

Integrale di funzioni razionali

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Le funzioni razionali

In questa lezione vedremo una procedura per calcolare l'integrale indefinito (la cosiddetta **primitiva**) di una funzione razionale.

Le funzioni razionali

In questa lezione vedremo una procedura per calcolare l'integrale indefinito (la cosiddetta **primitiva**) di una funzione razionale.

Ricordiamo che una **funzione razionale** è una funzione di variabile reale che si può esprimere come rapporto di due polinomi.

Le funzioni razionali

In questa lezione vedremo una procedura per calcolare l'integrale indefinito (la cosiddetta **primitiva**) di una funzione razionale.

Ricordiamo che una **funzione razionale** è una funzione di variabile reale che si può esprimere come rapporto di due polinomi.

Ad esempio,

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{x^2 + 7\pi x - \sqrt{2}}{x^4 - 1}, \quad x^3 - 3$$

sono tutte funzioni razionali.

Le funzioni razionali

In questa lezione vedremo una procedura per calcolare l'integrale indefinito (la cosiddetta **primitiva**) di una funzione razionale.

Ricordiamo che una **funzione razionale** è una funzione di variabile reale che si può esprimere come rapporto di due polinomi.

Ad esempio,

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{x^2 + 7\pi x - \sqrt{2}}{x^4 - 1}, \quad x^3 - 3$$

sono tutte funzioni razionali.

Quindi in generale una funzione razionale ha la forma

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

dove il numeratore $N(x)$ e il denominatore $D(x)$ sono due polinomi.

Le funzioni razionali

In questa lezione vedremo una procedura per calcolare l'integrale indefinito (la cosiddetta **primitiva**) di una funzione razionale.

Ricordiamo che una **funzione razionale** è una funzione di variabile reale che si può esprimere come rapporto di due polinomi.

Ad esempio,

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{x^2 + 7\pi x - \sqrt{2}}{x^4 - 1}, \quad x^3 - 3$$

sono tutte funzioni razionali.

Quindi in generale una funzione razionale ha la forma

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

dove il numeratore $N(x)$ e il denominatore $D(x)$ sono due polinomi.

D'ora in poi denoteremo con n il grado del numeratore e con d quello del denominatore.

Tipi di primitive

Intanto, analizzando qualche semplice caso, vediamo che le funzioni razionali possono ammettere primitive di tipo molto diverso.

Tipi di primitive

Intanto, analizzando qualche semplice caso, vediamo che le funzioni razionali possono ammettere primitive di tipo molto diverso.

Infatti, sappiamo bene che si ha:

Tipi di primitive

Intanto, analizzando qualche semplice caso, vediamo che le funzioni razionali possono ammettere primitive di tipo molto diverso.

Infatti, sappiamo bene che si ha:

- $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \text{cost},$

quindi ci possono essere primitive razionali

Tipi di primitive

Intanto, analizzando qualche semplice caso, vediamo che le funzioni razionali possono ammettere primitive di tipo molto diverso.

Infatti, sappiamo bene che si ha:

- $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \text{cost},$

quindi ci possono essere primitive razionali

- $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + \text{cost},$

quindi ci possono essere primitive logaritmiche

Tipi di primitive

Intanto, analizzando qualche semplice caso, vediamo che le funzioni razionali possono ammettere primitive di tipo molto diverso.

Infatti, sappiamo bene che si ha:

- $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \text{cost},$

quindi ci possono essere primitive razionali

- $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + \text{cost},$

quindi ci possono essere primitive logaritmiche

- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg } x + \text{cost},$

quindi ci possono essere primitive con l'arcotangente

Approfondimento: il legame con le funzioni trigonometriche

Sapere integrare le funzioni razionali può essere utile anche per integrare le funzioni goniometriche.

Approfondimento: il legame con le funzioni trigonometriche

Sapere integrare le funzioni razionali può essere utile anche per integrare le funzioni goniometriche.

Infatti, grazie alle formule parametriche

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

ogni funzione goniometrica può essere trasformata in una funzione razionale della variabile t .

Approfondimento: il legame con le funzioni trigonometriche

Sapere integrare le funzioni razionali può essere utile anche per integrare le funzioni goniometriche.

Infatti, grazie alle formule parametriche

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

ogni funzione goniometrica può essere trasformata in una funzione razionale della variabile t .

Inoltre, applicando la formula di sostituzione si ha

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

Approfondimento: il legame con le funzioni trigonometriche

Sapere integrare le funzioni razionali può essere utile anche per integrare le funzioni goniometriche.

Infatti, grazie alle formule parametriche

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

ogni funzione goniometrica può essere trasformata in una funzione razionale della variabile t .

Inoltre, applicando la formula di sostituzione si ha

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \operatorname{arctg} t$$

Approfondimento: il legame con le funzioni trigonometriche

Sapere integrare le funzioni razionali può essere utile anche per integrare le funzioni goniometriche.

Infatti, grazie alle formule parametriche

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

ogni funzione goniometrica può essere trasformata in una funzione razionale della variabile t .

Inoltre, applicando la formula di sostituzione si ha

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

e quindi anche il differenziale dx ha un'espressione razionale in t . Tutto l'integrando diventa una funzione razionale.

Ad esempio, se vogliamo calcolare

$$\int \frac{1}{\cos x} dx$$

possiamo procedere così:

Ad esempio, se vogliamo calcolare

$$\int \frac{1}{\cos x} dx$$

possiamo procedere così:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

Ad esempio, se vogliamo calcolare

$$\int \frac{1}{\cos x} dx$$

possiamo procedere così:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Ad esempio, se vogliamo calcolare

$$\int \frac{1}{\cos x} dx$$

possiamo procedere così:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

e dunque

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt$$

Ad esempio, se vogliamo calcolare

$$\int \frac{1}{\cos x} dx$$

possiamo procedere così:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

e dunque

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt$$

e quindi ci siamo ricondotti all'integrale di una funzione razionale.

