

Un'introduzione al piano proiettivo

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Obiettivi della lezione

In questa lezione vedremo le proprietà fondamentali del cosiddetto **piano proiettivo**.

Obiettivi della lezione

In questa lezione vedremo le proprietà fondamentali del cosiddetto **piano proiettivo**.

Saremo più precisi fra un po', ma in poche parole il piano proiettivo è un'estensione del piano ordinario (quello su cui ci si fa la geometria analitica, tanto per intenderci), in cui anche le direzioni delle rette diventano dei nuovi "punti" del piano.

Obiettivi della lezione

In questa lezione vedremo le proprietà fondamentali del cosiddetto **piano proiettivo**.

Saremo più precisi fra un po', ma in poche parole il piano proiettivo è un'estensione del piano ordinario (quello su cui ci si fa la geometria analitica, tanto per intenderci), in cui anche le direzioni delle rette diventano dei nuovi "punti" del piano.

In questo modo due rette parallele hanno un "punto" in comune: la loro direzione.

Obiettivi della lezione

In questa lezione vedremo le proprietà fondamentali del cosiddetto **piano proiettivo**.

Saremo più precisi fra un po', ma in poche parole il piano proiettivo è un'estensione del piano ordinario (quello su cui ci si fa la geometria analitica, tanto per intenderci), in cui anche le direzioni delle rette diventano dei nuovi "punti" del piano.

In questo modo due rette parallele hanno un "punto" in comune: la loro direzione.

Il piano proiettivo quindi è un esempio di *geometria non euclidea*. Ma il suo interesse principale sta nell'unificazione di alcuni concetti: ad esempio, vedremo che nel piano proiettivo esiste solo un tipo di conica (invece delle usuali parabola, ellisse, iperbole).

Obiettivi della lezione

In questa lezione vedremo le proprietà fondamentali del cosiddetto **piano proiettivo**.

Saremo più precisi fra un po', ma in poche parole il piano proiettivo è un'estensione del piano ordinario (quello su cui ci si fa la geometria analitica, tanto per intenderci), in cui anche le direzioni delle rette diventano dei nuovi "punti" del piano.

In questo modo due rette parallele hanno un "punto" in comune: la loro direzione.

Il piano proiettivo quindi è un esempio di *geometria non euclidea*. Ma il suo interesse principale sta nell'unificazione di alcuni concetti: ad esempio, vedremo che nel piano proiettivo esiste solo un tipo di conica (invece delle usuali parabola, ellisse, iperbole).

Il piano ordinario, denotato con $\mathbb{R}^2$, verrà chiamato d'ora in poi **piano affine**. Il piano proiettivo verrà denotato con $\mathbb{P}^2$.

Estensione del piano affine

Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ viene definito in modo **assiomatico**, ovvero si danno alcune regole e proprietà primitive, da cui poi si potranno ricavare dei teoremi.

Estensione del piano affine

Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ viene definito in modo **assiomatico**, ovvero si danno alcune regole e proprietà primitive, da cui poi si potranno ricavare dei teoremi.

In particolare, il piano proiettivo è una **estensione** dell'usuale piano (quello che abbiamo chiamato piano affine). Ciò vuol dire che il piano proiettivo contiene tutti gli enti del piano affine, ma in più contiene anche qualcosa d'altro.

Estensione del piano affine

Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ viene definito in modo **assiomatico**, ovvero si danno alcune regole e proprietà primitive, da cui poi si potranno ricavare dei teoremi.

In particolare, il piano proiettivo è una **estensione** dell'usuale piano (quello che abbiamo chiamato piano affine). Ciò vuol dire che il piano proiettivo contiene tutti gli enti del piano affine, ma in più contiene anche qualcosa d'altro.

Tutti i punti del piano affine sono anche punti del piano proiettivo, e tutte le rette del piano affine sono anche rette del piano proiettivo.

Estensione del piano affine

Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ viene definito in modo **assiomatico**, ovvero si danno alcune regole e proprietà primitive, da cui poi si potranno ricavare dei teoremi.

In particolare, il piano proiettivo è una **estensione** dell'usuale piano (quello che abbiamo chiamato piano affine). Ciò vuol dire che il piano proiettivo contiene tutti gli enti del piano affine, ma in più contiene anche qualcosa d'altro.

Tutti i punti del piano affine sono anche punti del piano proiettivo, e tutte le rette del piano affine sono anche rette del piano proiettivo.

In questo modo ci garantiamo che tutte le costruzioni che si effettuano usualmente nel piano affine sono valide anche nel piano proiettivo.

Estensione del piano affine

Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ viene definito in modo **assiomatico**, ovvero si danno alcune regole e proprietà primitive, da cui poi si potranno ricavare dei teoremi.

In particolare, il piano proiettivo è una **estensione** dell'usuale piano (quello che abbiamo chiamato piano affine). Ciò vuol dire che il piano proiettivo contiene tutti gli enti del piano affine, ma in più contiene anche qualcosa d'altro.

Tutti i punti del piano affine sono anche punti del piano proiettivo, e tutte le rette del piano affine sono anche rette del piano proiettivo.

In questo modo ci garantiamo che tutte le costruzioni che si effettuano usualmente nel piano affine sono valide anche nel piano proiettivo.

Ad esempio, potremo sempre trovare il punto medio di un segmento, o bisecare un angolo, o tracciare una circonferenza di centro e raggio dati.

Estensione del piano affine

Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ viene definito in modo **assiomatico**, ovvero si danno alcune regole e proprietà primitive, da cui poi si potranno ricavare dei teoremi.

In particolare, il piano proiettivo è una **estensione** dell'usuale piano (quello che abbiamo chiamato piano affine). Ciò vuol dire che il piano proiettivo contiene tutti gli enti del piano affine, ma in più contiene anche qualcosa d'altro.

Tutti i punti del piano affine sono anche punti del piano proiettivo, e tutte le rette del piano affine sono anche rette del piano proiettivo.

In questo modo ci garantiamo che tutte le costruzioni che si effettuano usualmente nel piano affine sono valide anche nel piano proiettivo.

Ad esempio, potremo sempre trovare il punto medio di un segmento, o bisecare un angolo, o tracciare una circonferenza di centro e raggio dati.

Ma ora andiamo a vedere che cosa c'è di nuovo nel piano proiettivo, dandone la definizione nel prossimo lucido.

Definizione di piano proiettivo

Definizione

Chiamiamo **punti** del piano proiettivo i seguenti due tipi di oggetti:

- tutti i punti $P, Q, R, \dots$ del piano affine (che verranno detti **punti propri**);

Definizione di piano proiettivo

Definizione

Chiamiamo **punti** del piano proiettivo i seguenti due tipi di oggetti:

- tutti i punti $P, Q, R, \dots$ del piano affine (che verranno detti **punti propri**);
- tutte le direzioni delle rette del piano affine (che verranno dette **punti impropri**).

Definizione di piano proiettivo

Definizione

Chiamiamo **punti** del piano proiettivo i seguenti due tipi di oggetti:

- tutti i punti $P, Q, R, \dots$ del piano affine (che verranno detti **punti propri**);
- tutte le direzioni delle rette del piano affine (che verranno dette **punti impropri**).

Chiamiamo **rette** del piano proiettivo i seguenti due tipi di oggetti:

- tutte le rette del piano affine (che verranno dette **rette proprie**), a cui viene aggiunto il loro punto improprio;

Definizione di piano proiettivo

Definizione

Chiamiamo **punti** del piano proiettivo i seguenti due tipi di oggetti:

- tutti i punti $P, Q, R, \dots$ del piano affine (che verranno detti **punti propri**);
- tutte le direzioni delle rette del piano affine (che verranno dette **punti impropri**).

Chiamiamo **rette** del piano proiettivo i seguenti due tipi di oggetti:

- tutte le rette del piano affine (che verranno dette **rette proprie**), a cui viene aggiunto il loro punto improprio;
- l'insieme di tutti i punti impropri (che verrà detto **retta impropria**).

Commenti sulla definizione

Quindi, ai punti del piano affine, che abbiamo chiamato punti propri, si aggiungono infiniti nuovi punti, corrispondenti a tutte le possibili direzioni delle rette del piano affine.

Commenti sulla definizione

Quindi, ai punti del piano affine, che abbiamo chiamato punti propri, si aggiungono infiniti nuovi punti, corrispondenti a tutte le possibili direzioni delle rette del piano affine.

Inoltre, viene aggiunta una nuova retta, la retta impropria, fatta da tutti i nuovi punti.

Commenti sulla definizione

Quindi, ai punti del piano affine, che abbiamo chiamato punti propri, si aggiungono infiniti nuovi punti, corrispondenti a tutte le possibili direzioni delle rette del piano affine.

Inoltre, viene aggiunta una nuova retta, la retta impropria, fatta da tutti i nuovi punti.

Un punto improprio, ovvero la direzione di una retta, viene anche detto **punto all'infinito** della retta: se dovessimo disegnare un punto improprio o la retta impropria, dovremmo disegnare qualcosa che si colloca infinitamente lontano da tutti gli oggetti propri.

Commenti sulla definizione

Quindi, ai punti del piano affine, che abbiamo chiamato punti propri, si aggiungono infiniti nuovi punti, corrispondenti a tutte le possibili direzioni delle rette del piano affine.

Inoltre, viene aggiunta una nuova retta, la retta impropria, fatta da tutti i nuovi punti.

