

Il teorema di Talete e alcune sue applicazioni

Michele Scaglia

Università Cattolica del Sacro Cuore

La corrispondenza di Talete

La corrispondenza di Talete

La corrispondenza di Talete è uno dei più significativi esempi di classi di grandezze direttamente proporzionali.

La corrispondenza di Talete

La corrispondenza di Talete è uno dei più significativi esempi di classi di grandezze direttamente proporzionali.
In particolare, si ha a che fare con classi di segmenti staccati su due rette (trasversali) da un fascio di rette tra loro parallele.

La corrispondenza di Talete

La corrispondenza di Talete è uno dei più significativi esempi di classi di grandezze direttamente proporzionali.

In particolare, si ha a che fare con classi di segmenti staccati su due rette (trasversali) da un fascio di rette tra loro parallele.

Fissiamo, nel piano, una retta a . Consideriamo quindi la totalità delle rette parallele ad a .

La corrispondenza di Talete

La corrispondenza di Talete è uno dei più significativi esempi di classi di grandezze direttamente proporzionali.

In particolare, si ha a che fare con classi di segmenti staccati su due rette (trasversali) da un fascio di rette tra loro parallele.

Fissiamo, nel piano, una retta a . Consideriamo quindi la totalità delle rette parallele ad a . Per comodità tracciamo solo alcune delle rette parallele ad a , cosicché la questione risulti più chiara. Chiamiamo b, c, d, e tali rette.

a

b

c

d

e

a

b

c

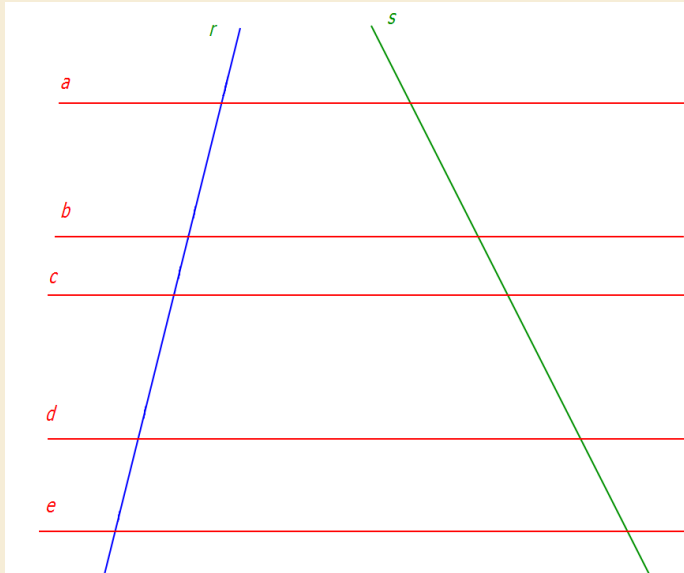
d

e

È comunque bene osservare che, a causa dell' ipotesi di continuità, le rette parallele ad *a* sono infinite e indistinguibili l'una dall'altra tanto da ricoprire l'intero piano.

A questo punto tracciamo due rette r ed s trasversali al fascio appena individuato.

A questo punto tracciamo due rette r ed s trasversali al fascio appena individuato.



Ogni coppia di rette del fascio iniziale stacca un segmento sulla retta r e un segmento sulla retta s .

Ogni coppia di rette del fascio iniziale stacca un segmento sulla retta r e un segmento sulla retta s .

Ad esempio, le rette a e b della figura staccano un segmento, chiamiamolo AB , e un segmento, chiamiamolo, $A'B'$ sulle rette r e s rispettivamente.

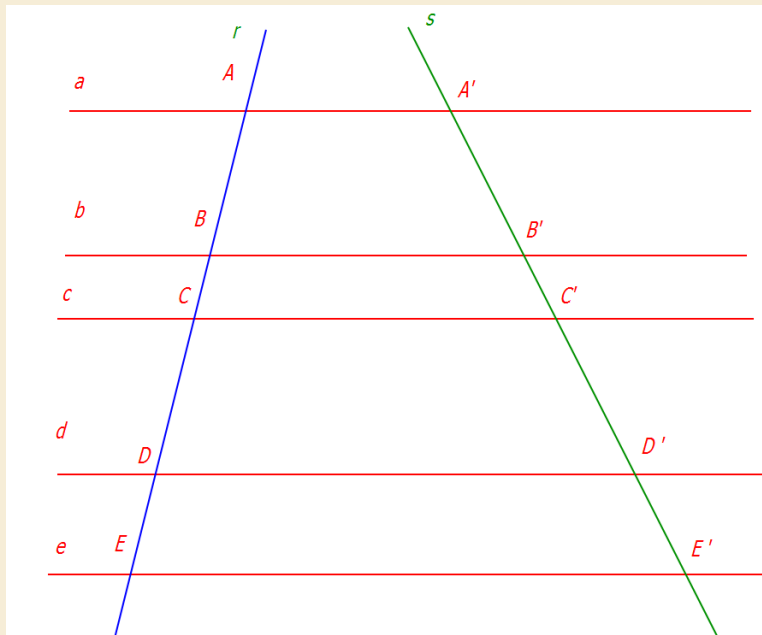
Ogni coppia di rette del fascio iniziale stacca un segmento sulla retta r e un segmento sulla retta s .

Ad esempio, le rette a e b della figura staccano un segmento, chiamiamolo AB , e un segmento, chiamiamolo, $A'B'$ sulle rette r e s rispettivamente. E così via, le due rette del fascio c e d staccano due segmenti CD ed $C'D'$ su r ed s .

Ogni coppia di rette del fascio iniziale stacca un segmento sulla retta r e un segmento sulla retta s .

Ad esempio, le rette a e b della figura staccano un segmento, chiamiamolo AB , e un segmento, chiamiamolo, $A'B'$ sulle rette r e s rispettivamente. E così via, le due rette del fascio c e d staccano due segmenti CD ed $C'D'$ su r ed s .

Mostriamo questa situazione aggiungendo i punti di intersezione tra ciascuna retta del fascio disegnata e le due trasversali:



Definizione

In accordo con la configurazione precedente, diciamo **corrispondenti** i due segmenti che si vengono a staccare sulle rette r ed s ogniqualvolta si fissi una certa coppia di rette nel fascio assegnato.

Definizione

In accordo con la configurazione precedente, diciamo **corrispondenti** i due segmenti che si vengono a staccare sulle rette r ed s ogniquialolta si fissi una certa coppia di rette nel fascio assegnato.

Ad esempio, i segmenti AB e $A'B'$ sono corrispondenti nel senso della definizione appena data.

Definizione

In accordo con la configurazione precedente, diciamo **corrispondenti** i due segmenti che si vengono a staccare sulle rette r ed s ogniqualvolta si fissi una certa coppia di rette nel fascio assegnato.

Ad esempio, i segmenti AB e $A'B'$ sono corrispondenti nel senso della definizione appena data.

La corrispondenza appena introdotta, tra la classe dei segmenti staccati dal fascio di parallele sulla retta r e quella dei segmenti staccati sulla retta s prende il nome di **Corrispondenza di Talete**.

Definizione

In accordo con la configurazione precedente, diciamo **corrispondenti** i due segmenti che si vengono a staccare sulle rette r ed s ogniqualelta si fissi una certa coppia di rette nel fascio assegnato.

Ad esempio, i segmenti AB e $A'B'$ sono corrispondenti nel senso della definizione appena data.

La corrispondenza appena introdotta, tra la classe dei segmenti staccati dal fascio di parallele sulla retta r e quella dei segmenti staccati sulla retta s prende il nome di **Corrispondenza di Talete**.

È possibile dimostrare un importante risultato associato alla corrispondenza di Talete.

Teorema di Talete

Teorema di Talete

Il teorema che ora enunciamo e dimostriamo prende il nome di Teorema di Talete.

Teorema di Talete

Il teorema che ora enunciamo e dimostriamo prende il nome di Teorema di Talete.

Teorema di Talete

Nella corrispondenza di Talete, le due classi di segmenti staccati dal fascio di parallele sulle trasversali r e s sono **classi direttamente proporzionali**.