Ad esempio, se vogliamo calcolare

$$\int \frac{1}{\cos x} dx$$

possiamo procedere così:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

e dunque

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt$$

e quindi ci siamo ricondotti all'integrale di una funzione razionale.

Una volta calcolata la primitiva nella variabile t , potremo poi tornare indietro alla variabile x con la sostituzione

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Grado dei polinomi

Nel calcolo delle primitive di funzioni razionali supporremo sempre che il grado n del numeratore sia minore (strettamente) del grado d del denominatore.

Grado dei polinomi

Nel calcolo delle primitive di funzioni razionali supporremo sempre che il grado n del numeratore sia minore (strettamente) del grado d del denominatore.

Infatti, se $n \geq d$ si può eseguire la divisione tra i due polinomi, ad esempio con l'algoritmo studiato nel biennio.

Grado dei polinomi

Nel calcolo delle primitive di funzioni razionali supporremo sempre che il grado n del numeratore sia minore (strettamente) del grado d del denominatore.

Infatti, se $n \geq d$ si può eseguire la divisione tra i due polinomi, ad esempio con l'algoritmo studiato nel biennio.

In questo modo si ottiene un polinomio $Q(x)$, il quoziente, e un resto $R(x)$ che ha grado strettamente minore del denominatore, e si ha

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

Grado dei polinomi

Nel calcolo delle primitive di funzioni razionali supporremo sempre che il grado n del numeratore sia minore (strettamente) del grado d del denominatore.

Infatti, se $n \geq d$ si può eseguire la divisione tra i due polinomi, ad esempio con l'algoritmo studiato nel biennio.

In questo modo si ottiene un polinomio $Q(x)$, il quoziente, e un resto $R(x)$ che ha grado strettamente minore del denominatore, e si ha

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

Poiché l'integrale di $Q(x)$ è molto semplice da calcolare (è un polinomio!), dedicheremo la nostra attenzione al termine $R(x)/D(x)$, in cui appunto il grado del numeratore è più piccolo di quello del denominatore.

Il caso $d = 1$

Analizzeremo alcuni casi in funzione del grado del denominatore.

Il caso $d = 1$

Analizzeremo alcuni casi in funzione del grado del denominatore.

Il caso più semplice è $d = 1$: dovendo essere $n < d$, infatti, si ha per forza $n = 0$, e dunque il numeratore è una costante e il denominatore un polinomio di primo grado:

$$f(x) = \frac{a}{bx + c}.$$

In questo caso la primitiva è un logaritmo: facendo comparire la derivata del denominatore, che è la costante b , si ottiene

Il caso $d = 1$

Analizzeremo alcuni casi in funzione del grado del denominatore.

Il caso più semplice è $d = 1$: dovendo essere $n < d$, infatti, si ha per forza $n = 0$, e dunque il numeratore è una costante e il denominatore un polinomio di primo grado:

$$f(x) = \frac{a}{bx + c}.$$

In questo caso la primitiva è un logaritmo: facendo comparire la derivata del denominatore, che è la costante b , si ottiene

$$\int \frac{a}{bx + c} dx =$$

Il caso $d = 1$

Analizzeremo alcuni casi in funzione del grado del denominatore.

Il caso più semplice è $d = 1$: dovendo essere $n < d$, infatti, si ha per forza $n = 0$, e dunque il numeratore è una costante e il denominatore un polinomio di primo grado:

$$f(x) = \frac{a}{bx + c}.$$

In questo caso la primitiva è un logaritmo: facendo comparire la derivata del denominatore, che è la costante b , si ottiene

$$\int \frac{a}{bx + c} dx = \frac{a}{b} \int \frac{b}{bx + c} dx =$$

Il caso $d = 1$

Analizzeremo alcuni casi in funzione del grado del denominatore.

Il caso più semplice è $d = 1$: dovendo essere $n < d$, infatti, si ha per forza $n = 0$, e dunque il numeratore è una costante e il denominatore un polinomio di primo grado:

$$f(x) = \frac{a}{bx + c}.$$

In questo caso la primitiva è un logaritmo: facendo comparire la derivata del denominatore, che è la costante b , si ottiene

$$\int \frac{a}{bx + c} dx = \frac{a}{b} \int \frac{b}{bx + c} dx = \frac{a}{b} \log |bx + c| + \text{cost.}$$

Il caso $d = 2$

Il caso ben più complicato è quello in cui il denominatore è un polinomio di secondo grado. Come vedremo, sarà importante stabilire se tale polinomio è fattorizzabile, ovvero il segno del famigerato **discriminante**

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Il caso $d = 2$

Il caso ben più complicato è quello in cui il denominatore è un polinomio di secondo grado. Come vedremo, sarà importante stabilire se tale polinomio è fattorizzabile, ovvero il segno del famigerato **discriminante**

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Considereremo quindi una funzione razionale fratta della forma

$$f(x) = \frac{kx + h}{ax^2 + bx + c}$$

e distingueremo tre casi, in funzione di come si fattorizza il denominatore. Lo faremo analizzando il segno di $\Delta = b^2 - 4ac$.

Caso $d = 2$, $\Delta > 0$

Sia $\Delta > 0$, cioè il denominatore si può fattorizzare.

Caso $d = 2$, $\Delta > 0$

Sia $\Delta > 0$, cioè il denominatore si può fattorizzare.