Un punto improprio, ovvero la direzione di una retta, viene anche detto **punto all'infinito** della retta: se dovessimo disegnare un punto improprio o la retta impropria, dovremmo disegnare qualcosa che si colloca infinitamente lontano da tutti gli oggetti propri.

Questa formulazione giustifica l'idea, dettata dalla prospettiva, che due rette parallele "si incontrano all'infinito". Nel tipico esempio dei binari del treno, infatti, abbiamo l'impressione che i binari si incontrino in un punto, anche se infinitamente lontano.

Commenti sulla definizione

Quindi, ai punti del piano affine, che abbiamo chiamato punti propri, si aggiungono infiniti nuovi punti, corrispondenti a tutte le possibili direzioni delle rette del piano affine.

Inoltre, viene aggiunta una nuova retta, la retta impropria, fatta da tutti i nuovi punti.

Un punto improprio, ovvero la direzione di una retta, viene anche detto **punto all'infinito** della retta: se dovessimo disegnare un punto improprio o la retta impropria, dovremmo disegnare qualcosa che si colloca infinitamente lontano da tutti gli oggetti propri.

Questa formulazione giustifica l'idea, dettata dalla prospettiva, che due rette parallele "si incontrano all'infinito". Nel tipico esempio dei binari del treno, infatti, abbiamo l'impressione che i binari si incontrino in un punto, anche se infinitamente lontano.

La geometria proiettiva vuole rendere rigorosa questa intuizione, costruendo un sistema geometrico (in modo assiomatico) in cui questa affermazione è vera.



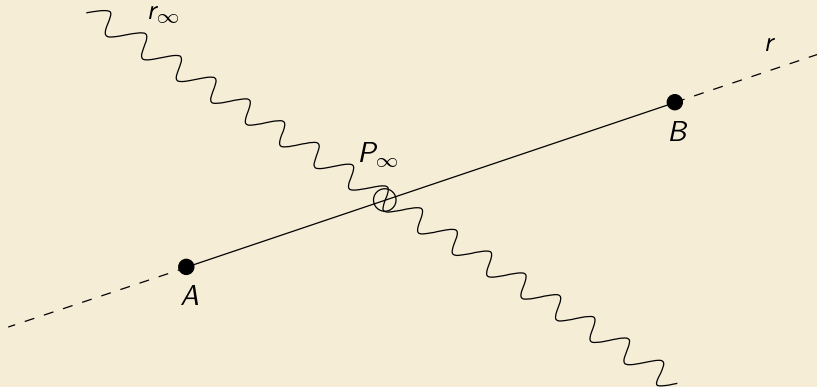


Disegnare gli oggetti impropri

Chiaramente la retta impropria non può essere “disegnata”, ma spesso se ne dà una rappresentazione idealizzata, tramite una linea ondulata.

Disegnare gli oggetti impropri

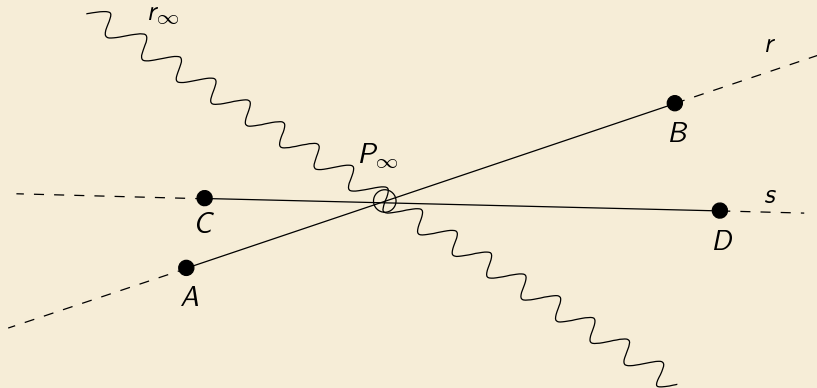
Chiaramente la retta impropria non può essere “disegnata”, ma spesso se ne dà una rappresentazione idealizzata, tramite una linea ondulata.



Qui è rappresentata una retta propria r passante per i punti propri A e B , che interseca la retta impropria r_∞ nel punto improprio P_∞ .

Disegnare gli oggetti impropri

Chiaramente la retta impropria non può essere “disegnata”, ma spesso se ne dà una rappresentazione idealizzata, tramite una linea ondulata.



Qui invece sono rappresentate due rette proprie r, s **parallele**!
Esse infatti si intersecano nel punto improprio P_∞ .

Proprietà del piano proiettivo

Una delle proprietà principali del piano proiettivo è la seguente:

Teorema

Due rette distinte di $\mathbb{P}^2$ hanno esattamente un punto in comune.

Proprietà del piano proiettivo

Una delle proprietà principali del piano proiettivo è la seguente:

Teorema

Due rette distinte di $\mathbb{P}^2$ hanno esattamente un punto in comune.

Dimostrazione. Analizziamo i vari casi:

Proprietà del piano proiettivo

Una delle proprietà principali del piano proiettivo è la seguente:

Teorema

Due rette distinte di $\mathbb{P}^2$ hanno esattamente un punto in comune.

Dimostrazione. Analizziamo i vari casi:

- Se le due rette sono proprie e non parallele, esse hanno esattamente un punto in comune per le proprietà del piano affine (si noti che i loro punti impropri devono essere distinti, proprio perché non sono parallele).

Proprietà del piano proiettivo

Una delle proprietà principali del piano proiettivo è la seguente:

Teorema

Due rette distinte di $\mathbb{P}^2$ hanno esattamente un punto in comune.

Dimostrazione. Analizziamo i vari casi:

- Se le due rette sono proprie e non parallele, esse hanno esattamente un punto in comune per le proprietà del piano affine (si noti che i loro punti impropri devono essere distinti, proprio perché non sono parallele).
- Se le due rette sono proprie e parallele, non hanno punti propri in comune (per le proprietà del piano affine), ma hanno il punto improprio in comune. Quindi hanno ancora esattamente un punto in comune.

Proprietà del piano proiettivo

Una delle proprietà principali del piano proiettivo è la seguente:

Teorema

Due rette distinte di $\mathbb{P}^2$ hanno esattamente un punto in comune.

Dimostrazione. Analizziamo i vari casi:

- Se le due rette sono proprie e non parallele, esse hanno esattamente un punto in comune per le proprietà del piano affine (si noti che i loro punti impropri devono essere distinti, proprio perché non sono parallele).
- Se le due rette sono proprie e parallele, non hanno punti propri in comune (per le proprietà del piano affine), ma hanno il punto improprio in comune. Quindi hanno ancora esattamente un punto in comune.
- Se una delle due rette è la retta impropria, ha in comune con la retta propria esattamente il suo punto improprio. □

Proprietà del piano proiettivo

Inoltre la seguente proprietà, che era vera nel piano affine, resta vera anche nel piano proiettivo:

Teorema

Per due punti distinti di $\mathbb{P}^2$ passa una e una sola retta.

Proprietà del piano proiettivo

Inoltre la seguente proprietà, che era vera nel piano affine, resta vera anche nel piano proiettivo:

Teorema

Per due punti distinti di $\mathbb{P}^2$ passa una e una sola retta.

Dimostrazione. Anche qui analizziamo i vari casi:

Proprietà del piano proiettivo

Inoltre la seguente proprietà, che era vera nel piano affine, resta vera anche nel piano proiettivo:

Teorema

Per due punti distinti di $\mathbb{P}^2$ passa una e una sola retta.

Dimostrazione. Anche qui analizziamo i vari casi:

- Se i due punti sono propri, il teorema è vero per le proprietà del piano affine.

Proprietà del piano proiettivo

Inoltre la seguente proprietà, che era vera nel piano affine, resta vera anche nel piano proiettivo:

Teorema

Per due punti distinti di $\mathbb{P}^2$ passa una e una sola retta.

Dimostrazione. Anche qui analizziamo i vari casi:

- Se i due punti sono propri, il teorema è vero per le proprietà del piano affine.
- Se un punto è proprio e l'altro improprio, l'unica retta che passa per i due punti è quella passante per il punto proprio e con la direzione data da quello improprio.

Proprietà del piano proiettivo

Inoltre la seguente proprietà, che era vera nel piano affine, resta vera anche nel piano proiettivo:

Teorema

Per due punti distinti di $\mathbb{P}^2$ passa una e una sola retta.

Dimostrazione. Anche qui analizziamo i vari casi:

- Se i due punti sono propri, il teorema è vero per le proprietà del piano affine.
- Se un punto è proprio e l'altro improprio, l'unica retta che passa per i due punti è quella passante per il punto proprio e con la direzione data da quello improprio.
- Se i due punti sono impropri, l'unica retta che li contiene entrambi è quella impropria. □

I fasci di rette

Una delle caratteristiche più importanti del piano proiettivo è l'unificazione di alcuni concetti. Infatti, visto che non esiste più il concetto di “rette che non si intersecano”, non c'è più bisogno di distinguere vari casi.

I fasci di rette

Una delle caratteristiche più importanti del piano proiettivo è l'unificazione di alcuni concetti. Infatti, visto che non esiste più il concetto di “rette che non si intersecano”, non c'è più bisogno di distinguere vari casi.

Il primo esempio è quello dei **fasci di rette**: tradizionalmente si distingue tra

- fasci di rette a centro, in cui tutte le rette passano per uno stesso punto;
- fasci di rette parallele, in cui tutte le rette sono parallele tra loro.