Teorema di Talete

Il teorema che ora enunciamo e dimostriamo prende il nome di Teorema di Talete.

Teorema di Talete

Nella corrispondenza di Talete, le due classi di segmenti staccati dal fascio di parallele sulle trasversali r e s sono **classi direttamente proporzionali**.

Dimostrazione del Teorema di Talete

Dimostrazione del Teorema di Talete

Dimostrazione.

Dimostrazione del Teorema di Talete

Dimostrazione.

A questo punto vediamo la dimostrazione del teorema appena enunciato.

Dimostrazione del Teorema di Talete

Dimostrazione.

A questo punto vediamo la dimostrazione del teorema appena enunciato. Per prima cosa dimostriamo un importante risultato riguardante la configurazione che stiamo studiando.

Dimostrazione del Teorema di Talete

Dimostrazione.

A questo punto vediamo la dimostrazione del teorema appena enunciato. Per prima cosa dimostriamo un importante risultato riguardante la configurazione che stiamo studiando.

Teorema del Fascio

La corrispondenza di Talete associa a segmenti tra loro uguali su r , segmenti tra loro uguali su s ;

Dimostrazione del Teorema di Talete

Dimostrazione.

A questo punto vediamo la dimostrazione del teorema appena enunciato. Per prima cosa dimostriamo un importante risultato riguardante la configurazione che stiamo studiando.

Teorema del Fascio

La corrispondenza di Talete associa a segmenti tra loro uguali su r , segmenti tra loro uguali su s ; inoltre, fa corrispondere alla somma di due segmenti su r la somma dei segmenti corrispondenti su s .

Dimostrazione del Teorema di Talete

Dimostrazione.

A questo punto vediamo la dimostrazione del teorema appena enunciato. Per prima cosa dimostriamo un importante risultato riguardante la configurazione che stiamo studiando.

Teorema del Fascio

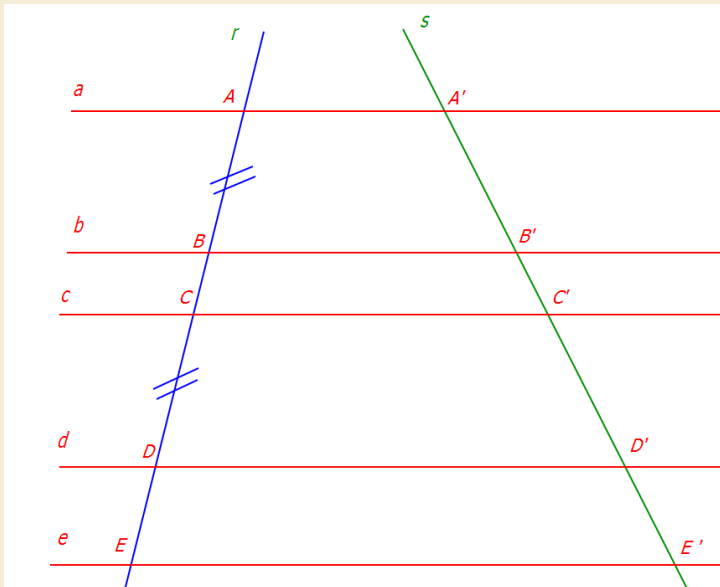
La corrispondenza di Talete associa a segmenti tra loro uguali su r , segmenti tra loro uguali su s ; inoltre, fa corrispondere alla somma di due segmenti su r la somma dei segmenti corrispondenti su s .

La dimostrazione di questo fatto fa ricorso ai criteri di parallelismo e alle proprietà dei triangoli e dei quadrilateri, in particolare i parallelogrammi.

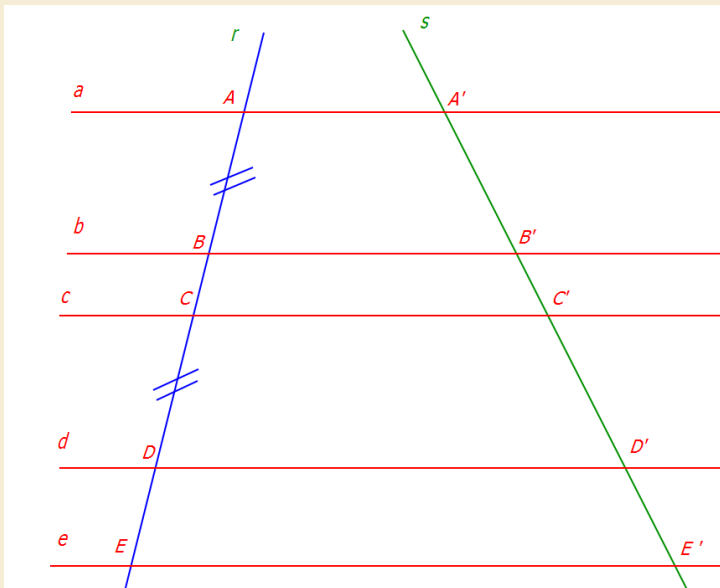
Consideriamo quindi la configurazione prima introdotta supponendo, per ipotesi, che si abbia ad esempio $AB = CD$.

Consideriamo quindi la configurazione prima introdotta supponendo, per ipotesi, che si abbia ad esempio $AB = CD$. Vorremo dimostrare che $A'B' = C'D'$.

Consideriamo quindi la configurazione prima introdotta supponendo, per ipotesi, che si abbia ad esempio $AB = CD$. Vorremo dimostrare che $A'B' = C'D'$.

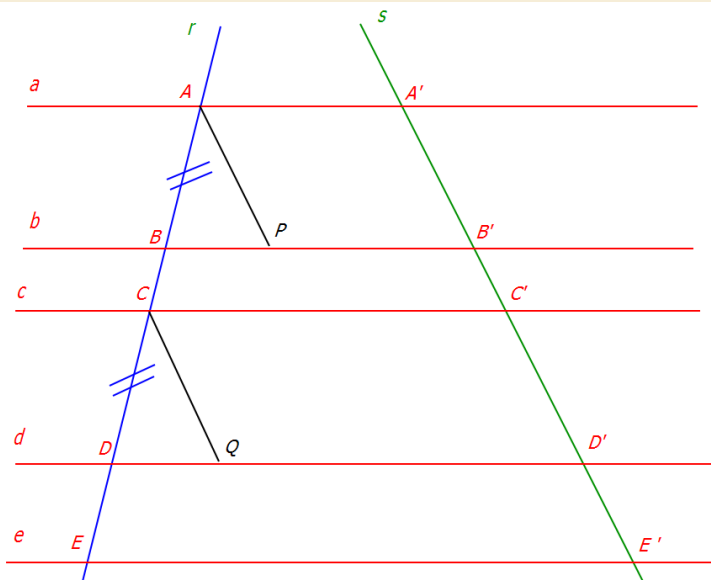


Consideriamo quindi la configurazione prima introdotta supponendo, per ipotesi, che si abbia ad esempio $AB = CD$. Vorremo dimostrare che $A'B' = C'D'$.



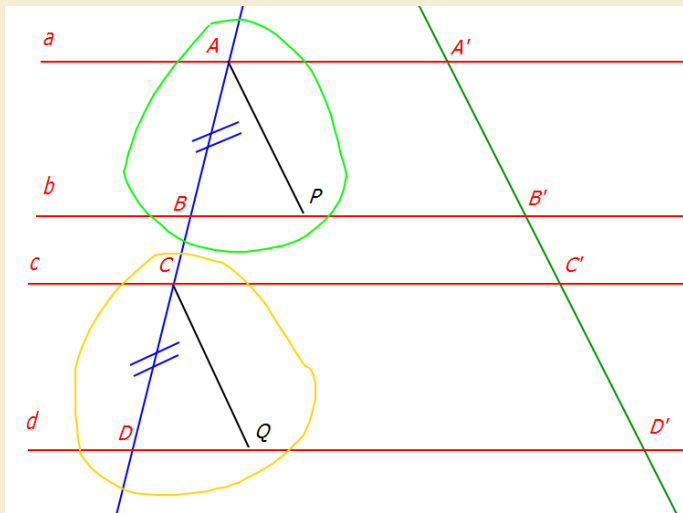
Dal punto A e dal punto C tracciamo le due rette parallele alla retta s e denotiamo con P e Q i punti in cui tali rette intersecano rispettivamente le due rette b e d del fascio di rette parallele ad a .

