Integrali impropri

Luca Lussardi

Università Cattolica del Sacro Cuore

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Cosa è un integrale improprio

Sappiamo che possiamo definire l'integrale di Riemann, nel caso in cui esista, per le funzioni limitate $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, essendo $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$.

Cosa è un integrale improprio

Sappiamo che possiamo definire l'integrale di Riemann, nel caso in cui esista, per le funzioni limitate $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, essendo $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$.
In questa lezione vogliamo estendere il concetto di integrabilità di Riemann per funzioni appartenenti ad una delle seguenti tipologie:

Cosa è un integrale improprio

Sappiamo che possiamo definire l'integrale di Riemann, nel caso in cui esista, per le funzioni limitate $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, essendo $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$.
In questa lezione vogliamo estendere il concetto di integrabilità di Riemann per funzioni appartenenti ad una delle seguenti tipologie:

- $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$;

Cosa è un integrale improprio

Sappiamo che possiamo definire l'integrale di Riemann, nel caso in cui esista, per le funzioni limitate $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, essendo $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$.
In questa lezione vogliamo estendere il concetto di integrabilità di Riemann per funzioni appartenenti ad una delle seguenti tipologie:

- $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$;
- $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c > a$.

Cosa è un integrale improprio

Sappiamo che possiamo definire l'integrale di Riemann, nel caso in cui esista, per le funzioni limitate $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, essendo $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$.
In questa lezione vogliamo estendere il concetto di integrabilità di Riemann per funzioni appartenenti ad una delle seguenti tipologie:

- $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$;
- $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c > a$.

In modo del tutto analogo si potrà quindi studiare l'integrabilità per le funzioni del tipo

- $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[c, b]$ con $c \in (a, b)$;
- $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[c, b]$ con $c < b$.

I casi $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ e $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$

Cominciamo col trattare il caso di una funzione $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a,c]$ con $c \in (a,b)$.

I casi $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ e $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$

Cominciamo col trattare il caso di una funzione $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a,c]$ con $c \in (a,b)$. Osserviamo prima di tutto che se avessimo una funzione $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile allora si avrebbe, per le note proprietà dell'integrale di Riemann,

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^c g(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx$$

per ogni $c \in (a,b)$.

Essendo poi g limitata per definizione si ha $|g(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, per una certa costante $M > 0$, da cui

$$0 \leq \left| \int_c^b g(x)\, dx \right| \leq \int_c^b |g(x)|\, dx \leq M \int_c^b dx = M|b - c|.$$

Essendo poi g limitata per definizione si ha $|g(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, per una certa costante $M > 0$, da cui

$$0 \leq \left| \int_c^b g(x)\, dx \right| \leq \int_c^b |g(x)|\, dx \leq M \int_c^b dx = M|b - c|.$$

Dunque, per il teorema del confronto,

$$\lim_{c \to b^-} \int_c^b g(x)\, dx = 0$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Essendo poi g limitata per definizione si ha $|g(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, per una certa costante $M > 0$, da cui

$$0 \leq \left| \int_c^b g(x)\, dx \right| \leq \int_c^b |g(x)|\, dx \leq M \int_c^b dx = M|b - c|.$$

Dunque, per il teorema del confronto,

$$\lim_{c \to b^-} \int_c^b g(x)\, dx = 0$$

e quindi passando al limite per $c \to b^-$ si ha trova

$$\int_a^b g(x)\, dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\, dx.$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

La formula

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\,dx,$$

valida per le funzioni integrabili $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, rappresenta il giusto modo per generalizzare l'integrale di Riemann:

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

La formula

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\,dx,$$

valida per le funzioni integrabili $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, rappresenta il giusto modo per generalizzare l'integrale di Riemann: infatti, ricordiamo che $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a,c]$ con $c \in (a,b)$, e dunque la quantità

$$\int_a^c f(x)\,dx$$

è ben definita ogni volta che $c \in (a,b)$.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Se quindi

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

esiste ed è finito allora poniamo, <u>per definizione</u>,

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

e diciamo che

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

è l'integrale improprio di f su $[a, b)$; si dice anche, in tal caso, che l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è convergente.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Se invece

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

esiste ma vale $+\infty$ o $-\infty$, diciamo allora che l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è positivamente divergente o negativamente divergente, rispettivamente.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Se invece