In questo caso, troviamo le radici $x_{1,2}$ del denominatore e riscriviamo la funzione come

$$f(x) = \frac{kx + h}{a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Caso $d = 2$, $\Delta > 0$

Sia $\Delta > 0$, cioè il denominatore si può fattorizzare.

In questo caso, troviamo le radici $x_{1,2}$ del denominatore e riscriviamo la funzione come

$$f(x) = \frac{kx + h}{a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Questa funzione si può sempre scrivere come

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right).$$

Caso $d = 2$, $\Delta > 0$

Sia $\Delta > 0$, cioè il denominatore si può fattorizzare.

In questo caso, troviamo le radici $x_{1,2}$ del denominatore e riscriviamo la funzione come

$$f(x) = \frac{kx + h}{a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Questa funzione si può sempre scrivere come

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right).$$

Basta infatti mettere a minimo comun denominatore la parentesi, trovando

$$f(x) = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Caso $d = 2$, $\Delta > 0$

Sia $\Delta > 0$, cioè il denominatore si può fattorizzare.

In questo caso, troviamo le radici $x_{1,2}$ del denominatore e riscriviamo la funzione come

$$f(x) = \frac{kx + h}{a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Questa funzione si può sempre scrivere come

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right).$$

Basta infatti mettere a minimo comun denominatore la parentesi, trovando

$$f(x) = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{a(x - x_1)(x - x_2)}$$

e poi si impone che il numeratore sia $kx + h$, identificando i polinomi:

$$A(x - x_2) + B(x - x_1) = kx + h \quad \text{per ogni } x.$$

Ne viene un sistema nelle incognite A, B che è sempre risolubile.

Una volta che la funzione è stata scritta nella forma

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right),$$

è facile calcolarne una primitiva:

Una volta che la funzione è stata scritta nella forma

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right),$$

è facile calcolarne una primitiva:

$$\int \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right) dx =$$

Una volta che la funzione è stata scritta nella forma

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right),$$

è facile calcolarne una primitiva:

$$\int \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right) dx = \frac{1}{a} (A \log |x - x_1| + B \log |x - x_2|) + \text{cost.}$$

Una volta che la funzione è stata scritta nella forma

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right),$$

è facile calcolarne una primitiva:

$$\int \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right) dx = \frac{1}{a} (A \log |x - x_1| + B \log |x - x_2|) + \text{cost.}$$

Quindi abbiamo trovato le primitive della funzione.

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta > 0$

Vediamo un esempio: si vuole trovare

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta > 0$

Vediamo un esempio: si vuole trovare

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Per il denominatore si ha $\Delta = 1 > 0$ e dunque possiamo fattorizzare.

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta > 0$

Vediamo un esempio: si vuole trovare

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Per il denominatore si ha $\Delta = 1 > 0$ e dunque possiamo fattorizzare.
Le radici del denominatore sono

$$x_1 = \frac{3 - 1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{3 + 1}{2} = 2.$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta > 0$

Vediamo un esempio: si vuole trovare

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Per il denominatore si ha $\Delta = 1 > 0$ e dunque possiamo fattorizzare.
Le radici del denominatore sono

$$x_1 = \frac{3 - 1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{3 + 1}{2} = 2.$$

Quindi dobbiamo trovare due costanti A, B tali che

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta > 0$

Vediamo un esempio: si vuole trovare

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Per il denominatore si ha $\Delta = 1 > 0$ e dunque possiamo fattorizzare. Le radici del denominatore sono

$$x_1 = \frac{3 - 1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{3 + 1}{2} = 2.$$

Quindi dobbiamo trovare due costanti A, B tali che

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

Facendo il minimo comun denominatore a sinistra troviamo

$$A(x - 2) + B(x - 1) = (A + B)x - 2A - B = 2x + 1,$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta > 0$

Vediamo un esempio: si vuole trovare

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Per il denominatore si ha $\Delta = 1 > 0$ e dunque possiamo fattorizzare. Le radici del denominatore sono

$$x_1 = \frac{3 - 1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{3 + 1}{2} = 2.$$

Quindi dobbiamo trovare due costanti A, B tali che

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

Facendo il minimo comun denominatore a sinistra troviamo

$$A(x - 2) + B(x - 1) = (A + B)x - 2A - B = 2x + 1,$$

per cui dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -2A - B = 1. \end{cases}$$

Il sistema ha soluzione $A = -3$ e $B = 5$, quindi riscriviamo l'integrale come

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx$$

Il sistema ha soluzione $A = -3$ e $B = 5$, quindi riscriviamo l'integrale come

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{-3}{x - 1} dx + \int \frac{5}{x - 2} dx$$

Il sistema ha soluzione $A = -3$ e $B = 5$, quindi riscriviamo l'integrale come

$$\begin{aligned}\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \frac{-3}{x - 1} dx + \int \frac{5}{x - 2} dx \\ &= -3 \log |x - 1| + 5 \log |x - 2| + \text{cost.}\end{aligned}$$

Il sistema ha soluzione $A = -3$ e $B = 5$, quindi riscriviamo l'integrale come

$$\begin{aligned}\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \frac{-3}{x - 1} dx + \int \frac{5}{x - 2} dx \\ &= -3 \log |x - 1| + 5 \log |x - 2| + \text{cost.} \\ &= \log \frac{|x - 2|^5}{|x - 1|^3} + \text{cost.}\end{aligned}$$

Il sistema ha soluzione $A = -3$ e $B = 5$, quindi riscriviamo l'integrale come

$$\begin{aligned}\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \frac{-3}{x - 1} dx + \int \frac{5}{x - 2} dx \\ &= -3 \log |x - 1| + 5 \log |x - 2| + \text{cost.} \\ &= \log \frac{|x - 2|^5}{|x - 1|^3} + \text{cost.}\end{aligned}$$

e l'esempio è concluso.