Dal punto A e dal punto C tracciamo le due rette parallele alla retta s e denotiamo con P e Q i punti in cui tali rette intersecano rispettivamente le due rette b e d del fascio di rette parallele ad a .

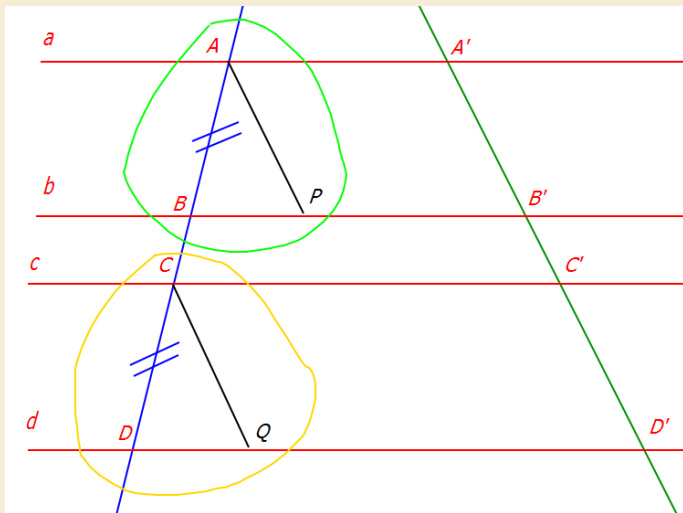


In questo modo si vengono a formare due triangoli ABP e CDQ .

In questo modo si vengono a formare due triangoli ABP e CDQ .



In questo modo si vengono a formare due triangoli ABP e CDQ .

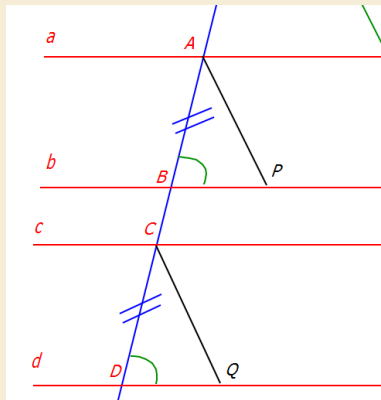


Tali triangoli hanno:

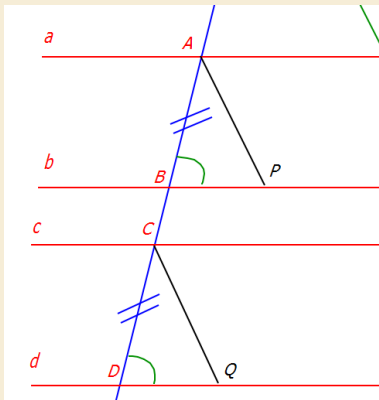
① $AB = CD$ per ipotesi,

- ① $AB = CD$ per ipotesi,
- ② $\angle ABP = \angle CDQ$ perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele b e d con la trasversale r ,

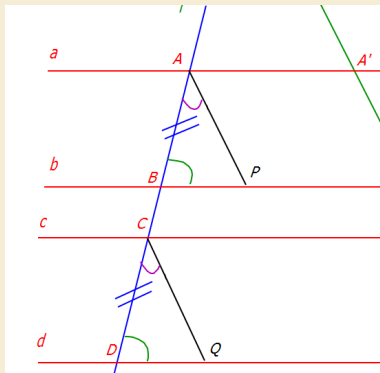
- ① $AB = CD$ per ipotesi,
- ② $\angle ABP = \angle CDQ$ perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele b e d con la trasversale r ,

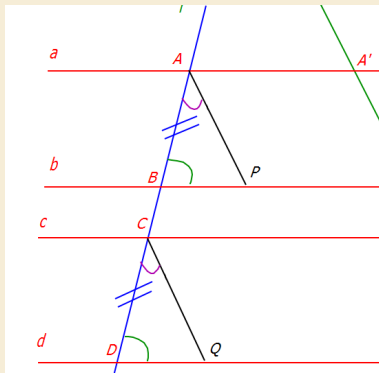


- ① $AB = CD$ per ipotesi,
- ② $ABP = CDQ$ perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele b e d con la trasversale r ,

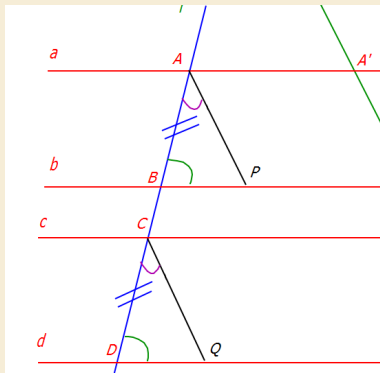


- ③ $BAP = DQC$ perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele AP e CQ con la trasversale t (osserviamo che le rette AP e CQ sono entrambe parallele alla stessa retta t , pertanto, per la proprietà transitiva del parallelismo, sono tra loro parallele).

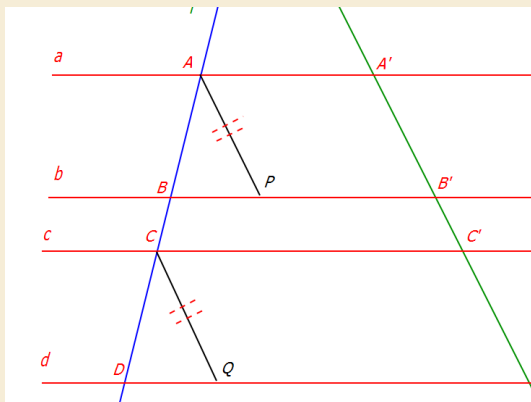


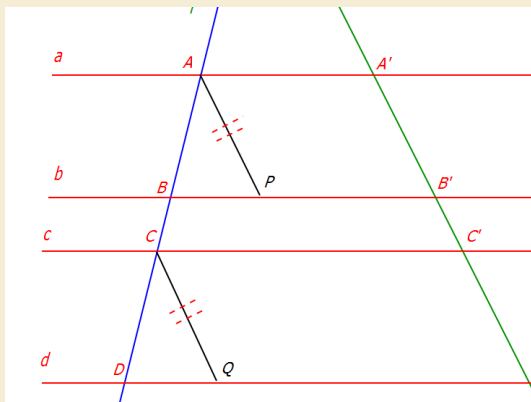


Ne segue, dal Secondo Criterio di Uguaglianza dei triangoli, che i due triangoli ABP e CDQ sono uguali.

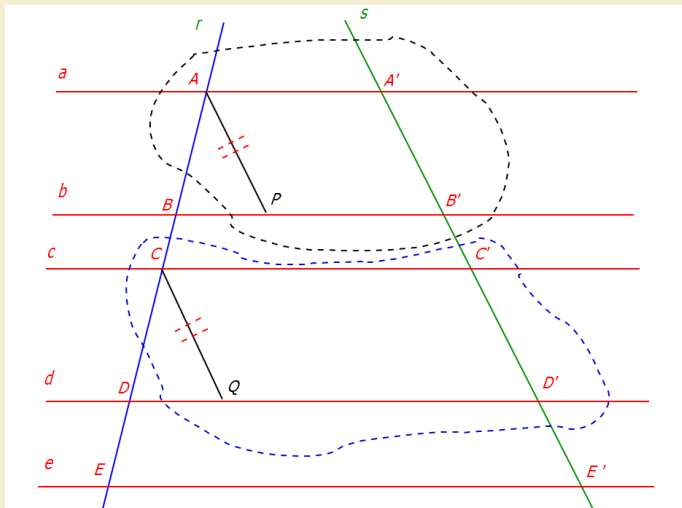


Ne segue, dal Secondo Criterio di Uguaglianza dei triangoli, che i due triangoli ABP e CDQ sono uguali. In particolare, risulta $AP = CQ$, come evidenziamo in figura:





Se consideriamo i due quadrilateri $AA'B'P$ e $C'D'QC$ constatiamo che essi sono dei parallelogrammi: infatti hanno i lati a due a due paralleli a causa di come sono stati costruiti nel corso della dimostrazione:



Pertanto, a causa delle proprietà dei parallelogrammi, si ha

$$AP = A'B', \quad CQ = C'D'.$$

Pertanto, poiché, per quanto dedotto in precedenza, $AP = CQ$, si ha, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza che

$$A'B' = C'D',$$

Pertanto, poiché, per quanto dedotto in precedenza, $AP = CQ$, si ha, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza che

$$A'B' = C'D',$$

e questa è la prima parte della tesi del Teorema del Fascio.