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

esiste ma vale $+\infty$ o $-\infty$, diciamo allora che l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è positivamente divergente o negativamente divergente, rispettivamente.
Se infine

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

non esiste, diciamo allora che l'integrale improprio di f su $[a, b)$ non esiste.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

In modo del tutto analogo, se $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[c,b]$ con $c \in (a,b)$ allora diciamo che l'integrale improprio di f su $(a,b]$ è convergente se

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

esiste ed è finito,

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

In modo del tutto analogo, se $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[c,b]$ con $c \in (a,b)$ allora diciamo che l'integrale improprio di f su $(a,b]$ è convergente se

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

esiste ed è finito, diciamo che l'integrale improprio di f su $(a,b]$ è positivamente divergente o negativamente divergente se

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

esiste e vale $+\infty$ o $-\infty$ rispettivamente,

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

In modo del tutto analogo, se $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[c,b]$ con $c \in (a,b)$ allora diciamo che l'integrale improprio di f su $(a,b]$ è convergente se

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

esiste ed è finito, diciamo che l'integrale improprio di f su $(a,b]$ è positivamente divergente o negativamente divergente se

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

esiste e vale $+\infty$ o $-\infty$ rispettivamente, e infine diciamo che l'integrale improprio di f su $(a,b]$ non esiste se

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

non esiste.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Un esempio notevole

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Un esempio notevole

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Intanto f è integrabile, in quanto continua, su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[c,1]$, per ogni $c \in (0,1)$.

Si ha ora

$$\int_c^1 f(x)\,dx$$

Si ha ora

$$\int_c^1 f(x)\,dx = \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Si ha ora

$$\int_c^1 f(x)\,dx = \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \log x\Big|_c^1 & \alpha = 1 \\ \\ \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_c^1 & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Si ha ora

$$\int_c^1 f(x)\,dx = \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \log x\Big|_c^1 & \alpha = 1 \\ \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_c^1 & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\log c & \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} - \dfrac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ne segue facilmente che

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 f(x)\, dx$$

Ne segue facilmente che

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 f(x)\, dx = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha > 1. \end{cases}$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ne segue facilmente che

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 f(x)\, dx = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha > 1. \end{cases}$$

Quindi l'integrale improprio di f su $(0, 1]$ è convergente se e solo se $\alpha < 1$,

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ne segue facilmente che

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 f(x)\, dx = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha > 1. \end{cases}$$

Quindi l'integrale improprio di f su $(0, 1]$ è convergente se e solo se $\alpha < 1$, mentre è positivamente divergente in tutti gli altri casi.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

I casi $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$

Consideriamo adesso una funzione $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c > a$.

I casi $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$

Consideriamo adesso una funzione $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c > a$. In analogia perfetta con quanto fatto per le funzioni $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ possiamo considerare

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx$$

essendo la quantità

$$\int_a^c f(x)\, dx$$

ben definita per ipotesi.

Diciamo che l'integrale improprio di f su $[a, +\infty)$ è convergente se

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx$$

esiste ed è finito,

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Diciamo che l'integrale improprio di f su $[a, +\infty)$ è convergente se

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx$$

esiste ed è finito, diciamo che l'integrale improprio di f su $[a, +\infty)$ è positivamente divergente o negativamente divergente se

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx$$

esiste e vale $+\infty$ o $-\infty$ rispettivamente,

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Diciamo che l'integrale improprio di f su $[a, +\infty)$ è convergente se

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx$$

esiste ed è finito, diciamo che l'integrale improprio di f su $[a, +\infty)$ è positivamente divergente o negativamente divergente se

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx$$

esiste e vale $+\infty$ o $-\infty$ rispettivamente, e infine diciamo che l'integrale improprio di f su $[a, +\infty)$ non esiste se

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx.$$

non esiste.