I fasci di rette

Una delle caratteristiche più importanti del piano proiettivo è l'unificazione di alcuni concetti. Infatti, visto che non esiste più il concetto di “rette che non si intersecano”, non c'è più bisogno di distinguere vari casi.

Il primo esempio è quello dei **fasci di rette**: tradizionalmente si distingue tra

- fasci di rette a centro, in cui tutte le rette passano per uno stesso punto;
- fasci di rette parallele, in cui tutte le rette sono parallele tra loro.

Nel piano proiettivo questa distinzione non esiste più: tutti i fasci di rette sono “a centro”. Semplicemente, i fasci di rette parallele sono fasci che hanno il centro sulla retta impropria.

I fasci di rette

Una delle caratteristiche più importanti del piano proiettivo è l'unificazione di alcuni concetti. Infatti, visto che non esiste più il concetto di “rette che non si intersecano”, non c'è più bisogno di distinguere vari casi.

Il primo esempio è quello dei **fasci di rette**: tradizionalmente si distingue tra

- fasci di rette a centro, in cui tutte le rette passano per uno stesso punto;
- fasci di rette parallele, in cui tutte le rette sono parallele tra loro.

Nel piano proiettivo questa distinzione non esiste più: tutti i fasci di rette sono “a centro”. Semplicemente, i fasci di rette parallele sono fasci che hanno il centro sulla retta impropria.

Vedremo ora un esempio notevole di unificazione nel piano proiettivo. Per fare questo dobbiamo prima enunciare un teorema che di solito non viene studiato a scuola: il teorema di Pappo.

Il teorema di Pappo – 1

Teorema

Siano A_r, B_r, C_r tre punti distinti su una retta r e A_s, B_s, C_s tre punti distinti su un'altra retta s (tutti diversi dall'intersezione di r e s).

Allora le intersezioni delle rette

$$A_r B_s \text{ con } A_s B_r, \quad A_r C_s \text{ con } A_s C_r, \quad B_r C_s \text{ con } B_s C_r$$

sono allineate.

Il teorema di Pappo – 1

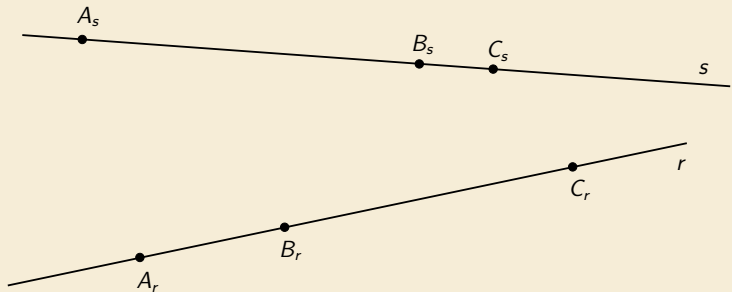
Teorema

Siano A_r, B_r, C_r tre punti distinti su una retta r e A_s, B_s, C_s tre punti distinti su un'altra retta s (tutti diversi dall'intersezione di r e s).

Allora le intersezioni delle rette

$$A_r B_s \text{ con } A_s B_r, \quad A_r C_s \text{ con } A_s C_r, \quad B_r C_s \text{ con } B_s C_r$$

sono allineate.



Il teorema di Pappo – 1

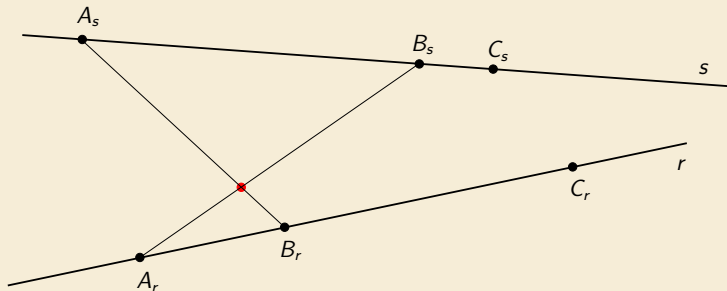
Teorema

Siano A_r, B_r, C_r tre punti distinti su una retta r e A_s, B_s, C_s tre punti distinti su un'altra retta s (tutti diversi dall'intersezione di r e s).

Allora le intersezioni delle rette

$$A_r B_s \text{ con } A_s B_r, \quad A_r C_s \text{ con } A_s C_r, \quad B_r C_s \text{ con } B_s C_r$$

sono allineate.



Il teorema di Pappo – 1

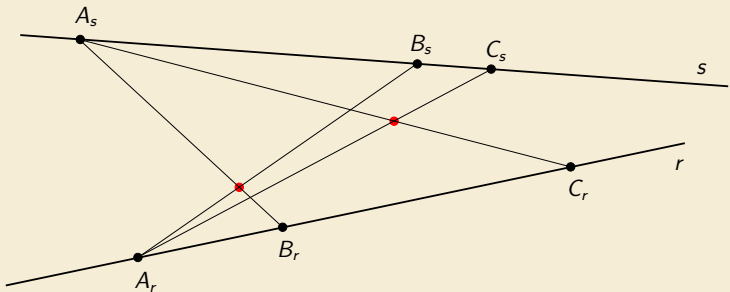
Teorema

Siano A_r, B_r, C_r tre punti distinti su una retta r e A_s, B_s, C_s tre punti distinti su un'altra retta s (tutti diversi dall'intersezione di r e s).

Allora le intersezioni delle rette

$$A_r B_s \text{ con } A_s B_r, \quad A_r C_s \text{ con } A_s C_r, \quad B_r C_s \text{ con } B_s C_r$$

sono allineate.



Il teorema di Pappo – 1

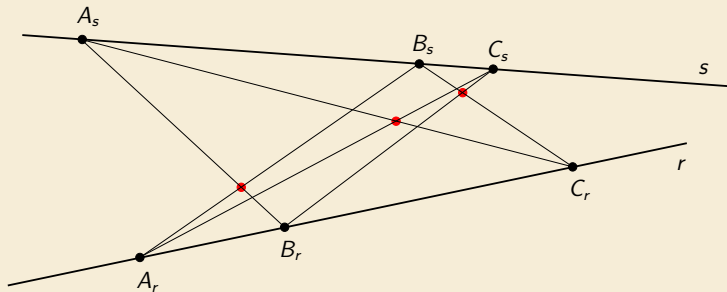
Teorema

Siano A_r, B_r, C_r tre punti distinti su una retta r e A_s, B_s, C_s tre punti distinti su un'altra retta s (tutti diversi dall'intersezione di r e s).

Allora le intersezioni delle rette

$$A_r B_s \text{ con } A_s B_r, \quad A_r C_s \text{ con } A_s C_r, \quad B_r C_s \text{ con } B_s C_r$$

sono allineate.



Il teorema di Pappo – 1

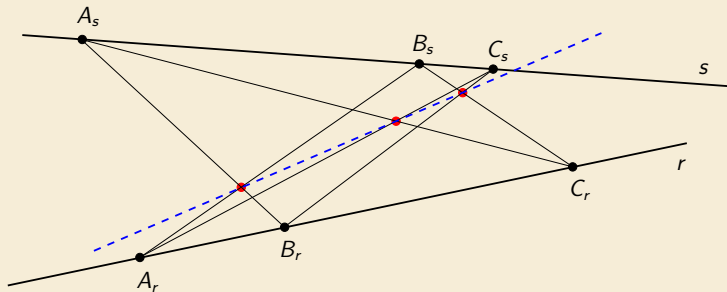
Teorema

Siano A_r, B_r, C_r tre punti distinti su una retta r e A_s, B_s, C_s tre punti distinti su un'altra retta s (tutti diversi dall'intersezione di r e s).

Allora le intersezioni delle rette

$$A_r B_s \text{ con } A_s B_r, \quad A_r C_s \text{ con } A_s C_r, \quad B_r C_s \text{ con } B_s C_r$$

sono allineate.



Il teorema di Pappo – 2

Un altro teorema, simile al precedente, è questo:

Teorema

Siano A_r, B_r, C_r tre punti distinti su una retta r e A_s, B_s, C_s tre punti distinti su un'altra retta s (tutti diversi dall'intersezione di r e s).

Supponiamo che A_rB_s sia parallelo ad A_sB_r e A_rC_s sia parallelo ad A_sC_r . Allora B_rC_s è parallelo a B_sC_r .

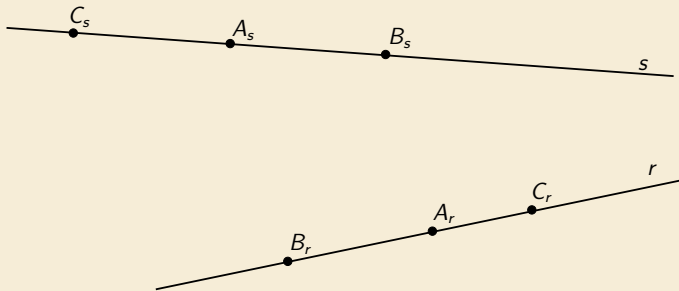
Il teorema di Pappo – 2

Un altro teorema, simile al precedente, è questo:

Teorema

Siano A_r, B_r, C_r tre punti distinti su una retta r e A_s, B_s, C_s tre punti distinti su un'altra retta s (tutti diversi dall'intersezione di r e s).