Caso $d = 2$, $\Delta = 0$

Sia $\Delta = 0$, cioè il denominatore è un quadrato perfetto.

Caso $d = 2$, $\Delta = 0$

Sia $\Delta = 0$, cioè il denominatore è un quadrato perfetto.

Questo caso è molto simile al precedente: stavolta cerchiamo due costanti A, B tali che

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} \right).$$

Caso $d = 2$, $\Delta = 0$

Sia $\Delta = 0$, cioè il denominatore è un quadrato perfetto.

Questo caso è molto simile al precedente: stavolta cerchiamo due costanti A, B tali che

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} \right).$$

Anche stavolta, facendo il minimo comun denominatore e identificando i polinomi, si trova l'identità

$$A(x - x_1) + B = kx + h \quad \text{per ogni } x$$

che dà un sistema nelle incognite A, B sempre risolubile.

Caso $d = 2, \Delta = 0$

Sia $\Delta = 0$, cioè il denominatore è un quadrato perfetto.

Questo caso è molto simile al precedente: stavolta cerchiamo due costanti A, B tali che

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} \right).$$

Anche stavolta, facendo il minimo comun denominatore e identificando i polinomi, si trova l'identità

$$A(x - x_1) + B = kx + h \quad \text{per ogni } x$$

che dà un sistema nelle incognite A, B sempre risolubile.

Quindi è facile calcolarne una primitiva:

$$\int \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} \right) dx =$$

Caso $d = 2$, $\Delta = 0$

Sia $\Delta = 0$, cioè il denominatore è un quadrato perfetto.

Questo caso è molto simile al precedente: stavolta cerchiamo due costanti A, B tali che

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} \right).$$

Anche stavolta, facendo il minimo comun denominatore e identificando i polinomi, si trova l'identità

$$A(x - x_1) + B = kx + h \quad \text{per ogni } x$$

che dà un sistema nelle incognite A, B sempre risolubile.

Quindi è facile calcolarne una primitiva:

$$\int \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} \right) dx = \frac{1}{a} \left(A \log |x - x_1| - \frac{B}{x - x_1} \right) + \text{cost.}$$

Caso $d = 2$, $\Delta = 0$

Sia $\Delta = 0$, cioè il denominatore è un quadrato perfetto.

Questo caso è molto simile al precedente: stavolta cerchiamo due costanti A, B tali che

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} \right).$$

Anche stavolta, facendo il minimo comun denominatore e identificando i polinomi, si trova l'identità

$$A(x - x_1) + B = kx + h \quad \text{per ogni } x$$

che dà un sistema nelle incognite A, B sempre risolubile.

Quindi è facile calcolarne una primitiva:

$$\int \frac{1}{a} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} \right) dx = \frac{1}{a} \left(A \log |x - x_1| - \frac{B}{x - x_1} \right) + \text{cost.}$$

Anche stavolta abbiamo trovato le primitive della funzione.

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta = 0$

Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1} dx.$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta = 0$

Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1} dx.$$

Il denominatore ha grado 2 e $\Delta = 0$, quindi è un quadrato perfetto e possiamo riscriverlo come

$$(2x - 1)^2.$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta = 0$

Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1} dx.$$

Il denominatore ha grado 2 e $\Delta = 0$, quindi è un quadrato perfetto e possiamo riscriverlo come

$$(2x - 1)^2.$$

Quindi vogliamo trovare A, B tali che

$$\frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{(2x - 1)^2} = \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1}.$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta = 0$

Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1} dx.$$

Il denominatore ha grado 2 e $\Delta = 0$, quindi è un quadrato perfetto e possiamo riscriverlo come

$$(2x - 1)^2.$$

Quindi vogliamo trovare A, B tali che

$$\frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{(2x - 1)^2} = \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1}.$$

Facendo il minimo comun denominatore troviamo

$$A(2x - 1) + B = 4x$$

da cui

$$\begin{cases} 2A = 4 \\ -A + B = 0. \end{cases}$$

Il sistema ha la soluzione $A = 2$, $B = 2$ e dunque l'integrale si scrive

$$\int \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1} dx$$

Il sistema ha la soluzione $A = 2$, $B = 2$ e dunque l'integrale si scrive

$$\int \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1} dx = \int \frac{2}{2x - 1} dx + \int \frac{2}{(2x - 1)^2} dx$$

Il sistema ha la soluzione $A = 2$, $B = 2$ e dunque l'integrale si scrive

$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1} dx &= \int \frac{2}{2x - 1} dx + \int \frac{2}{(2x - 1)^2} dx \\ &= \log |2x - 1| - \frac{1}{2x - 1} + \text{cost.}\end{aligned}$$

Il sistema ha la soluzione $A = 2$, $B = 2$ e dunque l'integrale si scrive

$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1} dx &= \int \frac{2}{2x - 1} dx + \int \frac{2}{(2x - 1)^2} dx \\ &= \log |2x - 1| - \frac{1}{2x - 1} + \text{cost.}\end{aligned}$$

e l'esempio è concluso.

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Il caso ben più complicato è quello in cui il denominatore non è fattorizzabile, ovvero $\Delta < 0$.

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Il caso ben più complicato è quello in cui il denominatore non è fattorizzabile, ovvero $\Delta < 0$.

Stavolta conviene guardare anche il grado del numeratore. Ci sono due casi:

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Il caso ben più complicato è quello in cui il denominatore non è fattorizzabile, ovvero $\Delta < 0$.