Del tutto analogamente, se $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[c, b]$ con $c < b$,

Del tutto analogamente, se $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[c, b]$ con $c < b$, diciamo che l'integrale improprio di f su $(-\infty, b]$ è convergente se

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\, dx$$

esiste ed è finito,

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Del tutto analogamente, se $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[c, b]$ con $c < b$, diciamo che l'integrale improprio di f su $(-\infty, b]$ è convergente se

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\, dx$$

esiste ed è finito, diciamo che l'integrale improprio di f su $(-\infty, b]$ è positivamente divergente o negativamente divergente se

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\, dx$$

esiste e vale $+\infty$ o $-\infty$ rispettivamente,

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Del tutto analogamente, se $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[c, b]$ con $c < b$, diciamo che l'integrale improprio di f su $(-\infty, b]$ è convergente se

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\, dx$$

esiste ed è finito, diciamo che l'integrale improprio di f su $(-\infty, b]$ è positivamente divergente o negativamente divergente se

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\, dx$$

esiste e vale $+\infty$ o $-\infty$ rispettivamente, e infine diciamo che l'integrale improprio di f su $(-\infty, b]$ non esiste se

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\, dx.$$

non esiste.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ancora un esempio notevole

Riprendiamo la funzione dell'esempio trattato in precedenza, ma definiamola stavolta su $[1, +\infty)$, ovvero sia $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ancora un esempio notevole

Riprendiamo la funzione dell'esempio trattato in precedenza, ma definiamola stavolta su $[1, +\infty)$, ovvero sia $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Intanto f è integrabile, in quanto continua, su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[1, c]$ per ogni $c > 1$.

Si ha ora

$$\int_1^c f(x)\,dx$$

Si ha ora

$$\int_1^c f(x)\,dx = \int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Si ha ora

$$\int_1^c f(x)\,dx = \int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \log x\Big|_1^c & \alpha = 1 \\ \\ \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^c & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Si ha ora

$$\int_1^c f(x)\,dx = \int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \log x\Big|_1^c & \alpha = 1 \\ \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^c & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \log c & \alpha = 1 \\ \dfrac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ne segue che

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c f(x)\, dx$$

Ne segue che

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c f(x)\, dx = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1. \end{cases}$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Ne segue che

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c f(x)\, dx = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1. \end{cases}$$

Quindi l'integrale improprio di f su $[1, +\infty)$ è convergente se e solo se $\alpha > 1$,

Ne segue che

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c f(x)\, dx = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1. \end{cases}$$

Quindi l'integrale improprio di f su $[1, +\infty)$ è convergente se e solo se $\alpha > 1$, mentre è positivamente divergente in tutti gli altri casi.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Un passo in più: i criteri di convergenza

Molto spesso, come è ben noto, è molto difficile, se non impossibile, calcolare esattamente il valore di un integrale.

Un passo in più: i criteri di convergenza

Molto spesso, come è ben noto, è molto difficile, se non impossibile, calcolare esattamente il valore di un integrale.
Ci si chiede se esistano metodi, però, che consentano di dire quando un integrale improprio è convergente, che rappresenta il caso più interessante per certi versi, senza necessariamente calcolarlo esattamente.

Un passo in più: i criteri di convergenza

Molto spesso, come è ben noto, è molto difficile, se non impossibile, calcolare esattamente il valore di un integrale.
Ci si chiede se esistano metodi, però, che consentano di dire quando un integrale improprio è convergente, che rappresenta il caso più interessante per certi versi, senza necessariamente calcolarlo esattamente.
Una possibile classe di questi metodi è data dai criteri di confronto, che ora illustriamo.

Supponiamo di avere due funzioni $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$.

Supponiamo di avere due funzioni $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$.
Supponiamo altresì che si abbia

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b).$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Supponiamo di avere due funzioni $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$.
Supponiamo altresì che si abbia

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b).$$

Sia $c \in (a, b)$. Allora si ha

$$\int_a^c f(x)\, dx \leq \int_a^c g(x)\, dx.$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Notiamo ora che, essendo $f \geq 0$, la funzione

$$h(c) := \int_a^c f(x)\,dx, \quad c \in (a, b)$$

è monotona crescente.

Notiamo ora che, essendo $f \geq 0$, la funzione

$$h(c) := \int_a^c f(x)\,dx, \quad c \in (a, b)$$

è monotona crescente.
Ne segue che

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} h(c)$$

esiste, eventualmente $+\infty$.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Notiamo ora che, essendo $f \geq 0$, la funzione

$$h(c) := \int_a^c f(x)\,dx, \quad c \in (a, b)$$

è monotona crescente.
Ne segue che

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} h(c)$$

esiste, eventualmente $+\infty$.
Lo stesso discorso vale per la funzione g,

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Notiamo ora che, essendo $f \geq 0$, la funzione

$$h(c) := \int_a^c f(x)\,dx, \quad c \in (a, b)$$

è monotona crescente.
Ne segue che

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} h(c)$$

esiste, eventualmente $+\infty$.
Lo stesso discorso vale per la funzione g, e dunque

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\,dx$$

esiste, eventualmente $+\infty$.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Abbiamo quindi dimostrato il seguente fatto: se l'integrale improprio di g su $[a, b)$ è convergente allora anche l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è convergente.