Supponiamo che $A_r B_s$ sia parallelo ad $A_s B_r$ e $A_r C_s$ sia parallelo ad $A_s C_r$. Allora $B_r C_s$ è parallelo a $B_s C_r$.



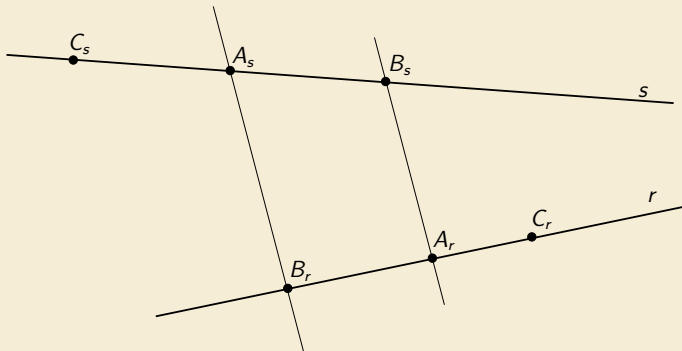
Il teorema di Pappo – 2

Un altro teorema, simile al precedente, è questo:

Teorema

Siano A_r, B_r, C_r tre punti distinti su una retta r e A_s, B_s, C_s tre punti distinti su un'altra retta s (tutti diversi dall'intersezione di r e s).

Supponiamo che $A_r B_s$ sia parallelo ad $A_s B_r$ e $A_r C_s$ sia parallelo ad $A_s C_r$. Allora $B_r C_s$ è parallelo a $B_s C_r$.

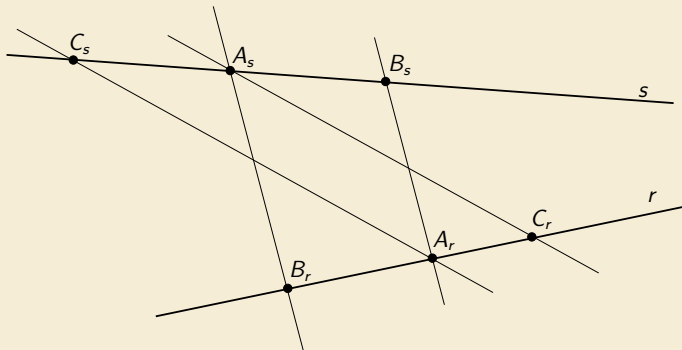


Il teorema di Pappo – 2

Un altro teorema, simile al precedente, è questo:

Teorema

*Siano A_r, B_r, C_r tre punti distinti su una retta r e A_s, B_s, C_s tre punti distinti su un'altra retta s (tutti diversi dall'intersezione di r e s).
Supponiamo che $A_r B_s$ sia parallelo ad $A_s B_r$ e $A_r C_s$ sia parallelo ad $A_s C_r$.
Allora $B_r C_s$ è parallelo a $B_s C_r$.*

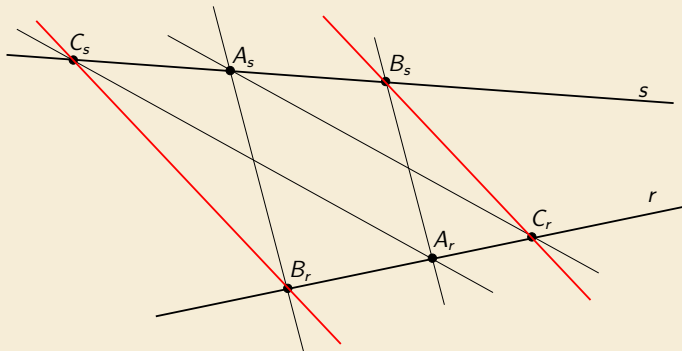


Il teorema di Pappo – 2

Un altro teorema, simile al precedente, è questo:

Teorema

*Siano A_r, B_r, C_r tre punti distinti su una retta r e A_s, B_s, C_s tre punti distinti su un'altra retta s (tutti diversi dall'intersezione di r e s).
Supponiamo che $A_r B_s$ sia parallelo ad $A_s B_r$ e $A_r C_s$ sia parallelo ad $A_s C_r$.
Allora $B_r C_s$ è parallelo a $B_s C_r$.*



Il teorema di Pappo

In realtà i due teoremi precedenti (di cui non vogliamo dare una dimostrazione), se ambientati nel piano proiettivo, sono **lo stesso teorema!**

Il teorema di Pappo

In realtà i due teoremi precedenti (di cui non vogliamo dare una dimostrazione), se ambientati nel piano proiettivo, sono **lo stesso teorema!**

Infatti, dire che $A_r B_s$ sia parallelo ad $A_s B_r$ vuol dire che le due rette si incontrano in un punto improprio, e allo stesso modo se $A_r C_s$ è parallelo ad $A_s C_r$ vuol dire che le due rette si incontrano in un punto improprio.

Il teorema di Pappo

In realtà i due teoremi precedenti (di cui non vogliamo dare una dimostrazione), se ambientati nel piano proiettivo, sono **lo stesso teorema!**

Infatti, dire che $A_r B_s$ sia parallelo ad $A_s B_r$ vuol dire che le due rette si incontrano in un punto improprio, e allo stesso modo se $A_r C_s$ è parallelo ad $A_s C_r$ vuol dire che le due rette si incontrano in un punto improprio.

Allora, se prendiamo il teorema di Pappo nella prima versione, ne deduciamo che l'intersezione di $B_r C_s$ e $B_s C_r$ deve essere allineata con le altre due, quindi deve stare sulla retta impropria.

Il teorema di Pappo

In realtà i due teoremi precedenti (di cui non vogliamo dare una dimostrazione), se ambientati nel piano proiettivo, sono **lo stesso teorema!**

Infatti, dire che $A_r B_s$ sia parallelo ad $A_s B_r$ vuol dire che le due rette si incontrano in un punto improprio, e allo stesso modo se $A_r C_s$ è parallelo ad $A_s C_r$ vuol dire che le due rette si incontrano in un punto improprio.

Allora, se prendiamo il teorema di Pappo nella prima versione, ne deduciamo che l'intersezione di $B_r C_s$ e $B_s C_r$ deve essere allineata con le altre due, quindi deve stare sulla retta impropria.

Ma questo significa che $B_r C_s$ e $B_s C_r$ sono parallele!

Il teorema di Pappo

In realtà i due teoremi precedenti (di cui non vogliamo dare una dimostrazione), se ambientati nel piano proiettivo, sono **lo stesso teorema!**

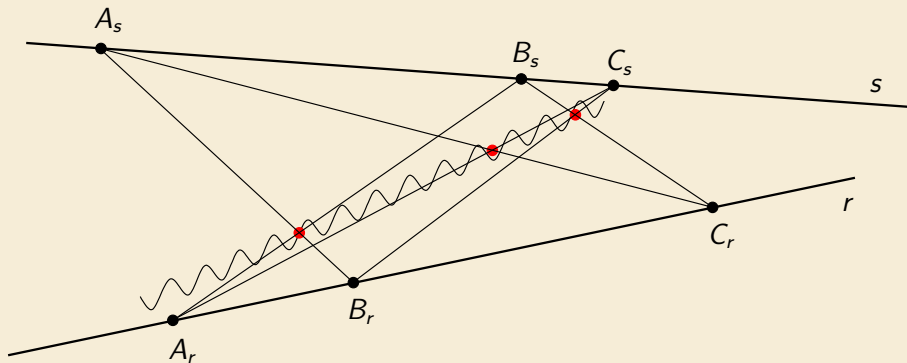
Infatti, dire che $A_r B_s$ sia parallelo ad $A_s B_r$ vuol dire che le due rette si incontrano in un punto improprio, e allo stesso modo se $A_r C_s$ è parallelo ad $A_s C_r$ vuol dire che le due rette si incontrano in un punto improprio.

Allora, se prendiamo il teorema di Pappo nella prima versione, ne deduciamo che l'intersezione di $B_r C_s$ e $B_s C_r$ deve essere allineata con le altre due, quindi deve stare sulla retta impropria.

Ma questo significa che $B_r C_s$ e $B_s C_r$ sono parallele!

Se ne facessimo un disegno idealizzato nel piano proiettivo, ne risulterebbe un diagramma molto simile alla prima versione del teorema di Pappo, come vedremo nel lucido seguente.

I teoremi di Pappo unificati



Stavolta le tre coppie di rette si incontrano sulla retta impropria, cioè sono a due a due parallele.

Estensioni del teorema di Pappo

Possiamo anche trovare altre estensioni del teorema di Pappo, scegliendo alcuni punti impropri e altri propri.

Estensioni del teorema di Pappo

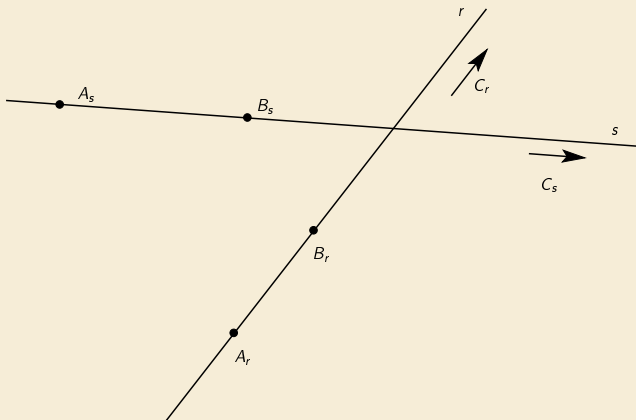
Possiamo anche trovare altre estensioni del teorema di Pappo, scegliendo alcuni punti impropri e altri propri.

Ad esempio, se scegliamo i punti C_r , C_s impropri (li indichiamo con due frecce, per intendere due direzioni del piano), otteniamo di nuovo un allineamento di tre punti:

Estensioni del teorema di Pappo

Possiamo anche trovare altre estensioni del teorema di Pappo, scegliendo alcuni punti impropri e altri propri.

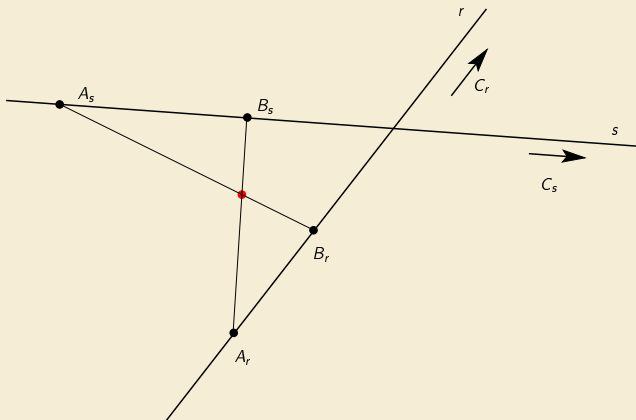
Ad esempio, se scegliamo i punti C_r, C_s impropri (li indichiamo con due frecce, per intendere due direzioni del piano), otteniamo di nuovo un allineamento di tre punti:



Estensioni del teorema di Pappo

Possiamo anche trovare altre estensioni del teorema di Pappo, scegliendo alcuni punti impropri e altri propri.

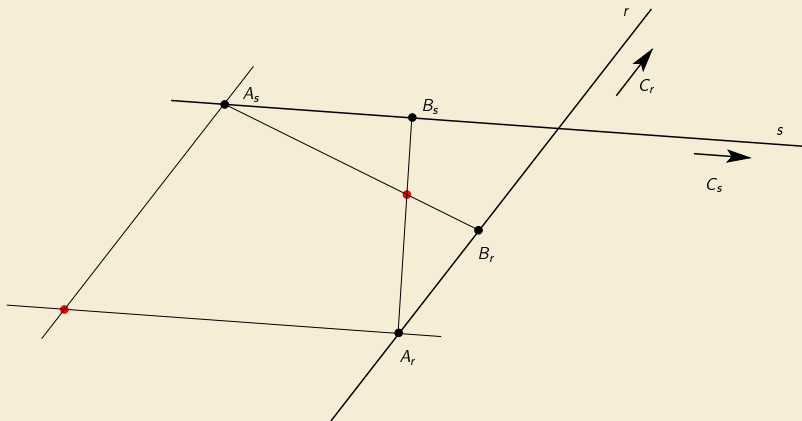
Ad esempio, se scegliamo i punti C_r, C_s impropri (li indichiamo con due frecce, per intendere due direzioni del piano), otteniamo di nuovo un allineamento di tre punti:



Estensioni del teorema di Pappo

Possiamo anche trovare altre estensioni del teorema di Pappo, scegliendo alcuni punti impropri e altri propri.

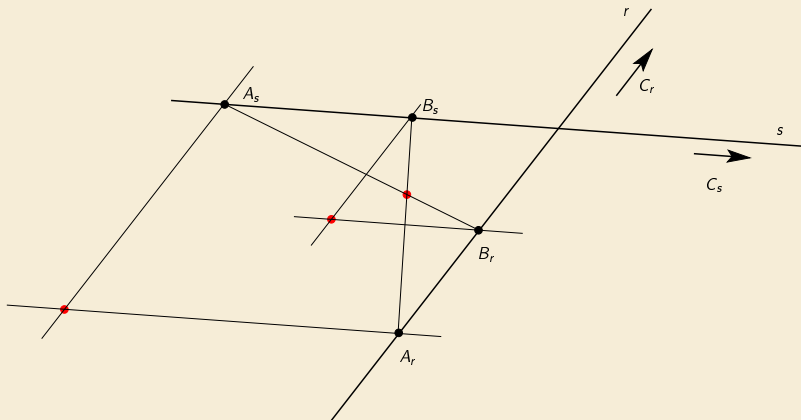
Ad esempio, se scegliamo i punti C_r, C_s impropri (li indichiamo con due frecce, per intendere due direzioni del piano), otteniamo di nuovo un allineamento di tre punti:



Estensioni del teorema di Pappo

Possiamo anche trovare altre estensioni del teorema di Pappo, scegliendo alcuni punti impropri e altri propri.

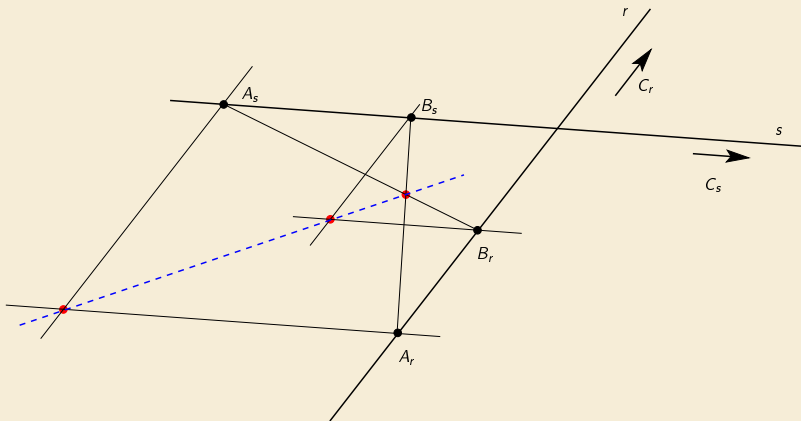
Ad esempio, se scegliamo i punti C_r , C_s impropri (li indichiamo con due frecce, per intendere due direzioni del piano), otteniamo di nuovo un allineamento di tre punti:



Estensioni del teorema di Pappo

Possiamo anche trovare altre estensioni del teorema di Pappo, scegliendo alcuni punti impropri e altri propri.

Ad esempio, se scegliamo i punti C_r, C_s impropri (li indichiamo con due frecce, per intendere due direzioni del piano), otteniamo di nuovo un allineamento di tre punti:



Dualità

Un'altra caratteristica unificante del piano proiettivo è quella della **dualità**: gli assiomi che caratterizzano il piano proiettivo restano validi se si scambiano tra loro alcuni concetti:

Dualità

Un'altra caratteristica unificante del piano proiettivo è quella della **dualità**: gli assiomi che caratterizzano il piano proiettivo restano validi se si scambiano tra loro alcuni concetti:

punto $\leftrightarrow$ retta

Dualità

Un'altra caratteristica unificante del piano proiettivo è quella della **dualità**: gli assiomi che caratterizzano il piano proiettivo restano validi se si scambiano tra loro alcuni concetti:

punto	$\leftrightarrow$	retta
appartiene a	$\leftrightarrow$	passa per

Dualità

Un'altra caratteristica unificante del piano proiettivo è quella della **dualità**: gli assiomi che caratterizzano il piano proiettivo restano validi se si scambiano tra loro alcuni concetti:

punto	$\leftrightarrow$	retta
appartiene a	$\leftrightarrow$	passa per
punti allineati	$\leftrightarrow$	rette concorrenti

Dualità

Un'altra caratteristica unificante del piano proiettivo è quella della **dualità**: gli assiomi che caratterizzano il piano proiettivo restano validi se si scambiano tra loro alcuni concetti:

punto	$\leftrightarrow$	retta
appartiene a	$\leftrightarrow$	passa per
punti allineati	$\leftrightarrow$	rette concorrenti
punto d'intersezione di due rette	$\leftrightarrow$	retta che passa per due punti

Dualità

Un'altra caratteristica unificante del piano proiettivo è quella della **dualità**: gli assiomi che caratterizzano il piano proiettivo restano validi se si scambiano tra loro alcuni concetti:

punto	$\leftrightarrow$	retta
appartiene a	$\leftrightarrow$	passa per
punti allineati	$\leftrightarrow$	rette concorrenti
punto d'intersezione di due rette	$\leftrightarrow$	retta che passa per due punti

Ad esempio: la proprietà (vera)
per due punti distinti passa una e una sola retta

Dualità

Un'altra caratteristica unificante del piano proiettivo è quella della **dualità**: gli assiomi che caratterizzano il piano proiettivo restano validi se si scambiano tra loro alcuni concetti:

punto	$\leftrightarrow$	retta
appartiene a	$\leftrightarrow$	passa per
punti allineati	$\leftrightarrow$	rette concorrenti
punto d'intersezione di due rette	$\leftrightarrow$	retta che passa per due punti

Ad esempio: la proprietà (vera)

per due punti distinti passa una e una sola retta

diventa la proprietà (vera)

due rette distinte si intersecano in uno e un solo punto.

Dualità

Un'altra caratteristica unificante del piano proiettivo è quella della **dualità**: gli assiomi che caratterizzano il piano proiettivo restano validi se si scambiano tra loro alcuni concetti:

punto	$\leftrightarrow$	retta
appartiene a	$\leftrightarrow$	passa per
punti allineati	$\leftrightarrow$	rette concorrenti
punto d'intersezione di due rette	$\leftrightarrow$	retta che passa per due punti

Ad esempio: la proprietà (vera)

per due punti distinti passa una e una sola retta

diventa la proprietà (vera)

due rette distinte si intersecano in uno e un solo punto.

Si dice che una proprietà è la *duale* dell'altra.

Dualità

Un'altra caratteristica unificante del piano proiettivo è quella della **dualità**: gli assiomi che caratterizzano il piano proiettivo restano validi se si scambiano tra loro alcuni concetti:

punto	$\leftrightarrow$	retta
appartiene a	$\leftrightarrow$	passa per
punti allineati	$\leftrightarrow$	rette concorrenti
punto d'intersezione di due rette	$\leftrightarrow$	retta che passa per due punti

Ad esempio: la proprietà (vera)

per due punti distinti passa una e una sola retta

diventa la proprietà (vera)

due rette distinte si intersecano in uno e un solo punto.

Si dice che una proprietà è la *duale* dell'altra.

Si noti che questo non sarebbe vero nel piano affine, perché non è sempre vero che due rette si intersecano in un punto, mentre è sempre vero che per due punti passa una retta.

Dualità

Quindi ogni volta che abbiamo una proprietà vera nel piano proiettivo, possiamo dedurne un'altra per dualità.

Dualità

Quindi ogni volta che abbiamo una proprietà vera nel piano proiettivo, possiamo dedurne un'altra per dualità.

Un buon esercizio è capire qual è il duale del teorema di Pappo: al posto di “punti su una retta” dovremo dire “rette per un punto”, e al posto di “punto intersezione di due rette” dovremo dire “retta passante per due punti”. Ne viene il seguente teorema.

Dualità

Quindi ogni volta che abbiamo una proprietà vera nel piano proiettivo, possiamo dedurne un'altra per dualità.

Un buon esercizio è capire qual è il duale del teorema di Pappo: al posto di “punti su una retta” dovremo dire “rette per un punto”, e al posto di “punto intersezione di due rette” dovremo dire “retta passante per due punti”. Ne viene il seguente teorema.

Teorema

Siano r_A, s_A, t_A tre rette distinte passanti per un punto A , e r_B, s_B, t_B tre rette distinte passanti per un punto B (tutte diverse dalla retta AB).

Allora le tre rette passanti per le intersezioni di

$$r_A \cap s_B \text{ e } s_A \cap r_B, \quad r_A \cap t_B \text{ e } t_A \cap r_B, \quad s_A \cap t_B \text{ e } t_A \cap s_B$$

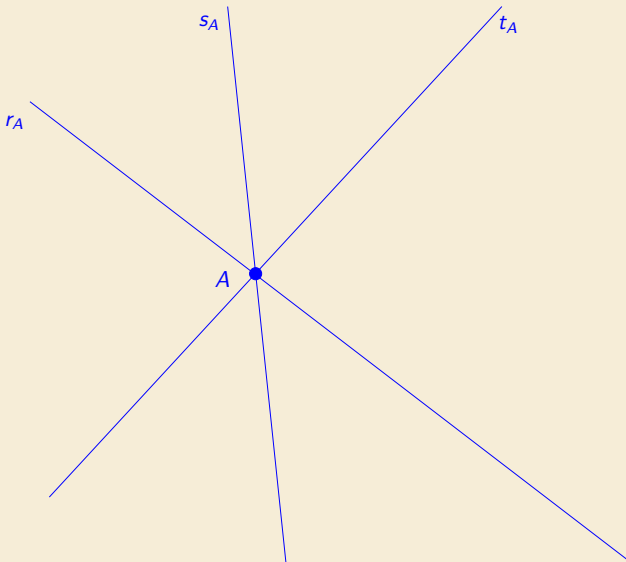
sono concorrenti (cioè si incontrano in uno stesso punto).

Duale del teorema di Pappo

Il disegno ora diventa una ragnatela, ma cerchiamo di costruirlo per passi:

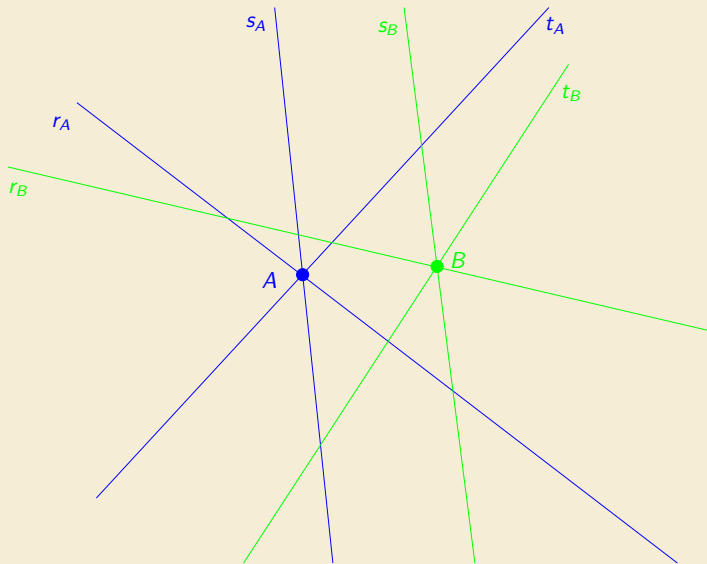
Duale del teorema di Pappo

Il disegno ora diventa una ragnatela, ma cerchiamo di costruirlo per passi:



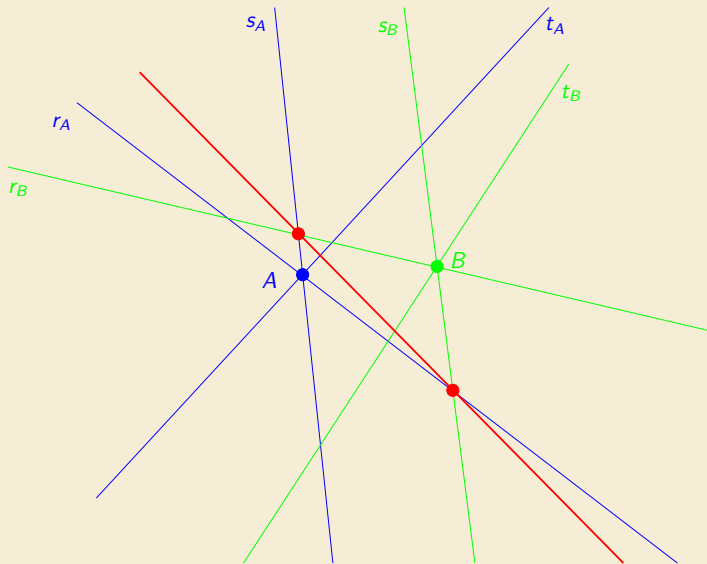
Duale del teorema di Pappo

Il disegno ora diventa una ragnatela, ma cerchiamo di costruirlo per passi:



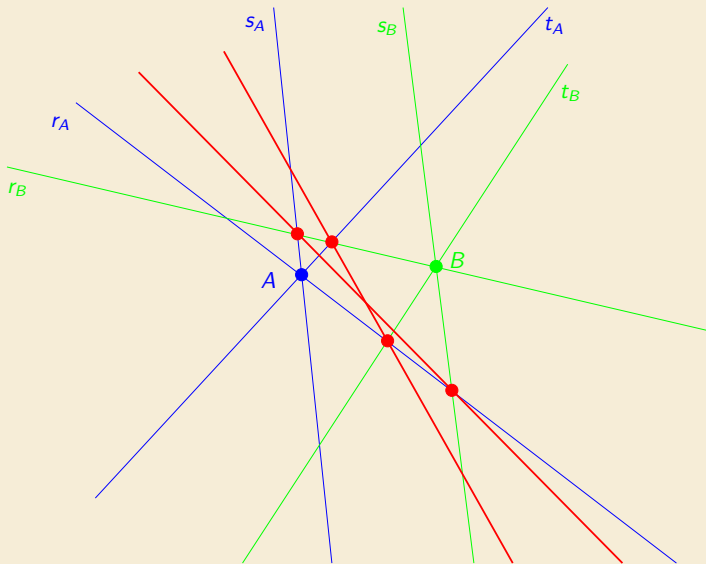
Duale del teorema di Pappo

Il disegno ora diventa una ragnatela, ma cerchiamo di costruirlo per passi:



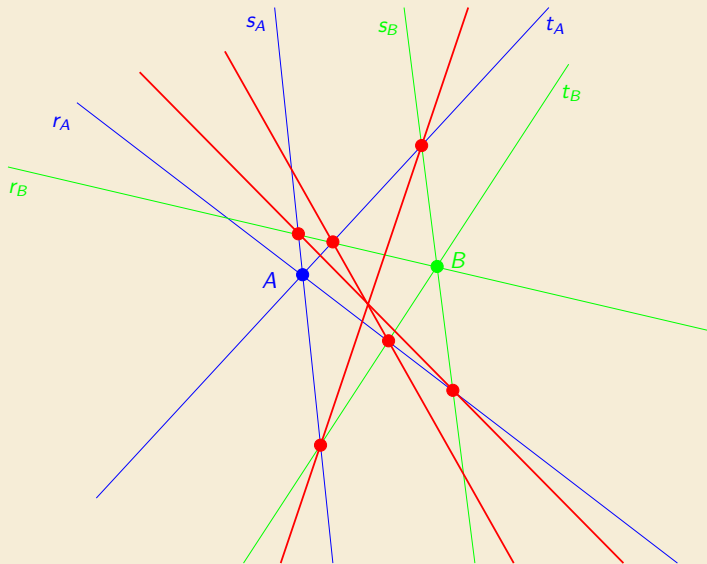
Duale del teorema di Pappo

Il disegno ora diventa una ragnatela, ma cerchiamo di costruirlo per passi:



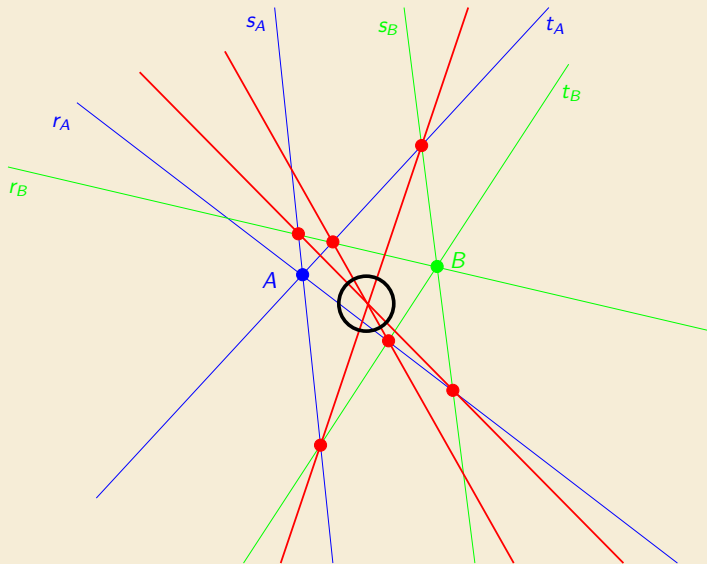
Duale del teorema di Pappo

Il disegno ora diventa una ragnatela, ma cerchiamo di costruirlo per passi:



Duale del teorema di Pappo

Il disegno ora diventa una ragnatela, ma cerchiamo di costruirlo per passi:



Le coniche nel piano proiettivo

Un altro concetto che viene sorprendentemente unificato è quello di **conica**.

In breve, risulta che nel piano proiettivo esiste un solo tipo di conica, che possiamo immaginare e disegnare sempre chiusa (come se fosse un'ellisse).

Le coniche nel piano proiettivo

Un altro concetto che viene sorprendentemente unificato è quello di **conica**.

In breve, risulta che nel piano proiettivo esiste un solo tipo di conica, che possiamo immaginare e disegnare sempre chiusa (come se fosse un'ellisse). La distinzione affine tra ellisse, parabola e iperbole è fatta semplicemente osservando la posizione della conica rispetto alla retta impropria:

Le coniche nel piano proiettivo

Un altro concetto che viene sorprendentemente unificato è quello di **conica**.

In breve, risulta che nel piano proiettivo esiste un solo tipo di conica, che possiamo immaginare e disegnare sempre chiusa (come se fosse un'ellisse). La distinzione affine tra ellisse, parabola e iperbole è fatta semplicemente osservando la posizione della conica rispetto alla retta impropria:

- se la conica interseca la retta impropria in due punti (impropri), vuol dire che la conica “contiene due direzioni”, cioè due asintoti, e quindi è una **iperbole**;

Le coniche nel piano proiettivo

Un altro concetto che viene sorprendentemente unificato è quello di **conica**.

In breve, risulta che nel piano proiettivo esiste un solo tipo di conica, che possiamo immaginare e disegnare sempre chiusa (come se fosse un'ellisse). La distinzione affine tra ellisse, parabola e iperbole è fatta semplicemente osservando la posizione della conica rispetto alla retta impropria:

- se la conica interseca la retta impropria in due punti (impropri), vuol dire che la conica “contiene due direzioni”, cioè due asintoti, e quindi è una **iperbole**;
- se la conica è tangente alla retta impropria, vuol dire che “contiene una sola direzione”, e quindi è una **parabola** (la direzione è quella dell'asse della parabola, a cui tendono anche i due rami della parabola);

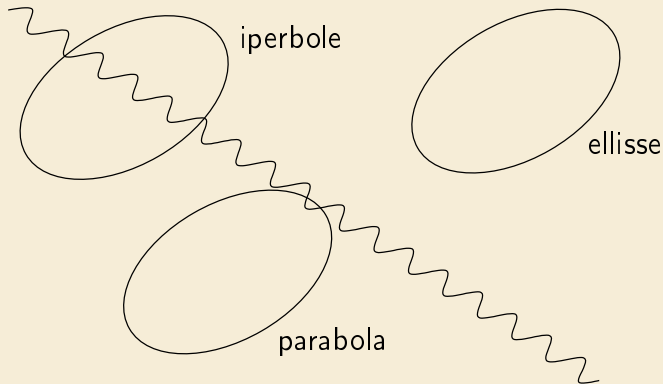
Le coniche nel piano proiettivo

Un altro concetto che viene sorprendentemente unificato è quello di **conica**.

In breve, risulta che nel piano proiettivo esiste un solo tipo di conica, che possiamo immaginare e disegnare sempre chiusa (come se fosse un'ellisse). La distinzione affine tra ellisse, parabola e iperbole è fatta semplicemente osservando la posizione della conica rispetto alla retta impropria:

- se la conica interseca la retta impropria in due punti (impropri), vuol dire che la conica “contiene due direzioni”, cioè due asintoti, e quindi è una **iperbole**;
- se la conica è tangente alla retta impropria, vuol dire che “contiene una sola direzione”, e quindi è una **parabola** (la direzione è quella dell'asse della parabola, a cui tendono anche i due rami della parabola);
- se la conica non interseca la retta impropria, vuol dire che resta in una parte limitata del piano, e quindi è una **ellisse** (di cui la circonferenza è un caso particolare).

Nel piano proiettivo esiste un solo tipo di conica!



Un commento intuitivo sulle coniche

In qualche modo, dobbiamo pensare che anche l'iperbole sia una curva chiusa: il fatto che si spezzi in due rami avviene perché essa attraversa la retta impropria (quindi in qualche senso *va all'infinito*) e poi ritorna dall'altra parte andando a chiudersi.

Un commento intuitivo sulle coniche

In qualche modo, dobbiamo pensare che anche l'iperbole sia una curva chiusa: il fatto che si spezzi in due rami avviene perché essa attraversa la retta impropria (quindi in qualche senso *va all'infinito*) e poi ritorna dall'altra parte andando a chiudersi.

La parabola invece è tangente alla retta impropria, quindi anche lei in qualche senso *va all'infinito* ma non attraversa la retta impropria e ritorna dalla stessa parte.

Un commento intuitivo sulle coniche

In qualche modo, dobbiamo pensare che anche l'iperbole sia una curva chiusa: il fatto che si spezzi in due rami avviene perché essa attraversa la retta impropria (quindi in qualche senso *va all'infinito*) e poi ritorna dall'altra parte andando a chiudersi.

La parabola invece è tangente alla retta impropria, quindi anche lei in qualche senso *va all'infinito* ma non attraversa la retta impropria e ritorna dalla stessa parte.

L'ellisse, infine, essendo una curva limitata, se ne sta ben staccata dalla retta impropria e non la tocca.

Un cenno alle coordinate omogenee

Anche il piano proiettivo può essere trattato col metodo del piano cartesiano, ovvero dando delle coordinate ai punti e trovando le equazioni delle curve.

Un cenno alle coordinate omogenee

Anche il piano proiettivo può essere trattato col metodo del piano cartesiano, ovvero dando delle coordinate ai punti e trovando le equazioni delle curve.

Per fare questo però non bastano più due coordinate, perché bisogna poter dare delle coordinate anche ai punti impropri.

Un cenno alle coordinate omogenee

Anche il piano proiettivo può essere trattato col metodo del piano cartesiano, ovvero dando delle coordinate ai punti e trovando le equazioni delle curve.

Per fare questo però non bastano più due coordinate, perché bisogna poter dare delle coordinate anche ai punti impropri.

Un modo di fare questo è aggiungere un terzo parametro alle due coordinate: se il parametro è 1, le prime due coordinate rappresenteranno un punto proprio, se il parametro è 0 le prime due coordinate rappresenteranno un punto improprio.

Un cenno alle coordinate omogenee

Anche il piano proiettivo può essere trattato col metodo del piano cartesiano, ovvero dando delle coordinate ai punti e trovando le equazioni delle curve.

Per fare questo però non bastano più due coordinate, perché bisogna poter dare delle coordinate anche ai punti impropri.

Un modo di fare questo è aggiungere un terzo parametro alle due coordinate: se il parametro è 1, le prime due coordinate rappresenteranno un punto proprio, se il parametro è 0 le prime due coordinate rappresenteranno un punto improprio.

Bisogna quindi trovare un modo per rappresentare un punto improprio, cioè una direzione, con due coordinate.

I parametri direttori di una retta

Un'idea è quella di usare i **parametri direttori**: se una retta ha equazione

$$ax + by + c = 0,$$

i suoi parametri direttori sono la coppia ordinata $(-b, a)$.

I parametri direttori di una retta

Un'idea è quella di usare i **parametri direttori**: se una retta ha equazione

$$ax + by + c = 0,$$

i suoi parametri direttori sono la coppia ordinata $(-b, a)$.

Attenzione: i parametri direttori di una retta sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, perché l'equazione

$$kax + kby + kc = 0$$

rappresenta la stessa retta, e in questo caso i parametri direttori diventano $(-kb, ka)$.

I parametri direttori di una retta

Un'idea è quella di usare i **parametri direttori**: se una retta ha equazione

$$ax + by + c = 0,$$

i suoi parametri direttori sono la coppia ordinata $(-b, a)$.

Attenzione: i parametri direttori di una retta sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, perché l'equazione

$$kax + kby + kc = 0$$

rappresenta la stessa retta, e in questo caso i parametri direttori diventano $(-kb, ka)$.

Quindi dobbiamo identificare

$$(-b, a) \quad \text{con} \quad (-kb, ka) \quad \text{per ogni } k \neq 0.$$

Le coordinate dei punti impropri

Ora, se un punto improprio è la direzione della retta

$$ax + by + c = 0,$$

diremo che le sue coordinate sono $(-b, a, 0)$.

Le coordinate dei punti impropri

Ora, se un punto improprio è la direzione della retta

$$ax + by + c = 0,$$

diremo che le sue coordinate sono $(-b, a, 0)$.

Le prime due sono i parametri direttori della retta, e la terza, essendo nulla, ci dice che stiamo trattando un punto improprio.

Le coordinate dei punti impropri

Ora, se un punto improprio è la direzione della retta

$$ax + by + c = 0,$$

diremo che le sue coordinate sono $(-b, a, 0)$.

Le prime due sono i parametri direttori della retta, e la terza, essendo nulla, ci dice che stiamo trattando un punto improprio.

Per l'ambiguità che abbiamo visto prima nella definizione dei parametri direttori, le coordinate

$$(-kb, ka, 0) \quad \text{con } k \neq 0$$

devono rappresentare lo stesso punto improprio.

Le coordinate dei punti impropri

Ora, se un punto improprio è la direzione della retta

$$ax + by + c = 0,$$

diremo che le sue coordinate sono $(-b, a, 0)$.

Le prime due sono i parametri direttori della retta, e la terza, essendo nulla, ci dice che stiamo trattando un punto improprio.

Per l'ambiguità che abbiamo visto prima nella definizione dei parametri direttori, le coordinate

$$(-kb, ka, 0) \quad \text{con } k \neq 0$$

devono rappresentare lo stesso punto improprio.

Quindi le coordinate di un punto improprio saranno definite a meno di una costante moltiplicativa (non nulla).

Le coordinate dei punti impropri

Ora, se un punto improprio è la direzione della retta

$$ax + by + c = 0,$$

diremo che le sue coordinate sono $(-b, a, 0)$.

Le prime due sono i parametri direttori della retta, e la terza, essendo nulla, ci dice che stiamo trattando un punto improprio.

Per l'ambiguità che abbiamo visto prima nella definizione dei parametri direttori, le coordinate

$$(-kb, ka, 0) \quad \text{con } k \neq 0$$

devono rappresentare lo stesso punto improprio.

Quindi le coordinate di un punto improprio saranno definite a meno di una costante moltiplicativa (non nulla).

Si parla in questo caso di **coordinate omogenee**.

Le coordinate dei punti propri

Per estensione, tratteremo anche i punti propri in modo *omogeneo*, cioè prendendoli definiti a meno di una costante moltiplicativa (non nulla).

Le coordinate dei punti propri

Per estensione, tratteremo anche i punti propri in modo *omogeneo*, cioè prendendoli definiti a meno di una costante moltiplicativa (non nulla).

Quindi le coordinate

$$(1, 2, 5) \quad \text{e} \quad (3, 6, 15)$$

rappresenteranno lo stesso punto: essendo non nulla la terza coordinata, si tratta di un punto proprio.

Le coordinate dei punti propri

Per estensione, tratteremo anche i punti propri in modo *omogeneo*, cioè prendendoli definiti a meno di una costante moltiplicativa (non nulla).

Quindi le coordinate

$$(1, 2, 5) \quad \text{e} \quad (3, 6, 15)$$

rappresenteranno lo stesso punto: essendo non nulla la terza coordinata, si tratta di un punto proprio.

Se vogliamo capire a quale punto del piano affine corrisponde, cerchiamo di far diventare 1 l'ultima coordinata (quindi dividiamo tutto per 5 nel primo caso, o per 15 nel secondo): otteniamo

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right).$$

Le coordinate dei punti propri

Per estensione, tratteremo anche i punti propri in modo *omogeneo*, cioè prendendoli definiti a meno di una costante moltiplicativa (non nulla).

Quindi le coordinate

$$(1, 2, 5) \quad \text{e} \quad (3, 6, 15)$$

rappresenteranno lo stesso punto: essendo non nulla la terza coordinata, si tratta di un punto proprio.

Se vogliamo capire a quale punto del piano affine corrisponde, cerchiamo di far diventare 1 l'ultima coordinata (quindi dividiamo tutto per 5 nel primo caso, o per 15 nel secondo): otteniamo

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right).$$

Quindi le terne $(1, 2, 5)$ e $(3, 6, 15)$ denotano entrambe il punto proprio di coordinate $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

L'equazione della retta

Consideriamo una retta nel piano affine di equazione $ax + by + c = 0$.
Nel piano proiettivo, tale equazione diventa

$$ax + by + cz = 0,$$

dove z denota la terza coordinata.

L'equazione della retta

Consideriamo una retta nel piano affine di equazione $ax + by + c = 0$.
Nel piano proiettivo, tale equazione diventa

$$ax + by + cz = 0,$$

dove z denota la terza coordinata.

Infatti, per $z = 1$ abbiamo i punti propri e l'equazione torna quella di partenza.

L'equazione della retta

Consideriamo una retta nel piano affine di equazione $ax + by + c = 0$.
Nel piano proiettivo, tale equazione diventa

$$ax + by + cz = 0,$$

dove z denota la terza coordinata.

Infatti, per $z = 1$ abbiamo i punti propri e l'equazione torna quella di partenza.

Cerchiamo invece il punto improprio della retta: ponendo $z = 0$ otteniamo $ax + by = 0$, che è soddisfatto per $x = -b$, $y = a$ (e per tutti i multipli).

L'equazione della retta

Consideriamo una retta nel piano affine di equazione $ax + by + c = 0$.
Nel piano proiettivo, tale equazione diventa

$$ax + by + cz = 0,$$

dove z denota la terza coordinata.

Infatti, per $z = 1$ abbiamo i punti propri e l'equazione torna quella di partenza.

Cerchiamo invece il punto improprio della retta: ponendo $z = 0$ otteniamo $ax + by = 0$, che è soddisfatto per $x = -b$, $y = a$ (e per tutti i multipli).
Quindi il punto di coordinate omogenee

$$(-b, a, 0)$$

è il punto improprio della retta.

Un esempio

Per esempio, calcoliamo il punto di intersezione delle rette

$$x + y - z = 0, \quad -x - y - 2z = 0.$$

Un esempio

Per esempio, calcoliamo il punto di intersezione delle rette

$$x + y - z = 0, \quad -x - y - 2z = 0.$$

Ponendo a sistema otteniamo

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi tutti i punti del tipo $(k, -k, 0)$ sono soluzioni.

Un esempio

Per esempio, calcoliamo il punto di intersezione delle rette

$$x + y - z = 0, \quad -x - y - 2z = 0.$$

Ponendo a sistema otteniamo

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi tutti i punti del tipo $(k, -k, 0)$ sono soluzioni.

In coordinate proiettive, il punto $(1, -1, 0)$ è il punto di intersezione tra le due rette. Si tratta di un punto improprio: questo significa che le due rette di partenza sono parallele (come è facile verificare, ponendo $z = 1$).

Le coordinate del piano proiettivo

Riassumendo, nel piano proiettivo i punti sono descritti da **tre** coordinate. Le tre coordinate però non sono completamente indipendenti, perché due terne che sono una multipla dell'altra denotano lo stesso punto.

Le coordinate del piano proiettivo

Riassumendo, nel piano proiettivo i punti sono descritti da **tre** coordinate. Le tre coordinate però non sono completamente indipendenti, perché due terne che sono una multipla dell'altra denotano lo stesso punto.

Attenzione: la terna nulla $(0, 0, 0)$ non descrive neanche un punto, visto che dovrebbe essere un punto improprio ma non esiste una retta con parametri direttori $(0, 0)$.

Le coordinate del piano proiettivo

Riassumendo, nel piano proiettivo i punti sono descritti da **tre** coordinate. Le tre coordinate però non sono completamente indipendenti, perché due terne che sono una multipla dell'altra denotano lo stesso punto.

Attenzione: la terna nulla $(0, 0, 0)$ non descrive neanche un punto, visto che dovrebbe essere un punto improprio ma non esiste una retta con parametri direttori $(0, 0)$.

Per esercizio: provate a capire a che direzione corrispondono i punti impropri $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.

Le coordinate del piano proiettivo

Riassumendo, nel piano proiettivo i punti sono descritti da **tre** coordinate. Le tre coordinate però non sono completamente indipendenti, perché due terne che sono una multipla dell'altra denotano lo stesso punto.

Attenzione: la terna nulla $(0, 0, 0)$ non descrive neanche un punto, visto che dovrebbe essere un punto improprio ma non esiste una retta con parametri direttori $(0, 0)$.

Per esercizio: provate a capire a che direzione corrispondono i punti impropri $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.

Provate poi a trovare la retta che passa per i punti $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$.