

Il calcolo differenziale in Newton e Leibniz

Luca Lussardi

Università Cattolica del Sacro Cuore

Newton matematico

- Nasce a Woolsthorpe, in Inghilterra, il 25 dicembre 1642

Newton matematico

- Nasce a Woolsthorpe, in Inghilterra, il 25 dicembre 1642
- Attorno a 23 anni di vita interrompe gli studi al college a causa di un'epidemia di peste originatasi a Londra: in questo periodo, che trascorre a casa in campagna, inizia l'invenzione del calcolo infinitesimale e la scoperta della teoria della gravitazione universale

Newton matematico

- Nasce a Woolsthorpe, in Inghilterra, il 25 dicembre 1642
- Attorno a 23 anni di vita interrompe gli studi al college a causa di un'epidemia di peste originatasi a Londra: in questo periodo, che trascorre a casa in campagna, inizia l'invenzione del calcolo infinitesimale e la scoperta della teoria della gravitazione universale
- Non pubblicherà mai nulla di calcolo infinitesimale: il lavoro più importante in proposito, il *The Method of Fluxions and Infinite Series*, viene infatti composto nel 1671 ma edito a Londra solo postumo, nel 1736

Newton matematico

- Nasce a Woolsthorpe, in Inghilterra, il 25 dicembre 1642
- Attorno a 23 anni di vita interrompe gli studi al college a causa di un'epidemia di peste originatasi a Londra: in questo periodo, che trascorre a casa in campagna, inizia l'invenzione del calcolo infinitesimale e la scoperta della teoria della gravitazione universale
- Non pubblicherà mai nulla di calcolo infinitesimale: il lavoro più importante in proposito, il *The Method of Fluxions and Infinite Series*, viene infatti composto nel 1671 ma edito a Londra solo postumo, nel 1736
- Muore a Londra il 20 marzo 1727 e viene sepolto nell'Abbazia di Westminster

Il calcolo delle flussioni

- Il metodo delle flussioni corrisponde al moderno calcolo delle derivate rispetto al tempo.

Il calcolo delle flussioni

- Il metodo delle flussioni corrisponde al moderno calcolo delle derivate rispetto al tempo.
- Le variabili geometriche sono *fluenti*, variano nel tempo: $x, y, \dots$,

Il calcolo delle flussioni

- Il metodo delle flussioni corrisponde al moderno calcolo delle derivate rispetto al tempo.
- Le variabili geometriche sono *fluenti*, variano nel tempo: $x, y, \dots$,
- Le velocità con cui le variabili fluenti variano nel tempo, le *flussioni*, vengono indicate $\dot{x}, \dot{y}, \dots$

Il calcolo delle flussioni

- Il metodo delle flussioni corrisponde al moderno calcolo delle derivate rispetto al tempo.
- Le variabili geometriche sono *fluente*, variano nel tempo: $x, y, \dots$,
- Le velocità con cui le variabili fluenti variano nel tempo, le *flussioni*, vengono indicate $\dot{x}, \dot{y}, \dots$
- Incremento infinitesimo temporale o ,

Il calcolo delle flussioni

- Il metodo delle flussioni corrisponde al moderno calcolo delle derivate rispetto al tempo.
- Le variabili geometriche sono *fluenti*, variano nel tempo: $x, y, \dots$,
- Le velocità con cui le variabili fluenti variano nel tempo, le *flussioni*, vengono indicate $\dot{x}, \dot{y}, \dots$
- Incremento infinitesimo temporale o , e quindi *momento* della variabile x : $\dot{x}o$

Il calcolo delle flussioni

- Il metodo delle flussioni corrisponde al moderno calcolo delle derivate rispetto al tempo.
- Le variabili geometriche sono *fluenti*, variano nel tempo: $x, y, \dots$,
- Le velocità con cui le variabili fluenti variano nel tempo, le *flussioni*, vengono indicate $\dot{x}, \dot{y}, \dots$
- Incremento infinitesimo temporale o , e quindi *momento* della variabile x : $\dot{x}o$
- Se è data $P(x, y) = 0$