Stavolta conviene guardare anche il grado del numeratore. Ci sono due casi:

- $n = 1$, cioè il numeratore è di primo grado: $N(x) = kx + h$

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Il caso ben più complicato è quello in cui il denominatore non è fattorizzabile, ovvero $\Delta < 0$.

Stavolta conviene guardare anche il grado del numeratore. Ci sono due casi:

- $n = 1$, cioè il numeratore è di primo grado: $N(x) = kx + h$
- $n = 0$, cioè il numeratore è una costante: $N(x) = k$

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Il caso ben più complicato è quello in cui il denominatore non è fattorizzabile, ovvero $\Delta < 0$.

Stavolta conviene guardare anche il grado del numeratore. Ci sono due casi:

- $n = 1$, cioè il numeratore è di primo grado: $N(x) = kx + h$
- $n = 0$, cioè il numeratore è una costante: $N(x) = k$

Ma il primo caso si riconduce facilmente al secondo, come vedremo tra un attimo.

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Il caso ben più complicato è quello in cui il denominatore non è fattorizzabile, ovvero $\Delta < 0$.

Stavolta conviene guardare anche il grado del numeratore. Ci sono due casi:

- $n = 1$, cioè il numeratore è di primo grado: $N(x) = kx + h$
- $n = 0$, cioè il numeratore è una costante: $N(x) = k$

Ma il primo caso si riconduce facilmente al secondo, come vedremo tra un attimo.

Il secondo caso, quindi, sarà quello più importante e dettagliato.

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$, $n = 1$

Supponiamo di avere una funzione razionale del tipo

$$f(x) = \frac{kx + h}{ax^2 + bx + c} \quad k, a \neq 0.$$

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$, $n = 1$

Supponiamo di avere una funzione razionale del tipo

$$f(x) = \frac{kx + h}{ax^2 + bx + c} \quad k, a \neq 0.$$

Allora possiamo far comparire a numeratore la derivata del denominatore, cercando di inglobare la x . Infatti:

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$, $n = 1$

Supponiamo di avere una funzione razionale del tipo

$$f(x) = \frac{kx + h}{ax^2 + bx + c} \quad k, a \neq 0.$$

Allora possiamo far comparire a numeratore la derivata del denominatore, cercando di inglobare la x . Infatti:

- la derivata del denominatore è $2ax + b$

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$, $n = 1$

Supponiamo di avere una funzione razionale del tipo

$$f(x) = \frac{kx + h}{ax^2 + bx + c} \quad k, a \neq 0.$$

Allora possiamo far comparire a numeratore la derivata del denominatore, cercando di inglobare la x . Infatti:

- la derivata del denominatore è $2ax + b$
- moltiplicando (e dividendo) il numeratore per $2a/k$ otteniamo

$$kx + h = \frac{k}{2a}(2ax + b) + h - \frac{kb}{2a}$$

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$, $n = 1$

Supponiamo di avere una funzione razionale del tipo

$$f(x) = \frac{kx + h}{ax^2 + bx + c} \quad k, a \neq 0.$$

Allora possiamo far comparire a numeratore la derivata del denominatore, cercando di inglobare la x . Infatti:

- la derivata del denominatore è $2ax + b$
- moltiplicando (e dividendo) il numeratore per $2a/k$ otteniamo

$$kx + h = \frac{k}{2a}(2ax + b) + h - \frac{kb}{2a}$$

- chiamiamo H la costante $h - \frac{kb}{2a}$ e riscriviamo la funzione come

$$f(x) = \frac{k}{2a} \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + \frac{H}{ax^2 + bx + c}$$

Il primo addendo della funzione è facilmente integrabile, poiché compare a numeratore la derivata del denominatore:

$$\int \frac{k}{2a} \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{k}{2a} \log |ax^2 + bx + c| + \text{cost.}$$

Il primo addendo della funzione è facilmente integrabile, poiché compare a numeratore la derivata del denominatore:

$$\int \frac{k}{2a} \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{k}{2a} \log |ax^2 + bx + c| + \text{cost.}$$

Notiamo che se $a > 0$ il valore assoluto nell'argomento del logaritmo può anche essere tolto, poiché siamo nel caso $\Delta < 0$.

Il primo addendo della funzione è facilmente integrabile, poiché compare a numeratore la derivata del denominatore:

$$\int \frac{k}{2a} \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{k}{2a} \log |ax^2 + bx + c| + \text{cost.}$$

Notiamo che se $a > 0$ il valore assoluto nell'argomento del logaritmo può anche essere tolto, poiché siamo nel caso $\Delta < 0$.

Quindi ci resta da calcolare una primitiva del secondo addendo:

$$\int \frac{H}{ax^2 + bx + c} dx$$

che ha il numeratore costante.

Il primo addendo della funzione è facilmente integrabile, poiché compare a numeratore la derivata del denominatore:

$$\int \frac{k}{2a} \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{k}{2a} \log |ax^2 + bx + c| + \text{cost.}$$

Notiamo che se $a > 0$ il valore assoluto nell'argomento del logaritmo può anche essere tolto, poiché siamo nel caso $\Delta < 0$.

Quindi ci resta da calcolare una primitiva del secondo addendo:

$$\int \frac{H}{ax^2 + bx + c} dx$$

che ha il numeratore costante.

Con questo trucco ci siamo ricondotti al caso in cui $n = 0$, che adesso andiamo ad analizzare.

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$, $n = 0$

Stavolta il denominatore non è fattorizzabile, e sfrutteremo proprio questa proprietà per ricondurci a una primitiva che coinvolge l'arcotangente.