Abbiamo quindi dimostrato il seguente fatto: se l'integrale improprio di g su $[a, b)$ è convergente allora anche l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è convergente. Infatti, da $0 \leq f(x) \leq g(x)$ si ha

$$0 \leq \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx \leq \lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\, dx$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Abbiamo quindi dimostrato il seguente fatto: se l'integrale improprio di g su $[a, b)$ è convergente allora anche l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è convergente. Infatti, da $0 \leq f(x) \leq g(x)$ si ha

$$0 \leq \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx \leq \lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\, dx$$

da cui segue che se

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\, dx$$

è finito allora anche

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

è finito.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Osserviamo che lo stesso criterio di confronto dice anche che se l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è positivamente divergente allora anche l'integrale improprio di g su $[a, b)$ è positivamente divergente. Infatti, sempre da

$$0 \leq \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx \leq \lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\, dx$$

Osserviamo che lo stesso criterio di confronto dice anche che se l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è positivamente divergente allora anche l'integrale improprio di g su $[a, b)$ è positivamente divergente. Infatti, sempre da

$$0 \leq \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx \leq \lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\, dx$$

segue che se

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx = +\infty$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Osserviamo che lo stesso criterio di confronto dice anche che se l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è positivamente divergente allora anche l'integrale improprio di g su $[a, b)$ è positivamente divergente. Infatti, sempre da

$$0 \leq \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx \leq \lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\, dx$$

segue che se

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx = +\infty$$

allora anche

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\, dx = +\infty.$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Osserviamo che lo stesso criterio di confronto dice anche che se l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è positivamente divergente allora anche l'integrale improprio di g su $[a, b)$ è positivamente divergente. Infatti, sempre da

$$0 \leq \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx \leq \lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\, dx$$

segue che se

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx = +\infty$$

allora anche

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c g(x)\, dx = +\infty.$$

Va da sé che tutto quello detto vale anche in tutti gli altri casi di integrali improprio.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Esempi

Consideriamo la funzione $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2 + 3}.$$

Esempi

Consideriamo la funzione $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2 + 3}.$$

Ci chiediamo se l'integrale improprio di f su $[1, +\infty)$ sia convergente o positivamente divergente.

Esempi

Consideriamo la funzione $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2 + 3}.$$

Ci chiediamo se l'integrale improprio di f su $[1, +\infty)$ sia convergente o positivamente divergente.
Osserviamo che, essendo $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $x^2 + 3 \geq x^2$ si ha

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \geq 1.$$

Esempi

Consideriamo la funzione $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2+3}.$$

Ci chiediamo se l'integrale improprio di f su $[1,+\infty)$ sia convergente o positivamente divergente.
Osserviamo che, essendo $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $x^2+3 \geq x^2$ si ha

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \geq 1.$$

Sappiamo che l'integrale improprio di $g(x) := \frac{1}{x^2}$ su $[1,+\infty)$ è convergente,

Esempi

Consideriamo la funzione $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2+3}.$$

Ci chiediamo se l'integrale improprio di f su $[1,+\infty)$ sia convergente o positivamente divergente.
Osserviamo che, essendo $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $x^2+3 \geq x^2$ si ha

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \geq 1.$$

Sappiamo che l'integrale improprio di $g(x) := \frac{1}{x^2}$ su $[1,+\infty)$ è convergente, e dunque, per il criterio del confronto, anche l'integrale improprio di f su $[1,+\infty)$ è convergente.