Il calcolo delle flussioni

- Il metodo delle flussioni corrisponde al moderno calcolo delle derivate rispetto al tempo.
- Le variabili geometriche sono *fluenti*, variano nel tempo: $x, y, \dots$,
- Le velocità con cui le variabili fluenti variano nel tempo, le *flussioni*, vengono indicate $\dot{x}, \dot{y}, \dots$
- Incremento infinitesimo temporale o , e quindi *momento* della variabile x : $\dot{x}o$
- Se è data $P(x, y) = 0$ siccome i momenti di x, y , dati rispettivamente da $\dot{x}o, \dot{y}o$ sono molto piccoli rispetto a x, y , allora deve valere anche

$$P(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o) = 0.$$

Il calcolo delle flussioni

- Il metodo delle flussioni corrisponde al moderno calcolo delle derivate rispetto al tempo.
- Le variabili geometriche sono *fluente*, variano nel tempo: $x, y, \dots$,
- Le velocità con cui le variabili fluenti variano nel tempo, le *flussioni*, vengono indicate $\dot{x}, \dot{y}, \dots$
- Incremento infinitesimo temporale o , e quindi *momento* della variabile x : $\dot{x}o$
- Se è data $P(x, y) = 0$ siccome i momenti di x, y , dati rispettivamente da $\dot{x}o, \dot{y}o$ sono molto piccoli rispetto a x, y , allora deve valere anche

$$P(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o) = 0.$$

Dopo aver rimaneggiato la relazione precedente, si mette $o = 0$ da cui relazione tra le flussioni $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

Un esempio

Consideriamo l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$.

Un esempio

Consideriamo l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Operando come detto si ha $(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$

Un esempio

Consideriamo l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Operando come detto si ha $(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$ che diventa

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 + axy + a\dot{x}yo + ax\dot{y}o + a\dot{x}\dot{y}o^2 \\ - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 - \dot{y}^3o^3 = 0 \end{aligned}$$

Un esempio

Consideriamo l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Operando come detto si ha $(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$ che diventa

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 + axy + a\dot{x}yo + ax\dot{y}o + a\dot{x}\dot{y}o^2 \\ - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 - \dot{y}^3o^3 = 0$$

ovvero, a conti fatti, siccome $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$,

$$3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2o + \dot{x}^3o^2 - 2ax\dot{x} - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + ax\dot{y} \\ + a\dot{x}\dot{y}o - 3y^2\dot{y} - 3y\dot{y}^2o - \dot{y}^3o^2 = 0.$$

Un esempio

Consideriamo l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Operando come detto si ha $(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$ che diventa

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 + axy + a\dot{x}yo + ax\dot{y}o + a\dot{x}\dot{y}o^2 - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 - \dot{y}^3o^3 = 0$$

ovvero, a conti fatti, siccome $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$,

$$3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2o + \dot{x}^3o^2 - 2ax\dot{x} - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + ax\dot{y} + a\dot{x}\dot{y}o - 3y^2\dot{y} - 3y\dot{y}^2o - \dot{y}^3o^2 = 0.$$

Ponendo ora $o = 0$ si trova la relazione voluta tra le flussioni $\dot{x}$ e $\dot{y}$:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

Una regola algoritmica

Newton si rende quindi conto che può assegnare una regola algoritmica.

Una regola algoritmica

Newton si rende quindi conto che può assegnare una regola algoritmica. Precisamente, Newton dice:

Una regola algoritmica

Newton si rende quindi conto che può assegnare una regola algoritmica. Precisamente, Newton dice:

- 1) Ordinare la relazione assegnata secondo le potenze decrescenti di una variabile fluente, ad esempio x

Una regola algoritmica

Newton si rende quindi conto che può assegnare una regola algoritmica. Precisamente, Newton dice:

- 1) Ordinare la relazione assegnata secondo le potenze decrescenti di una variabile fluente, ad esempio x
- 2) Moltiplicare i termini così ordinati uno per volta per il relativo esponente di x

Una regola algoritmica

Newton si rende quindi conto che può assegnare una regola algoritmica. Precisamente, Newton dice:

- 1) Ordinare la relazione assegnata secondo le potenze decrescenti di una variabile fluente, ad esempio x
- 2) Moltiplicare i termini così ordinati uno per volta per il relativo esponente di x
- 3) Moltiplicare quindi tutti i termini per $\dot{x}/x$ e semplificare