Pertanto, poiché, per quanto dedotto in precedenza, $AP = CQ$, si ha, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza che

$$A'B' = C'D',$$

e questa è la prima parte della tesi del Teorema del Fascio.

Per quanto riguarda la seconda parte, consideriamo sulla retta r due segmenti *consecutivi*, per esempio AB e BC .

Pertanto, poiché, per quanto dedotto in precedenza, $AP = CQ$, si ha, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza che

$$A'B' = C'D',$$

e questa è la prima parte della tesi del Teorema del Fascio.

Per quanto riguarda la seconda parte, consideriamo sulla retta r due segmenti *consecutivi*, per esempio AB e BC . A tali segmenti corrispondono su s i segmenti *consecutivi* $A'B'$ e $B'C'$. Di conseguenza, al segmento $AC = AB + BC$ della retta r corrisponde il segmento $A'C' = A'B' + B'C'$ della retta t .

Pertanto, poiché, per quanto dedotto in precedenza, $AP = CQ$, si ha, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza che

$$A'B' = C'D',$$

e questa è la prima parte della tesi del Teorema del Fascio.

Per quanto riguarda la seconda parte, consideriamo sulla retta r due segmenti *consecutivi*, per esempio AB e BC . A tali segmenti corrispondono su s i segmenti *consecutivi* $A'B'$ e $B'C'$. Di conseguenza, al segmento $AC = AB + BC$ della retta r corrisponde il segmento $A'C' = A'B' + B'C'$ della retta t .

Il teorema del fascio è quindi dimostrato.

A questo punto, per poter giungere alla dimostrazione del Teorema di Talete, è necessario ricordare un importante criterio riguardante le classi di grandezze.

A questo punto, per poter giungere alla dimostrazione del Teorema di Talete, è necessario ricordare un importante criterio riguardante le classi di grandezze.

Criterio di Proporzionalità diretta tra classi di grandezze

A questo punto, per poter giungere alla dimostrazione del Teorema di Talete, è necessario ricordare un importante criterio riguardante le classi di grandezze.

Criterio di Proporzionalità diretta tra classi di grandezze

Siano G e G' due classi di grandezze tra cui sia definita una certa corrispondenza biunivoca.

A questo punto, per poter giungere alla dimostrazione del Teorema di Talete, è necessario ricordare un importante criterio riguardante le classi di grandezze.

Criterio di Proporzionalità diretta tra classi di grandezze

Siano G e G' due classi di grandezze tra cui sia definita una certa corrispondenza biunivoca.

Allora G e G' sono direttamente proporzionali SE, E SOLO SE:

A questo punto, per poter giungere alla dimostrazione del Teorema di Talete, è necessario ricordare un importante criterio riguardante le classi di grandezze.

Criterio di Proporzionalità diretta tra classi di grandezze

Siano G e G' due classi di grandezze tra cui sia definita una certa corrispondenza biunivoca.

Allora G e G' sono direttamente proporzionali SE, E SOLO SE:

- a grandezze uguali nella classe G corrispondono grandezze uguali nella classe G' ;
- alla somma di due grandezze della classe di G corrisponde la somma delle corrispondenti grandezze della classe G' .

A questo punto, per poter giungere alla dimostrazione del Teorema di Talete, è necessario ricordare un importante criterio riguardante le classi di grandezze.

Criterio di Proporzionalità diretta tra classi di grandezze

Siano G e G' due classi di grandezze tra cui sia definita una certa corrispondenza biunivoca.

Allora G e G' sono direttamente proporzionali SE, E SOLO SE:

- a grandezze uguali nella classe G corrispondono grandezze uguali nella classe G' ;
- alla somma di due grandezze della classe di G corrisponde la somma delle corrispondenti grandezze della classe G' .

Cioè, le due condizioni appena date, risultano necessarie e sufficienti per garantire che due classi G e G' siano proporzionali.

A questo punto, per poter giungere alla dimostrazione del Teorema di Talete, è necessario ricordare un importante criterio riguardante le classi di grandezze.

Criterio di Proporzionalità diretta tra classi di grandezze

Siano G e G' due classi di grandezze tra cui sia definita una certa corrispondenza biunivoca.

Allora G e G' sono direttamente proporzionali SE, E SOLO SE:

- a grandezze uguali nella classe G corrispondono grandezze uguali nella classe G' ;
- alla somma di due grandezze della classe di G corrisponde la somma delle corrispondenti grandezze della classe G' .

Cioè, le due condizioni appena date, risultano necessarie e sufficienti per garantire che due classi G e G' siano proporzionali.

Cioè, se sappiamo che le classi G e G' sono proporzionali allora ne segue che valgono le due condizioni scritte. Viceversa, se valgono le due condizioni allora le due classi sono proporzionali.

Di tale criterio noi utilizzeremo la seconda implicazione.

Di tale criterio noi utilizzeremo la seconda implicazione.
Infatti, la dimostrazione del Teorema del Fascio, ci ha portato a constatare che per i segmenti staccati dal fascio sulla retta r e quelli corrispondenti sulla retta s valgono le due proprietà del criterio.

Di tale criterio noi utilizzeremo la seconda implicazione.

Infatti, la dimostrazione del Teorema del Fascio, ci ha portato a constatare che per i segmenti staccati dal fascio sulla retta r e quelli corrispondenti sulla retta s valgono le due proprietà del criterio.

Pertanto, risulta immediatamente dedotta la tesi del Teorema di Talete: **le due classi di segmenti staccati dal fascio di parallele sulle trasversali r, s sono classi direttamente proporzionali.**

Di tale criterio noi utilizzeremo la seconda implicazione.

Infatti, la dimostrazione del Teorema del Fascio, ci ha portato a constatare che per i segmenti staccati dal fascio sulla retta r e quelli corrispondenti sulla retta s valgono le due proprietà del criterio.

Pertanto, risulta immediatamente dedotta la tesi del Teorema di Talete: **le due classi di segmenti staccati dal fascio di parallele sulle trasversali r, s sono classi direttamente proporzionali.**

A questo punto, la dimostrazione del Teorema di Talete è effettivamente completa.

Conseguenze

Conseguenze

Il teorema associato alla corrispondenza di Talete si dimostra uno strumento fondamentale nella trattazione della similitudine tra i triangoli.

Conseguenze

Il teorema associato alla corrispondenza di Talete si dimostra uno strumento fondamentale nella trattazione della similitudine tra i triangoli. In particolare, si dimostra essenziale nella dimostrazione del primo e del secondo criterio di similitudine per triangoli.

Conseguenze

Il teorema associato alla corrispondenza di Talete si dimostra uno strumento fondamentale nella trattazione della similitudine tra i triangoli. In particolare, si dimostra essenziale nella dimostrazione del primo e del secondo criterio di similitudine per triangoli.

Anzitutto, dobbiamo ricordare cosa si intenda per similitudine tra triangoli, dopodiché illustremo la dimostrazione dei due criteri che vedono l'intervento del Teorema di Talete.

Similitudine tra Triangoli

Similitudine tra Triangoli

Triangoli Simili

Due triangoli si dicono **simili** quando hanno **ordinatamente** i tre angoli uguali e i lati in proporzione.

Similitudine tra Triangoli

Triangoli Simili

Due triangoli si dicono **simili** quando hanno **ordinatamente** i tre angoli uguali e i lati in proporzione.

Considerati due triangoli simili, chiamiamo *corrispondenti* o *omologhi* sia i vertici degli angoli uguali che i lati opposti a tali angoli uguali.