Consideriamo invece ora la funzione $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x + 2}{x}.$$

Consideriamo invece ora la funzione $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x + 2}{x}.$$

Ci chiediamo anche in questo caso se l'integrale improprio di f su $(0,1]$ sia convergente o positivamente divergente.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Consideriamo invece ora la funzione $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x + 2}{x}.$$

Ci chiediamo anche in questo caso se l'integrale improprio di f su $(0,1]$ sia convergente o positivamente divergente.
Osserviamo che, essendo $\operatorname{arctg} x \geq -\frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\operatorname{arctg} x + 2 \geq -\frac{\pi}{2} + 2 = \frac{4-\pi}{2} > 0$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Consideriamo invece ora la funzione $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x + 2}{x}.$$

Ci chiediamo anche in questo caso se l'integrale improprio di f su $(0,1]$ sia convergente o positivamente divergente.
Osserviamo che, essendo $\operatorname{arctg} x \geq -\frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\operatorname{arctg} x + 2 \geq -\frac{\pi}{2} + 2 = \frac{4-\pi}{2} > 0$$

da cui

$$0 \leq \frac{4-\pi}{2x} \leq f(x), \quad \forall x \in (0,1].$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Consideriamo invece ora la funzione $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x + 2}{x}.$$

Ci chiediamo anche in questo caso se l'integrale improprio di f su $(0,1]$ sia convergente o positivamente divergente.
Osserviamo che, essendo $\operatorname{arctg} x \geq -\frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\operatorname{arctg} x + 2 \geq -\frac{\pi}{2} + 2 = \frac{4-\pi}{2} > 0$$

da cui

$$0 \leq \frac{4-\pi}{2x} \leq f(x), \quad \forall x \in (0,1].$$

Essendo che l'integrale improprio di $g(x) := \frac{4-\pi}{2x}$ su $(0,1]$ è positivamente divergente,

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Consideriamo invece ora la funzione $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x + 2}{x}.$$

Ci chiediamo anche in questo caso se l'integrale improprio di f su $(0,1]$ sia convergente o positivamente divergente.
Osserviamo che, essendo $\operatorname{arctg} x \geq -\frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\operatorname{arctg} x + 2 \geq -\frac{\pi}{2} + 2 = \frac{4-\pi}{2} > 0$$

da cui

$$0 \leq \frac{4-\pi}{2x} \leq f(x), \quad \forall x \in (0,1].$$

Essendo che l'integrale improprio di $g(x) := \frac{4-\pi}{2x}$ su $(0,1]$ è positivamente divergente, si ha anche che l'integrale improprio di f su $(0,1]$ è positivamente divergente.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Un criterio più complicato: il confronto asintotico

Presentiamo infine un criterio di convergenza più complicato, ma molto utile in tante occasioni.

Un criterio più complicato: il confronto asintotico

Presentiamo infine un criterio di convergenza più complicato, ma molto utile in tante occasioni.
Supponiamo di avere una funzione $f : [a, b)$ per la quale non sappiamo determinare l'esatto valore dell'integrale improprio su $[a, b)$, ma di volere determinare almeno se l'integrale improprio è o meno convergente.

Un criterio più complicato: il confronto asintotico

Presentiamo infine un criterio di convergenza più complicato, ma molto utile in tante occasioni.
Supponiamo di avere una funzione $f : [a, b)$ per la quale non sappiamo determinare l'esatto valore dell'integrale improprio su $[a, b)$, ma di volere determinare almeno se l'integrale improprio è o meno convergente.
Il criterio del confronto asintotico permette di cambiare funzione semplificando il problema, a patto che la nuova funzione sia "molto simile" alla funzione f almeno attorno a $x = b$, che è l'unico punto problematico.

Più precisamente, siano $f, g\colon [a, b)$ due funzioni integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$.

Più precisamente, siano $f, g\colon [a, b)$ due funzioni integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$.
Supponiamo che $f \geq 0$, $g > 0$

Più precisamente, siano $f, g\colon [a, b)$ due funzioni integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$. Supponiamo che $f \geq 0$, $g > 0$ e che

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0.$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Più precisamente, siano $f, g\colon [a, b)$ due funzioni integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$. Supponiamo che $f \geq 0$, $g > 0$ e che

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0.$$

Scriviamo ora cosa ci sta dicendo la condizione precedente usando la definizione di limite:

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Più precisamente, siano $f, g\colon [a, b)$ due funzioni integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$. Supponiamo che $f \geq 0$, $g > 0$ e che

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0.$$

Scriviamo ora cosa ci sta dicendo la condizione precedente usando la definizione di limite: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (b - \delta, b) \cap [a, b)$ si ha