Una regola algoritmica

Newton si rende quindi conto che può assegnare una regola algoritmica. Precisamente, Newton dice:

- 1) Ordinare la relazione assegnata secondo le potenze decrescenti di una variabile fluente, ad esempio x
- 2) Moltiplicare i termini così ordinati uno per volta per il relativo esponente di x
- 3) Moltiplicare quindi tutti i termini per $\dot{x}/x$ e semplificare
- 4) Rifare tutto il procedimento per tutte le altre variabili

Una regola algoritmica

Newton si rende quindi conto che può assegnare una regola algoritmica. Precisamente, Newton dice:

- 1) Ordinare la relazione assegnata secondo le potenze decrescenti di una variabile fluente, ad esempio x
- 2) Moltiplicare i termini così ordinati uno per volta per il relativo esponente di x
- 3) Moltiplicare quindi tutti i termini per $\dot{x}/x$ e semplificare
- 4) Rifare tutto il procedimento per tutte le altre variabili
- 5) Sommare tutte le relazioni trovate e uguagliare a 0 la somma così ottenuta.

Lo stesso esempio con la regola algoritmica

Consideriamo ancora l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$.

Lo stesso esempio con la regola algoritmica

Consideriamo ancora l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Notiamo che essa risulta già ordinata secondo le potenze decrescenti della fluente x .

Lo stesso esempio con la regola algoritmica

Consideriamo ancora l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Notiamo che essa risulta già ordinata secondo le potenze decrescenti della fluente x . Moltiplichiamo quindi ogni addendo per la progressione degli esponenti 3, 2, 1, 0, ottenendo $3x^3 - 2ax^2 + axy$.

Lo stesso esempio con la regola algoritmica

Consideriamo ancora l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Notiamo che essa risulta già ordinata secondo le potenze decrescenti della fluente x . Moltiplichiamo quindi ogni addendo per la progressione degli esponenti 3, 2, 1, 0, ottenendo $3x^3 - 2ax^2 + axy$. Moltiplichiamo ora tutti i termini per $\dot{x}/x$ trovando dunque

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}.$$

Lo stesso esempio con la regola algoritmica

Consideriamo ancora l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Notiamo che essa risulta già ordinata secondo le potenze decrescenti della fluente x . Moltiplichiamo quindi ogni addendo per la progressione degli esponenti 3, 2, 1, 0, ottenendo $3x^3 - 2ax^2 + axy$. Moltiplichiamo ora tutti i termini per $\dot{x}/x$ trovando dunque

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}.$$

Rifacciamo la stessa cosa per la variabile y : riordinando si ha $-y^3 + axy - x^3 - ax^2 = 0$

Lo stesso esempio con la regola algoritmica

Consideriamo ancora l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Notiamo che essa risulta già ordinata secondo le potenze decrescenti della fluente x . Moltiplichiamo quindi ogni addendo per la progressione degli esponenti 3, 2, 1, 0, ottenendo $3x^3 - 2ax^2 + axy$. Moltiplichiamo ora tutti i termini per $\dot{x}/x$ trovando dunque

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}.$$

Rifacciamo la stessa cosa per la variabile y : riordinando si ha $-y^3 + axy - x^3 - ax^2 = 0$ che equivale a $-y^3 + 0y^2 + axy - (x^3 + ax^2) = 0$.

Lo stesso esempio con la regola algoritmica

Consideriamo ancora l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Notiamo che essa risulta già ordinata secondo le potenze decrescenti della fluente x . Moltiplichiamo quindi ogni addendo per la progressione degli esponenti 3, 2, 1, 0, ottenendo $3x^3 - 2ax^2 + axy$. Moltiplichiamo ora tutti i termini per $\dot{x}/x$ trovando dunque

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}.$$

Rifacciamo la stessa cosa per la variabile y : riordinando si ha $-y^3 + axy - x^3 - ax^2 = 0$ che equivale a $-y^3 + 0y^2 + axy - (x^3 + ax^2) = 0$. Moltiplichiamo quindi ogni addendo per la progressione degli esponenti 3, 2, 1, 0, ottenendo $-3y^3 + axy$.