Similitudine tra Triangoli

Triangoli Simili

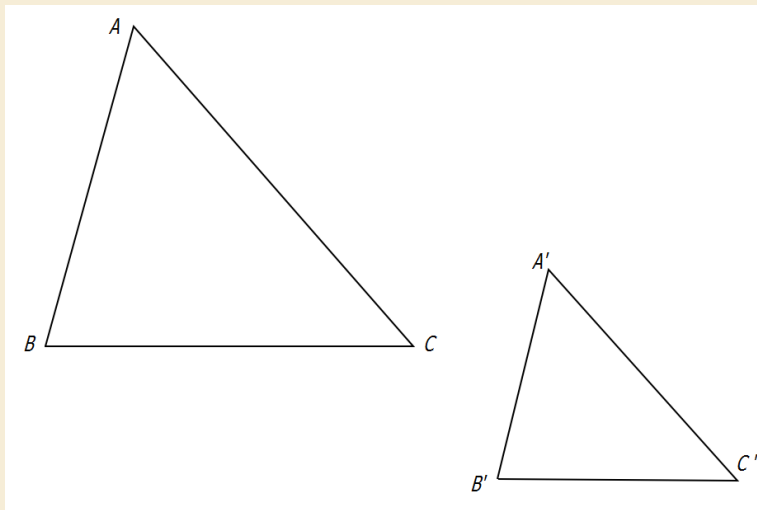
Due triangoli si dicono **simili** quando hanno **ordinatamente** i tre angoli uguali e i lati in proporzione.

Considerati due triangoli simili, chiamiamo *corrispondenti* o *omologhi* sia i vertici degli angoli uguali che i lati opposti a tali angoli uguali.

In base a questa definizione, comprendiamo come due triangoli simili siano da immaginarsi (a causa della proporzionalità) come due figure di cui una è l'ingrandimento (o il rimpicciolimento) dell'altra.

Mostriamo due triangoli simili:

Mostriamo due triangoli simili:



Il rapporto costante tra lati omologhi lo chiamiamo ragionevolmente **rapporto di similitudine**.

Il rapporto costante tra lati omologhi lo chiamiamo ragionevolmente **rapporto di similitudine**.

Osserviamo che se il rapporto di similitudine dovessero essere 1, allora, in tal caso, i due triangoli sarebbero uguali e la similitudine si ridurrebbe alla uguaglianza.

Il rapporto costante tra lati omologhi lo chiamiamo ragionevolmente **rapporto di similitudine**.

Osserviamo che se il rapporto di similitudine dovessero essere 1, allora, in tal caso, i due triangoli sarebbero uguali e la similitudine si ridurrebbe alla uguaglianza.

La relazione di similitudine tra triangoli è una **relazione di equivalenza** in quanto gode delle *proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva*.

Il rapporto costante tra lati omologhi lo chiamiamo ragionevolmente **rapporto di similitudine**.

Osserviamo che se il rapporto di similitudine dovessere essere 1, allora, in tal caso, i due triangoli sarebbero uguali e la similitudine si ridurrebbe alla uguaglianza.

La relazione di similitudine tra triangoli è una **relazione di equivalenza** in quanto gode delle *proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva*.

Come accadeva con l'uguaglianza di triangoli, per dimostrare la quale non era necessario verificare che tutti i lati e gli angoli fossero ordinatamente uguali, allo stesso modo, per provare che due triangoli sono simili non occorre controllare che siano verificate tutte le condizioni richieste dalla definizione.

Come accadeva con l'uguaglianza di triangoli, per dimostrare la quale non era necessario verificare che tutti i lati e gli angoli fossero ordinatamente uguali, allo stesso modo, per provare che due triangoli sono simili non occorre controllare che siano verificate tutte le condizioni richieste dalla definizione.

Esistono anche in quest'ambito dei criteri, i cosiddetti **criteri di similitudine**, che consentono di stabilire in modo più rapido l'eventuale similitudine tra due triangoli assegnati.

Come accadeva con l'uguaglianza di triangoli, per dimostrare la quale non era necessario verificare che tutti i lati e gli angoli fossero ordinatamente uguali, allo stesso modo, per provare che due triangoli sono simili non occorre controllare che siano verificate tutte le condizioni richieste dalla definizione.

Esistono anche in quest'ambito dei criteri, i cosiddetti **criteri di similitudine**, che consentono di stabilire in modo più rapido l'eventuale similitudine tra due triangoli assegnati.

Nelle diapositive che seguono enunceremo e dimostreremo tali criteri.

Primo Criterio di Similitudine

Primo Criterio di Similitudine

Vediamo il Primo Criterio di Similitudine.

Primo Criterio di Similitudine

Vediamo il Primo Criterio di Similitudine.

Primo Criterio di Similitudine

Se due triangoli hanno due lati ordinatamente uguali sono simili.

Primo Criterio di Similitudine

Vediamo il Primo Criterio di Similitudine.

Primo Criterio di Similitudine

Se due triangoli hanno due lati ordinatamente uguali sono simili.

Dimostrazione.

Primo Criterio di Similitudine

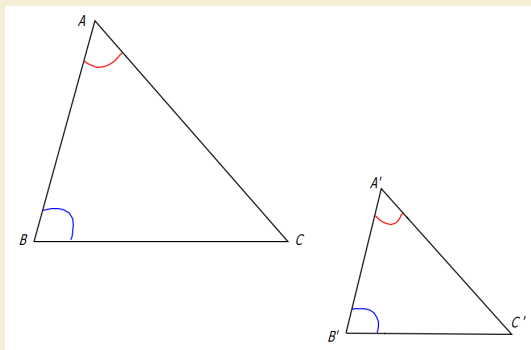
Vediamo il Primo Criterio di Similitudine.

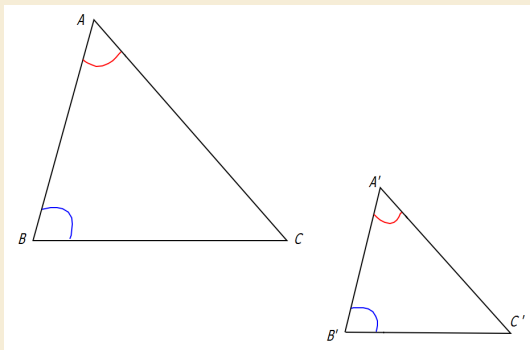
Primo Criterio di Similitudine

Se due triangoli hanno due lati ordinatamente uguali sono simili.

Dimostrazione.

Consideriamo due triangoli ABC e $A'B'C'$ con due angoli ordinatamente uguali: siano ad esempio $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ ordinatamente uguali ai due angoli $\widehat{A'}$ e $\widehat{B'}$.





A causa del teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo, si ha che anche $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Pertanto, i due triangoli hanno, nell'ordine, tutti e tre gli angoli uguali (e questa è la prima richiesta affinché possiamo concludere che i due triangoli siano simili).

Pertanto, i due triangoli hanno, nell'ordine, tutti e tre gli angoli uguali (e questa è la prima richiesta affinché possiamo concludere che i due triangoli siano simili). Per dimostrare la similitudine dei due triangoli, ci resta quindi da provare, in base alla definizione, che i lati sono ordinatamente i proporzione.

Pertanto, i due triangoli hanno, nell'ordine, tutti e tre gli angoli uguali (e questa è la prima richiesta affinché possiamo concludere che i due triangoli siano simili). Per dimostrare la similitudine dei due triangoli, ci resta quindi da provare, in base alla definizione, che i lati sono ordinatamente i proporzione.

Dobbiamo cioè provare che

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'.$$

Pertanto, i due triangoli hanno, nell'ordine, tutti e tre gli angoli uguali (e questa è la prima richiesta affinché possiamo concludere che i due triangoli siano simili). Per dimostrare la similitudine dei due triangoli, ci resta quindi da provare, in base alla definizione, che i lati sono ordinatamente i proporzione.

Dobbiamo cioè provare che

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'.$$

Osserviamo che, banalmente, se $AB = A'B'$, il Primo Criterio di uguaglianza dei triangoli ci consentirebbe di concludere immediatamente che i due triangoli assegnati sono uguali, quindi simili.

Mettiamoci quindi nel caso non banale in cui i due lati AB e $A'B'$ non sono uguali.

Mettiamoci quindi nel caso non banale in cui i due lati AB e $A'B'$ non sono uguali.

Supponiamo, ad esempio, $AB > A'B'$.

Mettiamoci quindi nel caso non banale in cui i due lati AB e $A'B'$ non sono uguali.

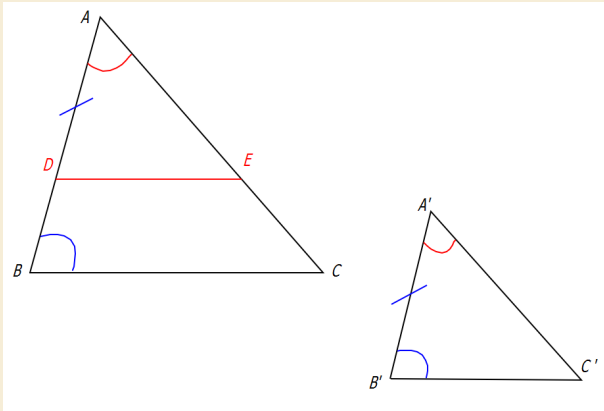
Supponiamo, ad esempio, $AB > A'B'$.

Sul lato AB consideriamo un segmento $AD = A'B'$ e dal punto D tracciamo la retta parallela al lato AB che intersechi il lato AC nel punto E .

Mettiamoci quindi nel caso non banale in cui i due lati AB e $A'B'$ non sono uguali.

Supponiamo, ad esempio, $AB > A'B'$.

Sul lato AB consideriamo un segmento $AD = A'B'$ e dal punto D tracciamo la retta parallela al lato AB che intersechi il lato AC nel punto E .



Come conseguenza del **Teorema del Talete** (vedi approfondimento, conseguenza 1) applicato al triangolo ABC tagliato dalla parallela DE al lato BC si ha che vale la proporzione

$$AB : AD = AC : AE.$$

Come conseguenza del **Teorema del Talete** (vedi approfondimento, conseguenza 1) applicato al triangolo ABC tagliato dalla parallela DE al lato BC si ha che vale la proporzione

$$AB : AD = AC : AE.$$

Osserviamo che si ha $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ e $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ poiché corrispondenti rispetto alle rette parallele BC e DE tagliate dalle trasversali AB e AC .

Come conseguenza del **Teorema del Talete** (vedi approfondimento, conseguenza 1) applicato al triangolo ABC tagliato dalla parallela DE al lato BC si ha che vale la proporzione

$$AB : AD = AC : AE.$$

Osserviamo che si ha $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ e $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ poiché corrispondenti rispetto alle rette parallele BC e DE tagliate dalle trasversali AB e AC .
Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, si ha pure

$$\widehat{ADE} = \widehat{A'B'C'}, \quad \widehat{AED} = \widehat{A'C'B'}.$$

Come conseguenza del **Teorema del Talete** (vedi approfondimento, conseguenza 1) applicato al triangolo ABC tagliato dalla parallela DE al lato BC si ha che vale la proporzione

$$AB : AD = AC : AE.$$

Osserviamo che si ha $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ e $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ poiché corrispondenti rispetto alle rette parallele BC e DE tagliate dalle trasversali AB e AC .

Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, si ha pure

$$\widehat{ADE} = \widehat{A'B'C'}, \quad \widehat{AED} = \widehat{A'C'B'}.$$

A questo punto è chiaro che i due triangoli ADE e $A'B'C'$ sono uguali per il Secondo Criterio di uguaglianza.

La proporzione ricavata dal Teorema di Talete diviene quindi

$$AB : A'B' = AC : A'C'.$$

La proporzione ricavata dal Teorema di Talete diviene quindi

$$AB : A'B' = AC : A'C'.$$

Seguendo lo stesso tipo di ragionamento, si prova pure che si ha

$$AB : A'B' = BC : B'C'.$$

La proporzione ricavata dal Teorema di Talete diviene quindi

$$AB : A'B' = AC : A'C'.$$

Seguendo lo stesso tipo di ragionamento, si prova pure che si ha

$$AB : A'B' = BC : B'C'.$$

In questa maniera, abbiamo provato che i due triangoli hanno anche i lati in proporzione, quindi sono simili.

La proporzione ricavata dal Teorema di Talete diviene quindi

$$AB : A'B' = AC : A'C'.$$

Seguendo lo stesso tipo di ragionamento, si prova pure che si ha

$$AB : A'B' = BC : B'C'.$$

In questa maniera, abbiamo provato che i due triangoli hanno anche i lati in proporzione, quindi sono simili.

La dimostrazione è conclusa.

Secondo Criterio di Similitudine

Secondo Criterio di Similitudine

Secondo Criterio di Similitudine

Se due triangoli hanno due lati in proporzione e l'angolo tra essi compreso uguale sono simili.

Secondo Criterio di Similitudine

Secondo Criterio di Similitudine

Se due triangoli hanno due lati in proporzione e l'angolo tra essi compreso uguale sono simili.

Dimostrazione.

Consideriamo nuovamente due triangoli ABC e $A'B'C'$ e supponiamo che si abbia $\hat{A} = \hat{A}'$ e $AB : A'B' = AC : A'C'$.

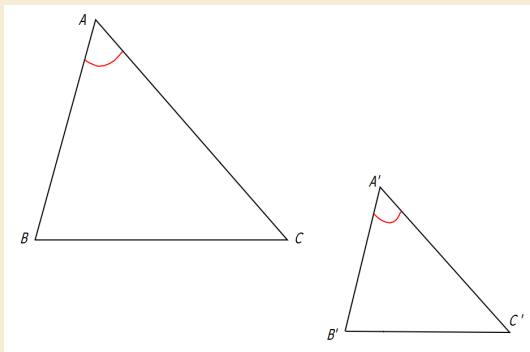
Secondo Criterio di Similitudine

Secondo Criterio di Similitudine

Se due triangoli hanno due lati in proporzione e l'angolo tra essi compreso uguale sono simili.

Dimostrazione.

Consideriamo nuovamente due triangoli ABC e $A'B'C'$ e supponiamo che si abbia $\hat{A} = \hat{A'}$ e $AB : A'B' = AC : A'C'$.



Come prima, se si avesse $AB = A'B'$, allora si avrebbe automaticamente anche $AC = A'C'$, quindi, per il primo criterio di uguaglianza tra triangoli, si dedurrebbe che i due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono uguali.

Come prima, se si avesse $AB = A'B'$, allora si avrebbe automaticamente anche $AC = A'C'$, quindi, per il primo criterio di uguaglianza tra triangoli, si dedurrebbe che i due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono uguali.

Consideriamo quindi il caso non banale in cui $AB \neq A'B'$: supponiamo, ad esempio, $AB > A'B'$.

Come prima, se si avesse $AB = A'B'$, allora si avrebbe automaticamente anche $AC = A'C'$, quindi, per il primo criterio di uguaglianza tra triangoli, si dedurrebbe che i due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono uguali.

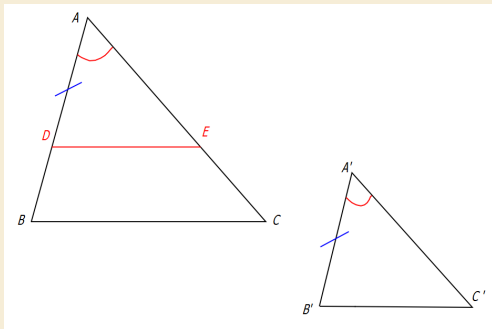
Consideriamo quindi il caso non banale in cui $AB \neq A'B'$: supponiamo, ad esempio, $AB > A'B'$.

Come prima, consideriamo sul lato AB un segmento $AD = A'B'$ e dal punto D tracciamo la retta parallela al lato BC che intersechi in E il lato AC .

Come prima, se si avesse $AB = A'B'$, allora si avrebbe automaticamente anche $AC = A'C'$, quindi, per il primo criterio di uguaglianza tra triangoli, si dedurrebbe che i due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono uguali.

Consideriamo quindi il caso non banale in cui $AB \neq A'B'$: supponiamo, ad esempio, $AB > A'B'$.

Come prima, consideriamo sul lato AB un segmento $AD = A'B'$ e dal punto D tracciamo la retta parallela al lato BC che intersechi in E il lato AC .



Di nuovo, per la conseguenza del Teorema di Talete, si ha che vale

$$AB : AD = AC : AE.$$

Di nuovo, per la conseguenza del Teorema di Talete, si ha che vale

$$AB : AD = AC : AE.$$

D'altra parte, per ipotesi, vale pure la proporzione

$$AB : A'B' = AC : A'C'.$$

Di nuovo, per la conseguenza del Teorema di Talete, si ha che vale

$$AB : AD = AC : AE.$$

D'altra parte, per ipotesi, vale pure la proporzione

$$AB : A'B' = AC : A'C'.$$

Ricordando che $AD = A'B'$ per costruzione, e che, in base alla teoria delle proporzioni, date tre grandezze in una proporzione esiste una sola grandezza quarta proporzionale, si ha necessariamente che

$$AE = A'C'.$$

Di conseguenza i triangoli ADE e $A'B'C'$ sono tra loro uguali per il primo criterio di uguaglianza.

Di conseguenza i triangoli ADE e $A'B'C'$ sono tra loro uguali per il primo criterio di uguaglianza.

Ma i triangoli ABC e ADE sono simili tra loro (a causa del Primo criterio di similitudine).

Di conseguenza i triangoli ADE e $A'B'C'$ sono tra loro uguali per il primo criterio di uguaglianza.

Ma i triangoli ABC e ADE sono simili tra loro (a causa del Primo criterio di similitudine).

Pertanto, sono simili tra loro anche i triangoli ABC e $A'B'C'$, come volevasi dimostrare.

A partire dai primi due criteri di similitudine tra triangoli, è possibile dimostrare anche il Terzo criterio di similitudine, del quale diamo solamente l'enunciato:

A partire dai primi due criteri di similitudine tra triangoli, è possibile dimostrare anche il Terzo criterio di similitudine, del quale diamo solamente l'enunciato:

Terzo Criterio di Similitudine

A partire dai primi due criteri di similitudine tra triangoli, è possibile dimostrare anche il Terzo criterio di similitudine, del quale diamo solamente l'enunciato:

Terzo Criterio di Similitudine

Se due triangoli hanno i tre lati ordinatamente in proporzione sono simili.

Altre Applicazioni

Altre Applicazioni

In questa sezione richiamiamo altre delle principali conseguenze del teorema di Talete.

Altre Applicazioni

In questa sezione richiamiamo altre delle principali conseguenze del teorema di Talete.

1)

Altre Applicazioni

In questa sezione richiamiamo altre delle principali conseguenze del teorema di Talete.

1)

La parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.

Altre Applicazioni

In questa sezione richiamiamo altre delle principali conseguenze del teorema di Talete.

1)

La parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.

Tale conseguenza è immediata.

Altre Applicazioni

In questa sezione richiamiamo altre delle principali conseguenze del teorema di Talete.

1)

La parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.

Tale conseguenza è immediata.

Infatti, il lato e la parallela sono da considerarsi come due delle infinite rette di un fascio tagliate dalle due trasversali coincidenti con i rimanenti due lati del triangolo.

Altre Applicazioni

In questa sezione richiamiamo altre delle principali conseguenze del teorema di Talete.

1)

La parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.

Tale conseguenza è immediata.

Infatti, il lato e la parallela sono da considerarsi come due delle infinite rette di un fascio tagliate dalle due trasversali coincidenti con i rimanenti due lati del triangolo.

Osserviamo pure, che dal vertice opposto al primo lato, è sempre possibile tracciare la parallela a tale lato, per mettersi nelle condizioni di invocare il Teorema di Talete.

Altre Applicazioni

In questa sezione richiamiamo altre delle principali conseguenze del teorema di Talete.

1)

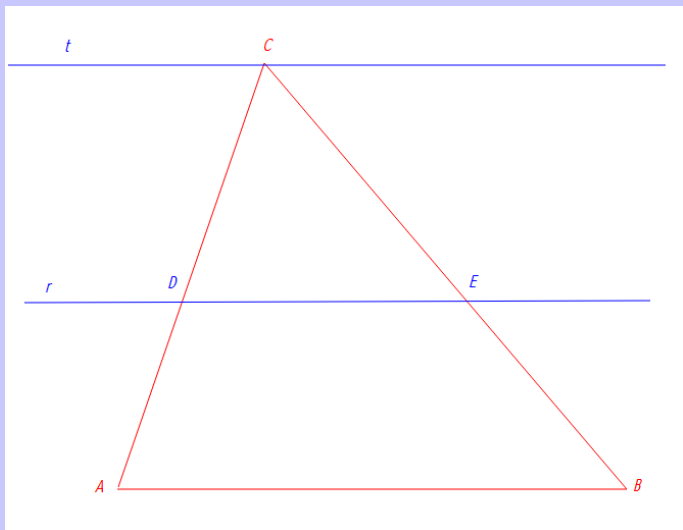
La parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.

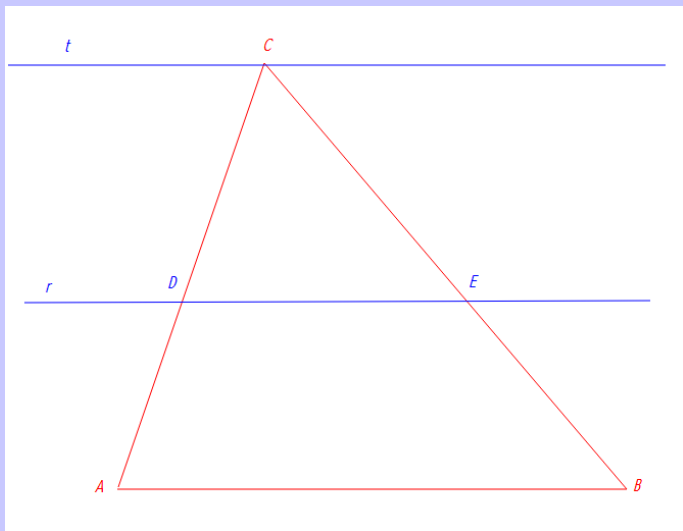
Tale conseguenza è immediata.

Infatti, il lato e la parallela sono da considerarsi come due delle infinite rette di un fascio tagliate dalle due trasversali coincidenti con i rimanenti due lati del triangolo.

Osserviamo pure, che dal vertice opposto al primo lato, è sempre possibile tracciare la parallela a tale lato, per mettersi nelle condizioni di invocare il Teorema di Talete.

Mostriamo con un disegno la situazione.





Risulta chiaro, a causa del Teorema di Talete, che valga la proporzione:

$$AC : AD = BC : BE.$$

Una seconda applicazione del Teorema di Talete è la seguente:

Una seconda applicazione del Teorema di Talete è la seguente:

2) Teorema della bisettrice

Una seconda applicazione del Teorema di Talete è la seguente:

2) Teorema della bisettrice

La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

Per dimostrarlo, consideriamo un triangolo ABC e tracciamo la bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$ denotando con D la sua intersezione col lato AC .

Una seconda applicazione del Teorema di Talete è la seguente:

2) Teorema della bisettrice

La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

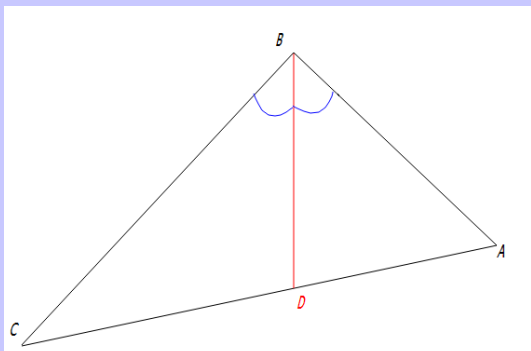
Per dimostrarlo, consideriamo un triangolo ABC e tracciamo la bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$ denotando con D la sua intersezione col lato AC . Sia pertanto BD tale bisettrice.