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| < \varepsilon$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Più precisamente, siano $f, g\colon [a, b)$ due funzioni integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$. Supponiamo che $f \geq 0$, $g > 0$ e che

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0.$$

Scriviamo ora cosa ci sta dicendo la condizione precedente usando la definizione di limite: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (b - \delta, b) \cap [a, b)$ si ha

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| < \varepsilon$$

che vuol anche dire, a conti fatti,

$$(c - \varepsilon)g(x) < f(x) < (c + \varepsilon)g(x), \quad \forall x \in (b - \delta, b) \cap [a, b).$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Possiamo ovviamente supporre che $b - \delta > a$

Possiamo ovviamente supporre che $b - \delta > a$ e dunque vale

$$(c - \varepsilon)g(x) < f(x) < (c + \varepsilon)g(x), \quad \forall x \in [b - \delta, b).$$

Possiamo ovviamente supporre che $b - \delta > a$ e dunque vale

$$(c - \varepsilon)g(x) < f(x) < (c + \varepsilon)g(x), \quad \forall x \in [b - \delta, b).$$

Potendo scegliere $\varepsilon < c$ abbiamo quindi due disuguaglianze, entrambe valide su $[b - \delta, b)$:

$$0 \leq f(x) < (c + \varepsilon)g(x) \quad \text{e} \quad 0 \leq (c - \varepsilon)g(x) < f(x).$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Possiamo ovviamente supporre che $b - \delta > a$ e dunque vale

$$(c - \varepsilon)g(x) < f(x) < (c + \varepsilon)g(x), \quad \forall x \in [b - \delta, b).$$

Potendo scegliere $\varepsilon < c$ abbiamo quindi due disuguaglianze, entrambe valide su $[b - \delta, b)$:

$$0 \leq f(x) < (c + \varepsilon)g(x) \quad \text{e} \quad 0 \leq (c - \varepsilon)g(x) < f(x).$$

Applichiamo quindi il criterio del confronto:

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Possiamo ovviamente supporre che $b - \delta > a$ e dunque vale

$$(c - \varepsilon)g(x) < f(x) < (c + \varepsilon)g(x), \quad \forall x \in [b - \delta, b).$$

Potendo scegliere $\varepsilon < c$ abbiamo quindi due disuguaglianze, entrambe valide su $[b - \delta, b)$:

$$0 \leq f(x) < (c + \varepsilon)g(x) \quad \text{e} \quad 0 \leq (c - \varepsilon)g(x) < f(x).$$

Applichiamo quindi il criterio del confronto: la disuguaglianza di sinistra dice che se l'integrale improprio di g su $[b - \delta, b)$ è convergente allora anche l'integrale improprio di f su $[b - \delta, b)$ è convergente,

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Possiamo ovviamente supporre che $b - \delta > a$ e dunque vale

$$(c - \varepsilon)g(x) < f(x) < (c + \varepsilon)g(x), \quad \forall x \in [b - \delta, b).$$

Potendo scegliere $\varepsilon < c$ abbiamo quindi due disuguaglianze, entrambe valide su $[b - \delta, b)$:

$$0 \leq f(x) < (c + \varepsilon)g(x) \quad \text{e} \quad 0 \leq (c - \varepsilon)g(x) < f(x).$$

Applichiamo quindi il criterio del confronto: la disuguaglianza di sinistra dice che se l'integrale improprio di g su $[b - \delta, b)$ è convergente allora anche l'integrale improprio di f su $[b - \delta, b)$ è convergente, mentre la disuguaglianza di destra dice che se l'integrale improprio di f su $[b - \delta, b)$ è convergente allora anche l'integrale improprio di g su $[b - \delta, b)$ è convergente.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Osserviamo infine che se $c \in (b-\delta, b)$ allora

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx + \int_{b-\delta}^c f(x)\,dx.$$

Osserviamo infine che se $c \in (b-\delta, b)$ allora

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx + \int_{b-\delta}^c f(x)\,dx.$$

Essendo che

$$\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

esiste, in quanto f è integrabile secondo Riemann su $[a, b-\delta]$,

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Osserviamo infine che se $c \in (b-\delta, b)$ allora

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx + \int_{b-\delta}^c f(x)\,dx.$$