Lo stesso esempio con la regola algoritmica

Consideriamo ancora l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Notiamo che essa risulta già ordinata secondo le potenze decrescenti della fluente x . Moltiplichiamo quindi ogni addendo per la progressione degli esponenti 3, 2, 1, 0, ottenendo $3x^3 - 2ax^2 + axy$. Moltiplichiamo ora tutti i termini per $\dot{x}/x$ trovando dunque

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}.$$

Rifacciamo la stessa cosa per la variabile y : riordinando si ha

$-y^3 + axy - x^3 - ax^2 = 0$ che equivale a

$-y^3 + 0y^2 + axy - (x^3 + ax^2) = 0$. Moltiplichiamo quindi ogni addendo per la progressione degli esponenti 3, 2, 1, 0, ottenendo $-3y^3 + axy$.

Moltiplichiamo ora tutti i termini per $\dot{y}/y$ trovando dunque

$$-3y^2\dot{y} + ax\dot{y}.$$

Lo stesso esempio con la regola algoritmica

Consideriamo ancora l'equazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Notiamo che essa risulta già ordinata secondo le potenze decrescenti della fluente x . Moltiplichiamo quindi ogni addendo per la progressione degli esponenti 3, 2, 1, 0, ottenendo $3x^3 - 2ax^2 + axy$. Moltiplichiamo ora tutti i termini per $\dot{x}/x$ trovando dunque

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}.$$

Rifacciamo la stessa cosa per la variabile y : riordinando si ha $-y^3 + axy - x^3 - ax^2 = 0$ che equivale a $-y^3 + 0y^2 + axy - (x^3 + ax^2) = 0$. Moltiplichiamo quindi ogni addendo per la progressione degli esponenti 3, 2, 1, 0, ottenendo $-3y^3 + axy$. Moltiplichiamo ora tutti i termini per $\dot{y}/y$ trovando dunque

$$-3y^2\dot{y} + ax\dot{y}.$$

Sommando alla precedente $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}$ si trova quindi

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} - 3y^2\dot{y} + ax\dot{y} = 0$$

che infatti coincide con il risultato precedentemente ottenuto.

Un'applicazione: le tangenti

Sia fissata in O l'origine degli assi cartesiani e sia data la curva OBE come in figura:

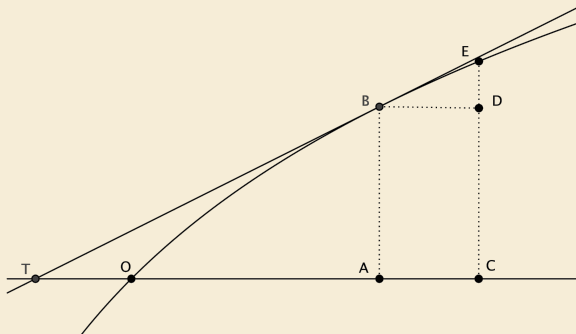


Figura : La tangente TB alla curva OBE nel punto B .

descritta dalla relazione $P(x, y) = 0$.

Poniamo $|OA| = x$ e $|AB| = y$,

Poniamo $|OA| = x$ e $|AB| = y$, e diamo un incremento temporale infinitamente piccolo, ovvero: $|AC| = o\dot{x}$ e $|DE| = o\dot{y}$.

Poniamo $|OA| = x$ e $|AB| = y$, e diamo un incremento temporale infinitamente piccolo, ovvero: $|AC| = o\dot{x}$ e $|DE| = o\dot{y}$. Essendo l'incremento temporale o molto piccolo, il punto E sarà approssimativamente sulla tangente TB

Poniamo $|OA| = x$ e $|AB| = y$, e diamo un incremento temporale infinitamente piccolo, ovvero: $|AC| = o\dot{x}$ e $|DE| = o\dot{y}$. Essendo l'incremento temporale o molto piccolo, il punto E sarà approssimativamente sulla tangente TB e dunque per la similitudine tra il triangolo TAB e il "triangolo" BDE si ha

Poniamo $|OA| = x$ e $|AB| = y$, e diamo un incremento temporale infinitamente piccolo, ovvero: $|AC| = o\dot{x}$ e $|DE| = o\dot{y}$. Essendo l'incremento temporale o molto piccolo, il punto E sarà approssimativamente sulla tangente TB e dunque per la similitudine tra il triangolo TAB e il “triangolo” BDE si ha

$$|TA| : |AB| = |BD| : |DE|$$

Poniamo $|OA| = x$ e $|AB| = y$, e diamo un incremento temporale infinitamente piccolo, ovvero: $|AC| = o\dot{x}$ e $|DE| = o\dot{y}$. Essendo l'incremento temporale o molto piccolo, il punto E sarà approssimativamente sulla tangente TB e dunque per la similitudine tra il triangolo TAB e il “triangolo” BDE si ha

$$|TA| : |AB| = |BD| : |DE|$$

da cui

$$|TA| : y = o\dot{x} : o\dot{y}.$$

Poniamo $|OA| = x$ e $|AB| = y$, e diamo un incremento temporale infinitamente piccolo, ovvero: $|AC| = o\dot{x}$ e $|DE| = o\dot{y}$. Essendo l'incremento temporale o molto piccolo, il punto E sarà approssimativamente sulla tangente TB e dunque per la similitudine tra il triangolo TAB e il “triangolo” BDE si ha

$$|TA| : |AB| = |BD| : |DE|$$

da cui

$$|TA| : y = o\dot{x} : o\dot{y}.$$

Quindi

$$|TA| = y \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$$

Poniamo $|OA| = x$ e $|AB| = y$, e diamo un incremento temporale infinitamente piccolo, ovvero: $|AC| = o\dot{x}$ e $|DE| = o\dot{y}$. Essendo l'incremento temporale o molto piccolo, il punto E sarà approssimativamente sulla tangente TB e dunque per la similitudine tra il triangolo TAB e il "triangolo" BDE si ha

$$|TA| : |AB| = |BD| : |DE|$$

da cui

$$|TA| : y = o\dot{x} : o\dot{y}.$$

Quindi

$$|TA| = y \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$$

che permette di determinare il punto T , e quindi la tangente TB .

Leibniz: cenni sulla vita

- Gottfried Wilhelm Leibniz nasce a Lipsia, in Germania, il 1° luglio 1646

Leibniz: cenni sulla vita

- Gottfried Wilhelm Leibniz nasce a Lipsia, in Germania, il 1° luglio 1646
- Nel 1661 e prende la laurea in Giurisprudenza nel 1666; in questo stesso anno pubblica anche i suoi primi lavori di logica matematica

Leibniz: cenni sulla vita

- Gottfried Wilhelm Leibniz nasce a Lipsia, in Germania, il 1° luglio 1646
- Nel 1661 e prende la laurea in Giurisprudenza nel 1666; in questo stesso anno pubblica anche i suoi primi lavori di logica matematica
- Nel 1680 comincia a dedicarsi agli studi e alla stesura di molte delle sue opere, che spaziano dalla filosofia alla logica, e in particolare le opere matematiche

Leibniz: cenni sulla vita

- Gottfried Wilhelm Leibniz nasce a Lipsia, in Germania, il 1° luglio 1646
- Nel 1661 e prende la laurea in Giurisprudenza nel 1666; in questo stesso anno pubblica anche i suoi primi lavori di logica matematica
- Nel 1680 comincia a dedicarsi agli studi e alla stesure di molte delle sue opere, che spaziano dalla filosofia alla logica, e in particolare le opere matematiche
- Sulla rivista *Acta Eruditorum*, da lui fondata nel 1682, pubblica, nel 1684, l'articolo che fissa le notazioni e le regole definitive del calcolo differenziale, ovvero *Nova Methodus pro Maximis et Minimis*

Leibniz: cenni sulla vita

- Gottfried Wilhelm Leibniz nasce a Lipsia, in Germania, il 1° luglio 1646
- Nel 1661 e prende la laurea in Giurisprudenza nel 1666; in questo stesso anno pubblica anche i suoi primi lavori di logica matematica
- Nel 1680 comincia a dedicarsi agli studi e alla stesure di molte delle sue opere, che spaziano dalla filosofia alla logica, e in particolare le opere matematiche
- Sulla rivista *Acta Eruditorum*, da lui fondata nel 1682, pubblica, nel 1684, l'articolo che fissa le notazioni e le regole definitive del calcolo differenziale, ovvero *Nova Methodus pro Maximis et Minimis*
- Muore ad Hannover il 14 novembre 1716

Il differenziale

Leibniz concepisce il calcolo dei differenziali come estrapolazione di un calcolo discreto:

Il differenziale

Leibniz concepisce il calcolo dei differenziali come estrapolazione di un calcolo discreto: infatti, egli considera prima di tutto la situazione in cui è data la variabile x che non forma un continuo geometrico,

Il differenziale

Leibniz concepisce il calcolo dei differenziali come estrapolazione di un calcolo discreto: infatti, egli considera prima di tutto la situazione in cui è data la variabile x che non forma un continuo geometrico, ma bensì forma una successione, o progressione, come viene chiamata dallo stesso Leibniz.