Una seconda applicazione del Teorema di Talete è la seguente:

2) Teorema della bisettrice

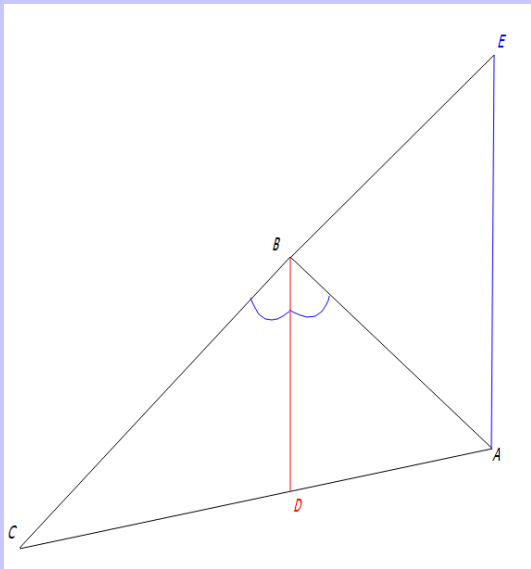
La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

Per dimostrarlo, consideriamo un triangolo ABC e tracciamo la bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$ denotando con D la sua intersezione col lato AC . Sia pertanto BD tale bisettrice.



A questo punto, tracciamo dal vertice A la parallela alla bisettrice BD e denotiamo con E il punto in cui tale retta incontra il prolungamento del lato CB .

A questo punto, tracciamo dal vertice A la parallela alla bisettrice BD e denotiamo con E il punto in cui tale retta incontra il prolungamento del lato CB .



Osserviamo che si ha

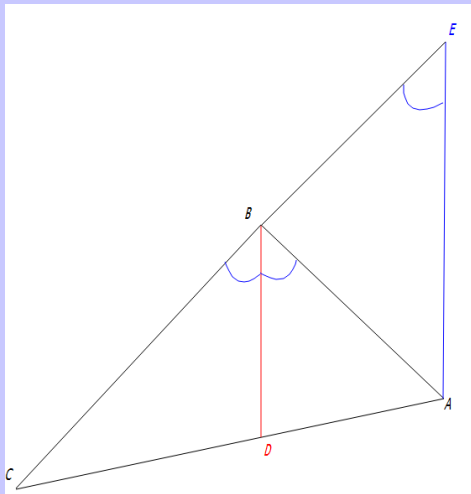
$$\widehat{AEB} = \widehat{DBC}$$

poiché corrispondenti rispetto alle rette parallele AE e DB tagliate dalla trasversale CE .

Osserviamo che si ha

$$\widehat{AEB} = \widehat{DBC}$$

poiché corrispondenti rispetto alle rette parallele AE e DB tagliate dalla trasversale CE .



Analogamente, si ha

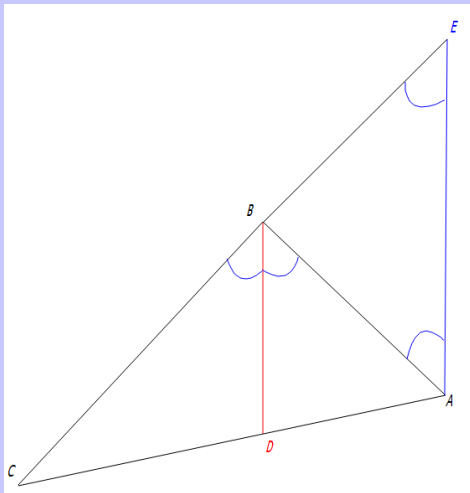
$$\widehat{EAB} = \widehat{ABD},$$

perché alterni interni rispetto alle parallele AE e DB tagliate dalla trasversale AB .

Analogamente, si ha

$$\widehat{EAB} = \widehat{ABD},$$

perché alterni interni rispetto alle parallele AE e DB tagliate dalla trasversale AB .



Ricordando che $\widehat{DBC} = \widehat{ABD}$ poiché BD è bisettrice di $\widehat{ABC}$, si ha

$$\widehat{AEB} = \widehat{DBC} = \widehat{ABD} = \widehat{EAB},$$

Ricordando che $\widehat{DBC} = \widehat{ABD}$ poiché BD è bisettrice di $\widehat{ABC}$, si ha

$$\widehat{AEB} = \widehat{DBC} = \widehat{ABD} = \widehat{EAB},$$

da cui, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza,

Ricordando che $\widehat{DBC} = \widehat{ABD}$ poiché BD è bisettrice di $\widehat{ABC}$, si ha

$$\widehat{AEB} = \widehat{DBC} = \widehat{ABD} = \widehat{EAB},$$

da cui, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza,

$$\widehat{AEB} = \widehat{EAB}.$$

Ricordando che $\widehat{DBC} = \widehat{ABD}$ poiché BD è bisettrice di $\widehat{ABC}$, si ha

$$\widehat{AEB} = \widehat{DBC} = \widehat{ABD} = \widehat{EAB},$$

da cui, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza,

$$\widehat{AEB} = \widehat{EAB}.$$

Pertanto, il triangolo AEB è isoscele sulla base AE (avendo due angoli uguali).

Ricordando che $\widehat{DBC} = \widehat{ABD}$ poiché BD è bisettrice di $\widehat{ABC}$, si ha

$$\widehat{AEB} = \widehat{DBC} = \widehat{ABD} = \widehat{EAB},$$

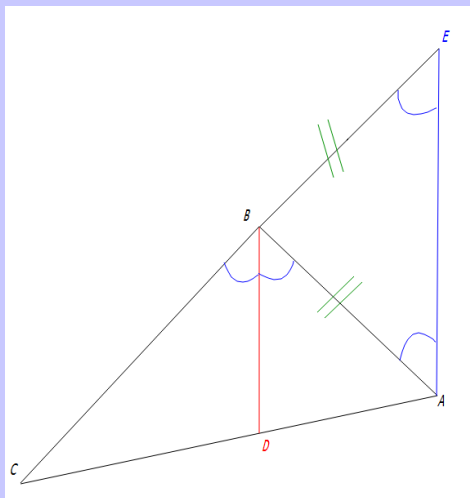
da cui, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza,

$$\widehat{AEB} = \widehat{EAB}.$$

Pertanto, il triangolo AEB è isoscele sulla base AE (avendo due angoli uguali).

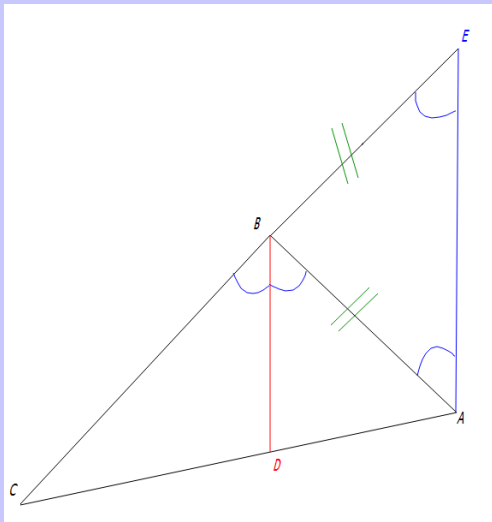
Di conseguenza si ha

$$EB = AB.$$



Per concludere, consideriamo il triangolo ACE , in cui la retta DB è, per costruzione, una parallela al lato AE .

Per concludere, consideriamo il triangolo ACE , in cui la retta DB è, per costruzione, una parallela al lato AE .



Per la prima conseguenza del Teorema di Talete dimostrata al punto 1), si ha immediatamente

$$EB : BC = AD : DC,$$

che, essendo $EB = AB$, divie, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza,

Per la prima conseguenza del Teorema di Talete dimostrata al punto 1), si ha immediatamente

$$EB : BC = AD : DC,$$

che, essendo $EB = AB$, divie, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza,

$$AB : BC = AD : DC,$$

Per la prima conseguenza del Teorema di Talete dimostrata al punto 1), si ha immediatamente

$$EB : BC = AD : DC,$$

che, essendo $EB = AB$, divie, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza,

$$AB : BC = AD : DC,$$

il che esprime proprio il fatto che la bisettrice di un angolo divide il lato opposto in due parti proporzionali agli altri due lati.