Essendo che

$$\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

esiste, in quanto f è integrabile secondo Riemann su $[a, b-\delta]$, si ha dunque che l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è convergente se e solo se l'integrale improprio di f su $[b-\delta, b)$ è convergente

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Osserviamo infine che se $c \in (b-\delta, b)$ allora

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx + \int_{b-\delta}^c f(x)\,dx.$$

Essendo che

$$\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

esiste, in quanto f è integrabile secondo Riemann su $[a, b-\delta]$, si ha dunque che l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è convergente se e solo se l'integrale improprio di f su $[b-\delta, b)$ è convergente e dunque se e solo se l'integrale improprio di g su $[b-\delta, b)$ è convergente.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Osserviamo infine che se $c \in (b-\delta, b)$ allora

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx + \int_{b-\delta}^c f(x)\,dx.$$

Essendo che

$$\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

esiste, in quanto f è integrabile secondo Riemann su $[a, b-\delta]$, si ha dunque che l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è convergente se e solo se l'integrale improprio di f su $[b-\delta, b)$ è convergente e dunque se e solo se l'integrale improprio di g su $[b-\delta, b)$ è convergente.
Riosservando le stesse cose per g abbiamo che l'integrale improprio di g su $[b-\delta, b)$ è convergente se e solo se l'integrale improprio di g su $[a, b)$ è convergente.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Abbiamo quindi dimostrato il criterio del confronto asintotico:

Abbiamo quindi dimostrato il criterio del confronto asintotico: se $f, g : [a, b)$ sono due funzioni integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$,

Abbiamo quindi dimostrato il criterio del confronto asintotico: se $f, g : [a, b)$ sono due funzioni integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$, se $f \geq 0$ e $g > 0$

Abbiamo quindi dimostrato il criterio del confronto asintotico: se $f, g\colon [a, b)$ sono due funzioni integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$, se $f \geq 0$ e $g > 0$ e se

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$$

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Abbiamo quindi dimostrato il criterio del confronto asintotico: se $f, g\colon [a, b)$ sono due funzioni integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$, se $f \geq 0$ e $g > 0$ e se

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$$

allora l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è convergente se e solo se l'integrale improprio di g su $[a, b)$ è convergente.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Abbiamo quindi dimostrato il criterio del confronto asintotico: se $f, g\colon [a, b)$ sono due funzioni integrabili su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, c]$ con $c \in (a, b)$, se $f \geq 0$ e $g > 0$ e se

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$$

allora l'integrale improprio di f su $[a, b)$ è convergente se e solo se l'integrale improprio di g su $[a, b)$ è convergente.
Lo stesso criterio vale per tutti gli altri casi di integrale improprio.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Un ultimo esempio

Vediamo come funziona in pratica il criterio del confronto asintotico.

Un ultimo esempio

Vediamo come funziona in pratica il criterio del confronto asintotico. Consideriamo la funzione $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}\operatorname{sen} x}.$$

Un ultimo esempio

Vediamo come funziona in pratica il criterio del confronto asintotico. Consideriamo la funzione $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}\operatorname{sen} x}.$$

Ci chiediamo se l'integrale improprio di f su $(0,1]$ sia convergente o positivamente divergente.

Un ultimo esempio

Vediamo come funziona in pratica il criterio del confronto asintotico.
Consideriamo la funzione $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}\operatorname{sen} x}.$$

Ci chiediamo se l'integrale improprio di f su $(0,1]$ sia convergente o positivamente divergente.
Ricordiamo che si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Un ultimo esempio

Vediamo come funziona in pratica il criterio del confronto asintotico.
Consideriamo la funzione $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}\operatorname{sen} x}.$$

Ci chiediamo se l'integrale improprio di f su $(0,1]$ sia convergente o positivamente divergente.
Ricordiamo che si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1.$$

Possiamo quindi studiare l'integrale improprio di $g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ su $(0, 1]$,

Possiamo quindi studiare l'integrale improprio di $g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ su $(0, 1]$, il quale è convergente per gli esempi già analizzati.

Possiamo quindi studiare l'integrale improprio di $g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ su $(0, 1]$, il quale è convergente per gli esempi già analizzati.
Per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale improprio di f su $(0, 1]$ è dunque convergente.

Luca Lussardi - ©2011–2012 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA