il triangolo in quattro triangoli equilateri congruenti e rimuoviamo quello centrale (lasciandone i lati, rimuoviamo solo la parte interna).
- Ripetiamo lo stesso procedimento su ognuno dei tre triangoli rimasti.
- Continuiamo a ripetere il procedimento all'infinito.

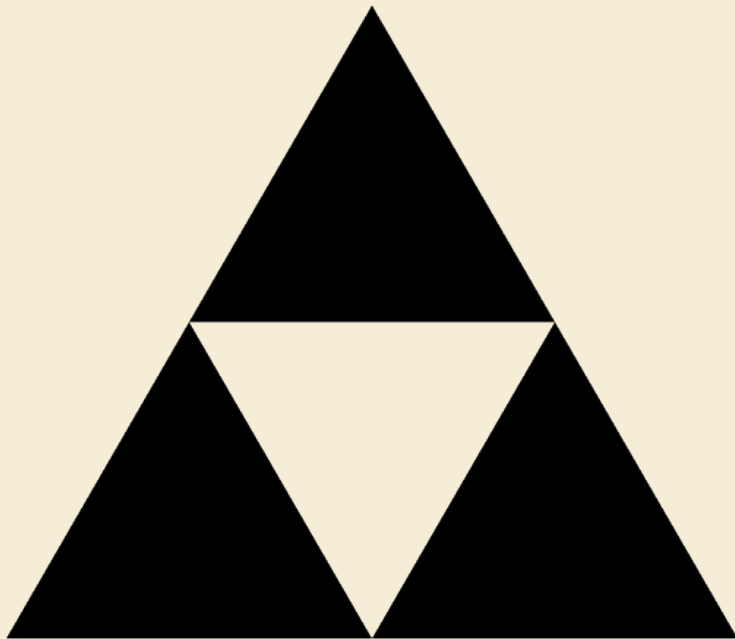
Il triangolo di Sierpiński

Un altro frattale molto famoso, costruito con una ripetizione infinita di passi, è il **triangolo di Sierpiński**.

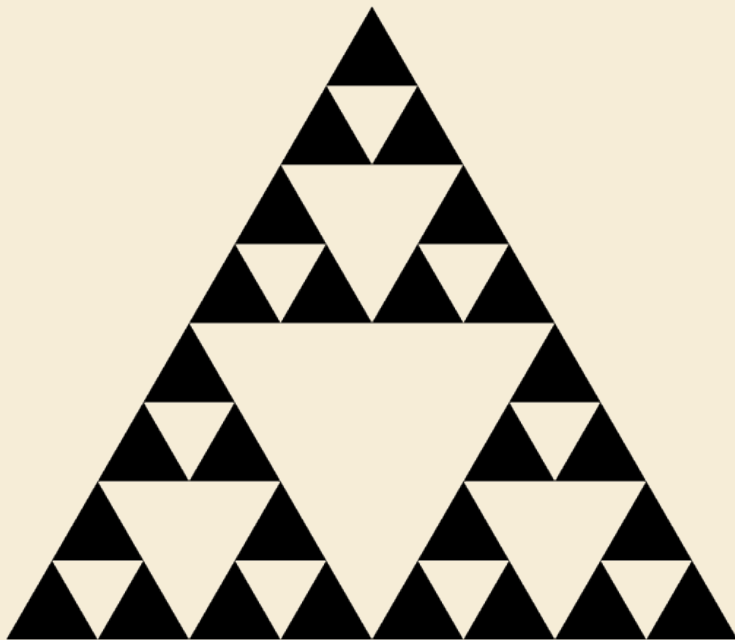
- Partiamo di nuovo da un triangolo equilatero, stavolta “pieno” (ma potremmo partire da un triangolo qualsiasi).
- Suddividiamo il triangolo in quattro triangoli equilateri congruenti e rimuoviamo quello centrale (lasciandone i lati, rimuoviamo solo la parte interna).
- Ripetiamo lo stesso procedimento su ognuno dei tre triangoli rimasti.
- Continuiamo a ripetere il procedimento all'infinito.

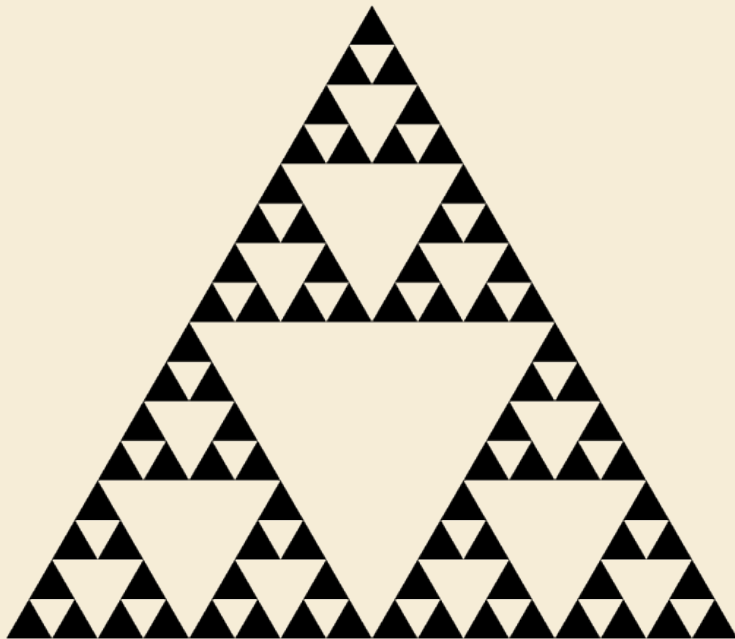
Otterremo una sorta di “polvere” disposta in modo piuttosto simmetrico e ripetitivo.

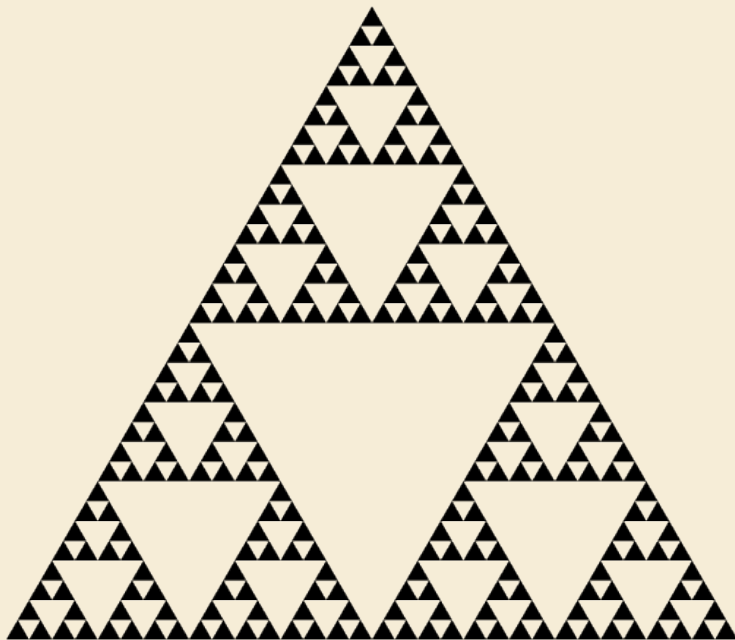


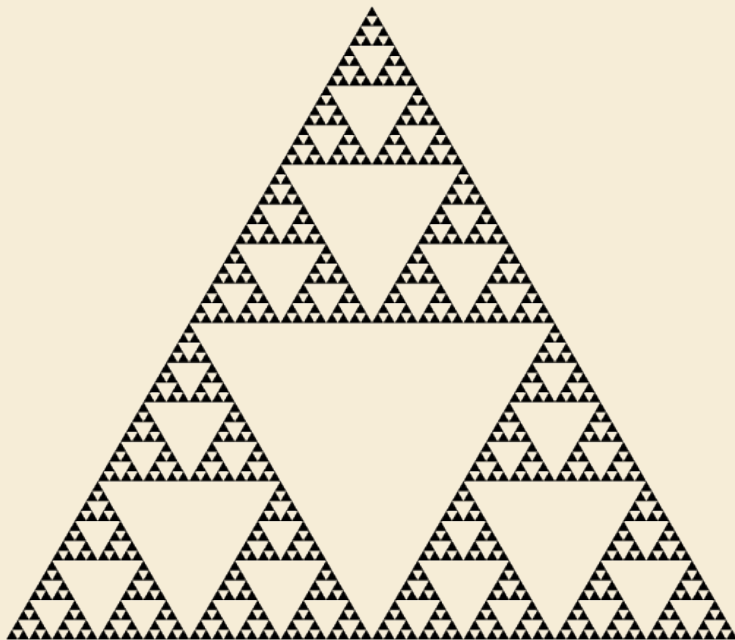


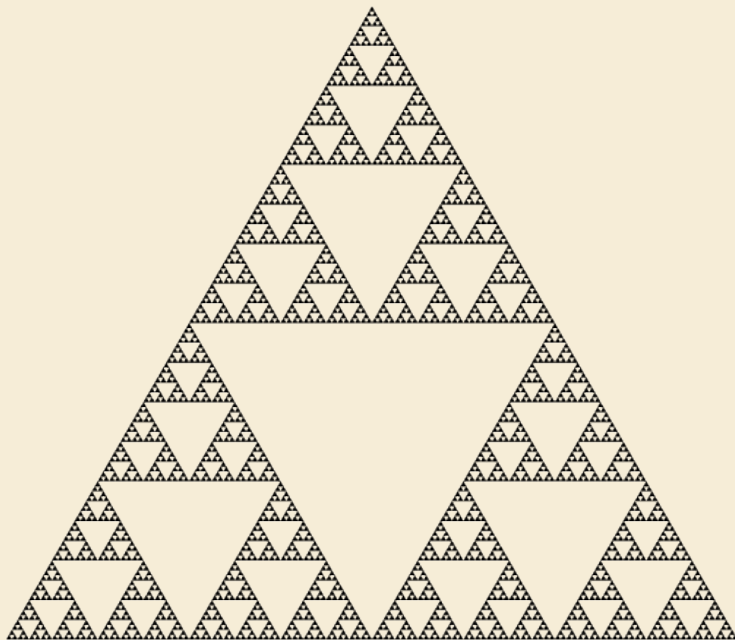












Proprietà del triangolo di Sierpiński

La misura dell'area del triangolo di Sierpiński è 0.

Proprietà del triangolo di Sierpiński

La misura dell'area del triangolo di Sierpiński è 0.

Infatti, ad ogni passo togliamo $\frac{1}{4}$ dell'area del passo precedente, quindi la misura dell'area della figura al passo n è $\frac{3}{4}$ della misura dell'area al passo $n - 1$.

Proprietà del triangolo di Sierpiński

La misura dell'area del triangolo di Sierpiński è 0.

Infatti, ad ogni passo togliamo $\frac{1}{4}$ dell'area del passo precedente, quindi la misura dell'area della figura al passo n è $\frac{3}{4}$ della misura dell'area al passo $n - 1$.

Denotando con A_n la misura dell'area al passo n , si ha

$$A_n = \frac{3}{4}A_{n-1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}A_{n-2} = \cdots = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0,$$

dove A_0 è la misura dell'area del triangolo iniziale.

Proprietà del triangolo di Sierpiński

La misura dell'area del triangolo di Sierpiński è 0.

Infatti, ad ogni passo togliamo $\frac{1}{4}$ dell'area del passo precedente, quindi la misura dell'area della figura al passo n è $\frac{3}{4}$ della misura dell'area al passo $n - 1$.

Denotando con A_n la misura dell'area al passo n , si ha

$$A_n = \frac{3}{4}A_{n-1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}A_{n-2} = \cdots = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0,$$

dove A_0 è la misura dell'area del triangolo iniziale.

È facile quindi vedere che A_n tende a 0 per $n \rightarrow \infty$.

Proprietà del triangolo di Sierpiński

La misura dell'area del triangolo di Sierpiński è 0.

Infatti, ad ogni passo togliamo $\frac{1}{4}$ dell'area del passo precedente, quindi la misura dell'area della figura al passo n è $\frac{3}{4}$ della misura dell'area al passo $n - 1$.

Denotando con A_n la misura dell'area al passo n , si ha

$$A_n = \frac{3}{4}A_{n-1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}A_{n-2} = \cdots = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0,$$

dove A_0 è la misura dell'area del triangolo iniziale.

È facile quindi vedere che A_n tende a 0 per $n \rightarrow \infty$.

Inoltre (ma questo è più difficile da dimostrare) il triangolo di Sierpiński è **connesso**, ovvero se prendo due punti qualsiasi della figura esiste una curva contenuta nella figura stessa che unisce i due punti.

Dimensione di una figura

Il triangolo di Sierpiński in un certo senso è più simile a una curva che a una “figura piena”. Ma che cosa significa essere una *curva*, cioè una figura che ha una sola dimensione, o essere una *figura bidimensionale*?

Dimensione di una figura

Il triangolo di Sierpiński in un certo senso è più simile a una curva che a una “figura piena”. Ma che cosa significa essere una *curva*, cioè una figura che ha una sola dimensione, o essere una *figura bidimensionale*?

Come si definisce la *dimensione* di una figura? È intuitivo affermare che un segmento ha dimensione 1, mentre un quadrato (pieno) ha dimensione 2 e un cubo (pieno) ha dimensione 3.

Dimensione di una figura

Il triangolo di Sierpiński in un certo senso è più simile a una curva che a una “figura piena”. Ma che cosa significa essere una *curva*, cioè una figura che ha una sola dimensione, o essere una *figura bidimensionale*?

Come si definisce la *dimensione* di una figura? È intuitivo affermare che un segmento ha dimensione 1, mentre un quadrato (pieno) ha dimensione 2 e un cubo (pieno) ha dimensione 3.

Ma qual è la dimensione del triangolo di Sierpiński, o della curva di von Koch? Stavolta l'intuizione non ci dà molti suggerimenti. . .

Dimensione di Hausdorff

L'idea della dimensione di Hausdorff è la seguente:

- un segmento ha dimensione 1 perché se lo rimpicciolisco di un fattore 2 mi servono 2 copie del segmento rimpicciolito per ritrovare quello di partenza:

$$2^1 = 2 \quad (\text{la dimensione è l'esponente})$$

Dimensione di Hausdorff

L'idea della dimensione di Hausdorff è la seguente:

- un segmento ha dimensione 1 perché se lo rimpicciolisco di un fattore 2 mi servono 2 copie del segmento rimpicciolito per ritrovare quello di partenza:

$$2^1 = 2 \quad (\text{la dimensione è l'esponente})$$

- un quadrato ha dimensione 2 perché se lo rimpicciolisco di un fattore 2 mi servono 4 copie del quadrato rimpicciolito per ritrovare quello di partenza:

$$2^2 = 4 \quad (\text{la dimensione è l'esponente})$$

Dimensione di Hausdorff

L'idea della dimensione di Hausdorff è la seguente:

- un segmento ha dimensione 1 perché se lo rimpicciolisco di un fattore 2 mi servono 2 copie del segmento rimpicciolito per ritrovare quello di partenza:

$$2^1 = 2 \quad (\text{la dimensione è l'esponente})$$

- un quadrato ha dimensione 2 perché se lo rimpicciolisco di un fattore 2 mi servono 4 copie del quadrato rimpicciolito per ritrovare quello di partenza:

$$2^2 = 4 \quad (\text{la dimensione è l'esponente})$$

- un cubo ha dimensione 3 perché se lo rimpicciolisco di un fattore 2 mi servono 8 copie del cubo rimpicciolito per ritrovare quello di partenza:

$$2^3 = 8 \quad (\text{la dimensione è l'esponente})$$

Dimensione di Hausdorff

Notiamo che gli esponenti del lucido precedente non dipendono dal fattore di riduzione: ad esempio, se avessi rimpicciolito un quadrato di un fattore 3, mi servirebbero 9 quadrati piccoli per riottenere quello di partenza, e si ha comunque

$$3^2 = 9$$

dove la dimensione 2 (ovvero l'esponente) non è cambiato.

Dimensione di Hausdorff

Notiamo che gli esponenti del lucido precedente non dipendono dal fattore di riduzione: ad esempio, se avessi rimpicciolito un quadrato di un fattore 3, mi servirebbero 9 quadrati piccoli per riottenere quello di partenza, e si ha comunque

$$3^2 = 9$$

dove la dimensione 2 (ovvero l'esponente) non è cambiato.

Denotando con R il fattore di riduzione e con N il numero di copie più piccole che servono per riottenere la figura di partenza, usando il linguaggio dei logaritmi possiamo definire la dimensione di Hausdorff di una figura come

$$d = \log_R N = \frac{\log N}{\log R}.$$

La dimensione del triangolo di Sierpiński

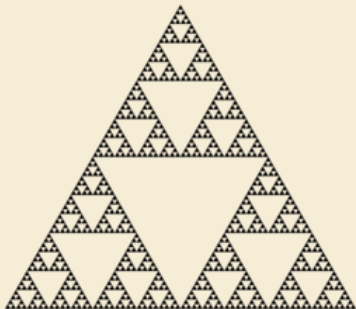
Ora possiamo applicare questa idea al triangolo di Sierpiński:

La dimensione del triangolo di Sierpiński

Ora possiamo applicare questa idea al triangolo di Sierpiński:
se rimpicciolisco il triangolo di Sierpiński di un fattore 2, quante copie
rimpicciolite mi servono per ritrovare la figura di partenza?

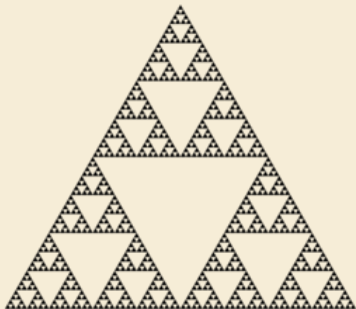
La dimensione del triangolo di Sierpiński

Ora possiamo applicare questa idea al triangolo di Sierpiński:
se rimpicciolisco il triangolo di Sierpiński di un fattore 2, quante copie
rimpicciolite mi servono per ritrovare la figura di partenza?



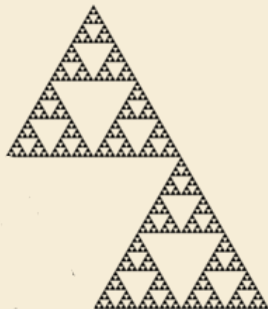
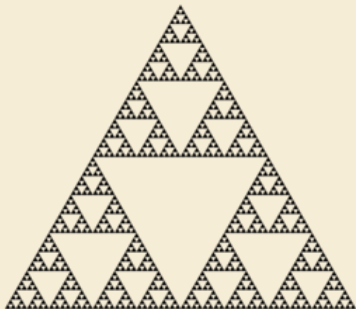
La dimensione del triangolo di Sierpiński

Ora possiamo applicare questa idea al triangolo di Sierpiński:
se rimpicciolisco il triangolo di Sierpiński di un fattore 2, quante copie
rimpicciolite mi servono per ritrovare la figura di partenza?



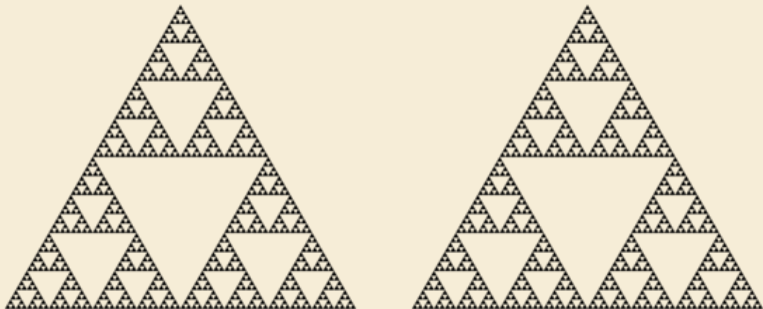
La dimensione del triangolo di Sierpiński

Ora possiamo applicare questa idea al triangolo di Sierpiński:
se rimpicciolisco il triangolo di Sierpiński di un fattore 2, quante copie
rimpicciolite mi servono per ritrovare la figura di partenza?



La dimensione del triangolo di Sierpiński

Ora possiamo applicare questa idea al triangolo di Sierpiński:
se rimpicciolisco il triangolo di Sierpiński di un fattore 2, quante copie rimpicciolite mi servono per ritrovare la figura di partenza?



Come si vede dal disegno, mi servono tre copie rimpicciolite.
Quindi la dimensione di Hausdorff del triangolo di Sierpiński è

$$d = \log_2 3 \simeq 1,585$$

Dimensione non intera

Il triangolo di Sierpiński ha una dimensione **non intera!**

Dimensione non intera

Il triangolo di Sierpiński ha una dimensione **non intera!**

Questo spiega perché, come già avevamo intuito, alcune sue proprietà ricordano una figura di superficie, ma altre ricordano una curva. In effetti, non è né una curva né una superficie, ma si trova in qualche modo in una situazione intermedia.

Dimensione non intera

Il triangolo di Sierpiński ha una dimensione **non intera!**

Questo spiega perché, come già avevamo intuito, alcune sue proprietà ricordano una figura di superficie, ma altre ricordano una curva. In effetti, non è né una curva né una superficie, ma si trova in qualche modo in una situazione intermedia.

Questa è una possibile definizione matematica di **frattale**.

Possibile definizione di frattale

Una figura si dice *frattale* se la sua dimensione di Hausdorff non è intera.

Dimensione non intera

Il triangolo di Sierpiński ha una dimensione **non intera!**

Questo spiega perché, come già avevamo intuito, alcune sue proprietà ricordano una figura di superficie, ma altre ricordano una curva. In effetti, non è né una curva né una superficie, ma si trova in qualche modo in una situazione intermedia.

Questa è una possibile definizione matematica di **frattale**.

Possibile definizione di frattale

Una figura si dice *frattale* se la sua dimensione di Hausdorff non è intera.

In realtà non tutti gli studiosi concordano su questa definizione: alcuni richiedono anche qualcosa di più, come la autosimilarità, che però è una nozione un po' più sfuggente e difficile da formalizzare.

La dimensione del fiocco di neve

Ora proviamo a calcolare la dimensione di Hausdorff della curva di von Koch.

La dimensione del fiocco di neve

Ora proviamo a calcolare la dimensione di Hausdorff della curva di von Koch.

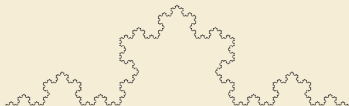
Intanto ci accorgiamo che conviene lavorare solo su un pezzo della curva, perché se teniamo tutta la curva completa non riusciamo a ricoprirla con copie più piccole.

La dimensione del fiocco di neve

Ora proviamo a calcolare la dimensione di Hausdorff della curva di von Koch.

Intanto ci accorgiamo che conviene lavorare solo su un pezzo della curva, perché se teniamo tutta la curva completa non riusciamo a ricoprirla con copie più piccole.

Quindi teniamo soltanto il pezzo superiore.



La dimensione del fiocco di neve

Ora proviamo a calcolare la dimensione di Hausdorff della curva di von Koch.

Intanto ci accorgiamo che conviene lavorare solo su un pezzo della curva, perché se teniamo tutta la curva completa non riusciamo a ricoprirla con copie più piccole.

Quindi teniamo soltanto il pezzo superiore.