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$, $n = 0$

Stavolta il denominatore non è fattorizzabile, e sfrutteremo proprio questa proprietà per ricondurci a una primitiva che coinvolge l'arcotangente.

Prendiamo il denominatore:

$$ax^2 + bx + c \quad b^2 - 4ac < 0.$$

e per semplicità supponiamo $a = 1$ (tanto possiamo sempre raccogliere a e portarlo fuori dall'integrale).

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$, $n = 0$

Stavolta il denominatore non è fattorizzabile, e sfrutteremo proprio questa proprietà per ricondurci a una primitiva che coinvolge l'arcotangente.

Prendiamo il denominatore:

$$ax^2 + bx + c \quad b^2 - 4ac < 0.$$

e per semplicità supponiamo $a = 1$ (tanto possiamo sempre raccogliere a e portarlo fuori dall'integrale).

L'obiettivo è quello di scrivere $x^2 + bx + c$ nella forma

$$(x + p)^2 + q^2,$$

usando la tecnica del **completamento del quadrato**:

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$, $n = 0$

Stavolta il denominatore non è fattorizzabile, e sfrutteremo proprio questa proprietà per ricondurci a una primitiva che coinvolge l'arcotangente.

Prendiamo il denominatore:

$$ax^2 + bx + c \quad b^2 - 4ac < 0.$$

e per semplicità supponiamo $a = 1$ (tanto possiamo sempre raccogliere a e portarlo fuori dall'integrale).

L'obiettivo è quello di scrivere $x^2 + bx + c$ nella forma

$$(x + p)^2 + q^2,$$

usando la tecnica del **completamento del quadrato**:

si suppone che $x^2 + bx$ sia l'inizio del quadrato di un binomio e si cerca di completarlo.

Caso $d = 2$, $\Delta < 0$, $n = 0$

Stavolta il denominatore non è fattorizzabile, e sfrutteremo proprio questa proprietà per ricondurci a una primitiva che coinvolge l'arcotangente.

Prendiamo il denominatore:

$$ax^2 + bx + c \quad b^2 - 4ac < 0.$$

e per semplicità supponiamo $a = 1$ (tanto possiamo sempre raccogliere a e portarlo fuori dall'integrale).

L'obiettivo è quello di scrivere $x^2 + bx + c$ nella forma

$$(x + p)^2 + q^2,$$

usando la tecnica del **completamento del quadrato**:

si suppone che $x^2 + bx$ sia l'inizio del quadrato di un binomio e si cerca di completarlo.

Bisognerà aggiungere (e togliere) il termine $b^2/4$, in modo che si abbia

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

Quindi siamo nella situazione

$$f(x) = \frac{h}{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}}.$$

Quindi siamo nella situazione

$$f(x) = \frac{h}{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}}.$$

Notiamo che la quantità $c - \frac{b^2}{4}$ è positiva, proprio perché l'ipotesi $\Delta < 0$ nel caso $a = 1$ diventa

$$b^2 - 4c < 0 \quad \Rightarrow \quad c > \frac{b^2}{4}.$$

Quindi siamo nella situazione

$$f(x) = \frac{h}{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}}.$$

Notiamo che la quantità $c - \frac{b^2}{4}$ è positiva, proprio perché l'ipotesi $\Delta < 0$ nel caso $a = 1$ diventa

$$b^2 - 4c < 0 \quad \Rightarrow \quad c > \frac{b^2}{4}.$$

Possiamo quindi porre $q^2 = c - \frac{b^2}{4}$ e riscrivere il denominatore raccogliendo q^2 :

Quindi siamo nella situazione

$$f(x) = \frac{h}{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}}.$$

Notiamo che la quantità $c - \frac{b^2}{4}$ è positiva, proprio perché l'ipotesi $\Delta < 0$ nel caso $a = 1$ diventa

$$b^2 - 4c < 0 \quad \Rightarrow \quad c > \frac{b^2}{4}.$$

Possiamo quindi porre $q^2 = c - \frac{b^2}{4}$ e riscrivere il denominatore raccogliendo q^2 :

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + q^2 = q^2 \left[\left(\frac{x + \frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1 \right].$$

A questo punto abbiamo (quasi!) finito: dobbiamo calcolare

$$\int f(x) dx = \frac{h}{q^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx$$

che si presenta nella forma

$$\int \frac{g'(x)}{1 + [g(x)]^2} dx$$

A questo punto abbiamo (quasi!) finito: dobbiamo calcolare

$$\int f(x) dx = \frac{h}{q^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx$$

che si presenta nella forma

$$\int \frac{g'(x)}{1 + [g(x)]^2} dx = \operatorname{arctg}[g(x)] + \text{cost.}$$

A questo punto abbiamo (quasi!) finito: dobbiamo calcolare

$$\int f(x) dx = \frac{h}{q^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx$$

che si presenta nella forma

$$\int \frac{g'(x)}{1 + [g(x)]^2} dx = \operatorname{arctg}[g(x)] + \text{cost.}$$

Basta solo far comparire a numeratore la derivata della funzione $g(x) = \frac{x+\frac{b}{2}}{q}$, che vale $\frac{1}{q}$, e dunque

A questo punto abbiamo (quasi!) finito: dobbiamo calcolare

$$\int f(x) dx = \frac{h}{q^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx$$

che si presenta nella forma

$$\int \frac{g'(x)}{1 + [g(x)]^2} dx = \operatorname{arctg}[g(x)] + \text{cost.}$$