Stavolta conviene rimpicciolire di un fattore 3.

La dimensione del fiocco di neve

Ora proviamo a calcolare la dimensione di Hausdorff della curva di von Koch.

Intanto ci accorgiamo che conviene lavorare solo su un pezzo della curva, perché se teniamo tutta la curva completa non riusciamo a ricoprirla con copie più piccole.

Quindi teniamo soltanto il pezzo superiore.



Stavolta conviene rimpicciolire di un fattore 3.

La dimensione del fiocco di neve

Ora proviamo a calcolare la dimensione di Hausdorff della curva di von Koch.

Intanto ci accorgiamo che conviene lavorare solo su un pezzo della curva, perché se teniamo tutta la curva completa non riusciamo a ricoprirla con copie più piccole.

Quindi teniamo soltanto il pezzo superiore.



Stavolta conviene rimpicciolire di un fattore 3.

La dimensione del fiocco di neve

Ora proviamo a calcolare la dimensione di Hausdorff della curva di von Koch.

Intanto ci accorgiamo che conviene lavorare solo su un pezzo della curva, perché se teniamo tutta la curva completa non riusciamo a ricoprirla con copie più piccole.

Quindi teniamo soltanto il pezzo superiore.



Stavolta conviene rimpicciolire di un fattore 3.

Vediamo che servono quattro copie rimpicciolite per riottenere il tratto di curva di partenza. Quindi la dimensione di Hausdorff della curva di von Koch è

$$d = \log_3 4 \simeq 1,262$$

Le dimensioni di altri frattali

Di nuovo abbiamo trovato una figura con una dimensione di Hausdorff non intera.

Le dimensioni di altri frattali

Di nuovo abbiamo trovato una figura con una dimensione di Hausdorff non intera.

La dimensione di Hausdorff, ovviamente, ci dice anche qualcosa di più: visto che la curva di von Koch ha una dimensione di Hausdorff più piccola di quella del triangolo di Sierpiński, possiamo supportare l'idea intuitiva che la curva di von Koch sia “più smilza” del triangolo di Sierpiński, o che quest'ultimo sia “più grasso” (perché si avvicina di più a una figura bidimensionale).

Le dimensioni di altri frattali

Di nuovo abbiamo trovato una figura con una dimensione di Hausdorff non intera.

La dimensione di Hausdorff, ovviamente, ci dice anche qualcosa di più: visto che la curva di von Koch ha una dimensione di Hausdorff più piccola di quella del triangolo di Sierpiński, possiamo supportare l'idea intuitiva che la curva di von Koch sia “più smilza” del triangolo di Sierpiński, o che quest'ultimo sia “più grasso” (perché si avvicina di più a una figura bidimensionale).

Naturalmente è possibile costruire semplici frattali autosimili che abbiano dimensioni più piccole di 1 (come l'*insieme di Cantor*) o più grandi di 2 (come la *spugna di Menger*).

Le dimensioni di altri frattali

Di nuovo abbiamo trovato una figura con una dimensione di Hausdorff non intera.

La dimensione di Hausdorff, ovviamente, ci dice anche qualcosa di più: visto che la curva di von Koch ha una dimensione di Hausdorff più piccola di quella del triangolo di Sierpiński, possiamo supportare l'idea intuitiva che la curva di von Koch sia “più smilza” del triangolo di Sierpiński, o che quest'ultimo sia “più grasso” (perché si avvicina di più a una figura bidimensionale).

Naturalmente è possibile costruire semplici frattali autosimili che abbiano dimensioni più piccole di 1 (come l'*insieme di Cantor*) o più grandi di 2 (come la *spugna di Menger*).

È addirittura possibile, almeno in modo statistico, calcolare la dimensione di Hausdorff di alcuni oggetti reali che hanno la struttura di un frattale, come l'insieme degli alveoli polmonari ($d \simeq 2,97$), o la costa della Gran Bretagna ($d \simeq 1,24$), o ancora un cavolfiore ($d \simeq 2,33$)!