Basta solo far comparire a numeratore la derivata della funzione $g(x) = \frac{x+\frac{b}{2}}{q}$, che vale $\frac{1}{q}$, e dunque

$$\frac{h}{q^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx =$$

A questo punto abbiamo (quasi!) finito: dobbiamo calcolare

$$\int f(x) dx = \frac{h}{q^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx$$

che si presenta nella forma

$$\int \frac{g'(x)}{1 + [g(x)]^2} dx = \arctg[g(x)] + \text{cost.}$$

Basta solo far comparire a numeratore la derivata della funzione $g(x) = \frac{x+\frac{b}{2}}{q}$, che vale $\frac{1}{q}$, e dunque

$$\frac{h}{q^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx = \frac{h}{q} \int \frac{\frac{1}{q}}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx =$$

A questo punto abbiamo (quasi!) finito: dobbiamo calcolare

$$\int f(x) dx = \frac{h}{q^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx$$

che si presenta nella forma

$$\int \frac{g'(x)}{1 + [g(x)]^2} dx = \operatorname{arctg}[g(x)] + \text{cost.}$$

Basta solo far comparire a numeratore la derivata della funzione $g(x) = \frac{x+\frac{b}{2}}{q}$, che vale $\frac{1}{q}$, e dunque

$$\frac{h}{q^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx = \frac{h}{q} \int \frac{\frac{1}{q}}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx = \frac{h}{q} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right) + \text{cost.}$$

A questo punto abbiamo (quasi!) finito: dobbiamo calcolare

$$\int f(x) dx = \frac{h}{q^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx$$

che si presenta nella forma

$$\int \frac{g'(x)}{1 + [g(x)]^2} dx = \arctg[g(x)] + \text{cost.}$$

Basta solo far comparire a numeratore la derivata della funzione $g(x) = \frac{x+\frac{b}{2}}{q}$, che vale $\frac{1}{q}$, e dunque

$$\frac{h}{q^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx = \frac{h}{q} \int \frac{\frac{1}{q}}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right)^2 + 1} dx = \frac{h}{q} \arctg\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{q}\right) + \text{cost.}$$

Finalmente abbiamo trovato la primitiva!

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Vediamo un esempio del caso appena visto: vogliamo trovare

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx .$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Vediamo un esempio del caso appena visto: vogliamo trovare

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Come si vede, si ha $n = 1$, $d = 2$ e $\Delta = -4 < 0$.

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Vediamo un esempio del caso appena visto: vogliamo trovare

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Come si vede, si ha $n = 1$, $d = 2$ e $\Delta = -4 < 0$.

Eliminiamo la x a numeratore: la derivata di $x^2 + 2x + 2$ è $2x + 2$, quindi

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx =$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Vediamo un esempio del caso appena visto: vogliamo trovare

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Come si vede, si ha $n = 1$, $d = 2$ e $\Delta = -4 < 0$.

Eliminiamo la x a numeratore: la derivata di $x^2 + 2x + 2$ è $2x + 2$, quindi

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} dx =$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Vediamo un esempio del caso appena visto: vogliamo trovare

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Come si vede, si ha $n = 1$, $d = 2$ e $\Delta = -4 < 0$.

Eliminiamo la x a numeratore: la derivata di $x^2 + 2x + 2$ è $2x + 2$, quindi

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 2} dx$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Vediamo un esempio del caso appena visto: vogliamo trovare

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Come si vede, si ha $n = 1$, $d = 2$ e $\Delta = -4 < 0$.

Eliminiamo la x a numeratore: la derivata di $x^2 + 2x + 2$ è $2x + 2$, quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx \end{aligned}$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Vediamo un esempio del caso appena visto: vogliamo trovare

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Come si vede, si ha $n = 1$, $d = 2$ e $\Delta = -4 < 0$.

Eliminiamo la x a numeratore: la derivata di $x^2 + 2x + 2$ è $2x + 2$, quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx. \end{aligned}$$

Un esempio nel caso $d = 2$, $\Delta < 0$

Vediamo un esempio del caso appena visto: vogliamo trovare

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Come si vede, si ha $n = 1$, $d = 2$ e $\Delta = -4 < 0$.

Eliminiamo la x a numeratore: la derivata di $x^2 + 2x + 2$ è $2x + 2$, quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx. \end{aligned}$$

Ora dobbiamo calcolare l'ultimo integrale.

Con il completamento del quadrato troviamo subito che

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1.$$

Con il completamento del quadrato troviamo subito che

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1.$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx.$$

Con il completamento del quadrato troviamo subito che

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1.$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx.$$

Poiché questo integrale è già nella forma giusta, abbiamo direttamente

$$\int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx = \operatorname{arctg}(x + 1) + \text{cost.}$$

Con il completamento del quadrato troviamo subito che

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1.$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx.$$

Poiché questo integrale è già nella forma giusta, abbiamo direttamente

$$\int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx = \operatorname{arctg}(x + 1) + \text{cost.}$$

Quindi in definitiva abbiamo trovato

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \operatorname{arctg}(x + 1) + \text{cost.}$$

e l'esercizio è concluso.

Il caso $d > 2$

Vediamo ora come si può procedere quando il grado del denominatore è maggiore di 2.

Il caso $d > 2$

Vediamo ora come si può procedere quando il grado del denominatore è maggiore di 2.

Ci dobbiamo appellare al seguente teorema, molto importante:

Teorema di fattorizzazione

Ogni polinomio è fattorizzabile in polinomi di primo e secondo grado.

Il caso $d > 2$

Vediamo ora come si può procedere quando il grado del denominatore è maggiore di 2.

Ci dobbiamo appellare al seguente teorema, molto importante:

Teorema di fattorizzazione

Ogni polinomio è fattorizzabile in polinomi di primo e secondo grado.

Quindi possiamo supporre che il polinomio a denominatore sia scritto come prodotto di polinomi di primo e secondo grado.

Il caso $d > 2$

Vediamo ora come si può procedere quando il grado del denominatore è maggiore di 2.

Ci dobbiamo appellare al seguente teorema, molto importante:

Teorema di fattorizzazione

Ogni polinomio è fattorizzabile in polinomi di primo e secondo grado.

Quindi possiamo supporre che il polinomio a denominatore sia scritto come prodotto di polinomi di primo e secondo grado.

Attenzione però: non esiste un metodo completo per fattorizzare un polinomio. Per farlo, dovremo sfruttare tutte le tecniche imparate ancora nel primo biennio (prodotti notevoli, raccoglimenti, divisioni, Teorema di Ruffini. . .)

Una volta fattorizzato il denominatore, otterremo una cosa del tipo

$$D(x) = a(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdots (x^2 + b_1x + c_1)^{m_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{m_2} \cdots$$

Una volta fattorizzato il denominatore, otterremo una cosa del tipo

$$D(x) = a(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdots (x^2 + b_1x + c_1)^{m_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{m_2} \cdots$$

Attenzione: i vari fattori possono essere elevati anche a qualche potenza, perché ci possono essere radici multiple.

Una volta fattorizzato il denominatore, otterremo una cosa del tipo

$$D(x) = a(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdots (x^2 + b_1x + c_1)^{m_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{m_2} \cdots$$

Attenzione: i vari fattori possono essere elevati anche a qualche potenza, perché ci possono essere radici multiple.

A questo punto cercheremo di scrivere la funzione come somme di funzioni razionali più semplici:

Una volta fattorizzato il denominatore, otterremo una cosa del tipo

$$D(x) = a(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdots (x^2 + b_1x + c_1)^{m_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{m_2} \cdots$$

Attenzione: i vari fattori possono essere elevati anche a qualche potenza, perché ci possono essere radici multiple.

A questo punto cercheremo di scrivere la funzione come somme di funzioni razionali più semplici:

- per ogni fattore $(x - x_1)^{n_1}$ metteremo dei termini del tipo

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{n_1}}{(x - x_1)^{n_1}}$$

Una volta fattorizzato il denominatore, otterremo una cosa del tipo

$$D(x) = a(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdots (x^2 + b_1x + c_1)^{m_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{m_2} \cdots$$

Attenzione: i vari fattori possono essere elevati anche a qualche potenza, perché ci possono essere radici multiple.

A questo punto cercheremo di scrivere la funzione come somme di funzioni razionali più semplici:

- per ogni fattore $(x - x_1)^{n_1}$ metteremo dei termini del tipo

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{n_1}}{(x - x_1)^{n_1}}$$

- per ogni fattore $(x^2 + b_1x + c_1)^{m_1}$ metteremo dei termini del tipo

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + b_1x + c_1)^2} + \cdots + \frac{B_{m_1}x + C_{m_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{m_1}}$$

Infine, facendo il minimo comun denominatore, cercheremo i valori dei vari coefficienti ed effettueremo le integrazioni.

Infine, facendo il minimo comun denominatore, cercheremo i valori dei vari coefficienti ed effettueremo le integrazioni.

Ogni integrazione sarà dei tipi che abbiamo analizzato:

- denominatori di primo grado, eventualmente elevati a qualche potenza, e numeratori costanti: questi porteranno dei termini razionali e dei termini logaritmici
- denominatori di secondo grado con $\Delta < 0$, eventualmente elevati a qualche potenza, e numeratori di primo grado: questi avranno in più dei termini con arcotangenti.

Un esempio nel caso $d = 4$

Si calcoli l'integrale

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1} dx .$$

Un esempio nel caso $d = 4$

Si calcoli l'integrale

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1} dx .$$

Il denominatore, che è di quarto grado, si fattorizza mediante la differenza di quadrati come

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

Un esempio nel caso $d = 4$

Si calcoli l'integrale

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1} dx.$$

Il denominatore, che è di quarto grado, si fattorizza mediante la differenza di quadrati come

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

Quindi poniamo

$$\frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1}.$$

Un esempio nel caso $d = 4$

Si calcoli l'integrale

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1} dx.$$

Il denominatore, che è di quarto grado, si fattorizza mediante la differenza di quadrati come

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

Quindi poniamo

$$\frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1}.$$

Facendo i conti troviamo il sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + B = 0 \\ A_1 - A_2 + C = 1 \\ A_1 + A_2 - B = 0 \\ A_1 - A_2 - C = -2 \end{cases}$$

Un esempio nel caso $d = 4$

Si calcoli l'integrale

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1} dx.$$

Il denominatore, che è di quarto grado, si fattorizza mediante la differenza di quadrati come

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

Quindi poniamo

$$\frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1}.$$

Facendo i conti troviamo il sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + B = 0 \\ A_1 - A_2 + C = 1 \\ A_1 + A_2 - B = 0 \\ A_1 - A_2 - C = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{1}{4} \\ A_2 = \frac{1}{4} \\ B = 0 \\ C = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$-\frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{4} \log |x-1| + \end{aligned}$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ & = -\frac{1}{4} \log |x-1| + \frac{1}{4} \log |x+1| + \end{aligned}$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{4} \log |x-1| + \frac{1}{4} \log |x+1| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x + \text{cost.} \end{aligned}$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{4} \log |x-1| + \frac{1}{4} \log |x+1| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x + \text{cost.} \\ &= \frac{1}{4} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x + \text{cost.} \end{aligned}$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{4} \log |x-1| + \frac{1}{4} \log |x+1| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x + \text{cost.} \\ &= \frac{1}{4} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x + \text{cost.} \end{aligned}$$

e l'esempio è concluso.