Il differenziale

Leibniz concepisce il calcolo dei differenziali come estrapolazione di un calcolo discreto: infatti, egli considera prima di tutto la situazione in cui è data la variabile x che non forma un continuo geometrico, ma bensì forma una successione, o progressione, come viene chiamata dallo stesso Leibniz. Precisamente quindi la variabile x assume valori discreti $\{x_i\}$, in generale infiniti.

Il differenziale

Leibniz concepisce il calcolo dei differenziali come estrapolazione di un calcolo discreto: infatti, egli considera prima di tutto la situazione in cui è data la variabile x che non forma un continuo geometrico, ma bensì forma una successione, o progressione, come viene chiamata dallo stesso Leibniz. Precisamente quindi la variabile x assume valori discreti $\{x_i\}$, in generale infiniti. Leibniz introduce quindi l'operatore differenza Δ che opera su x come segue:

Il differenziale

Leibniz concepisce il calcolo dei differenziali come estrapolazione di un calcolo discreto: infatti, egli considera prima di tutto la situazione in cui è data la variabile x che non forma un continuo geometrico, ma bensì forma una successione, o progressione, come viene chiamata dallo stesso Leibniz. Precisamente quindi la variabile x assume valori discreti $\{x_i\}$, in generale infiniti. Leibniz introduce quindi l'operatore differenza Δ che opera su x come segue:

$$\Delta_i x := x_{i+1} - x_i.$$

Il differenziale

Leibniz concepisce il calcolo dei differenziali come estrapolazione di un calcolo discreto: infatti, egli considera prima di tutto la situazione in cui è data la variabile x che non forma un continuo geometrico, ma bensì forma una successione, o progressione, come viene chiamata dallo stesso Leibniz. Precisamente quindi la variabile x assume valori discreti $\{x_i\}$, in generale infiniti. Leibniz introduce quindi l'operatore differenza Δ che opera su x come segue:

$$\Delta_i x := x_{i+1} - x_i.$$

L'operatore Δ trasforma quindi progressioni in progressioni:

Il differenziale

Leibniz concepisce il calcolo dei differenziali come estrapolazione di un calcolo discreto: infatti, egli considera prima di tutto la situazione in cui è data la variabile x che non forma un continuo geometrico, ma bensì forma una successione, o progressione, come viene chiamata dallo stesso Leibniz. Precisamente quindi la variabile x assume valori discreti $\{x_i\}$, in generale infiniti. Leibniz introduce quindi l'operatore differenza Δ che opera su x come segue:

$$\Delta_i x := x_{i+1} - x_i.$$

L'operatore Δ trasforma quindi progressioni in progressioni: esso trasforma la progressione $\{x_i\}$ nella progressione degli incrementi $\{\Delta_i x\}$.

Il differenziale

Leibniz concepisce il calcolo dei differenziali come estrapolazione di un calcolo discreto: infatti, egli considera prima di tutto la situazione in cui è data la variabile x che non forma un continuo geometrico, ma bensì forma una successione, o progressione, come viene chiamata dallo stesso Leibniz. Precisamente quindi la variabile x assume valori discreti $\{x_i\}$, in generale infiniti. Leibniz introduce quindi l'operatore differenza Δ che opera su x come segue:

$$\Delta_i x := x_{i+1} - x_i.$$

L'operatore Δ trasforma quindi progressioni in progressioni: esso trasforma la progressione $\{x_i\}$ nella progressione degli incrementi $\{\Delta_i x\}$. Per estrapolazione di Δ , viene quindi definito l'operatore *differenziale* d

Il differenziale

Leibniz concepisce il calcolo dei differenziali come estrapolazione di un calcolo discreto: infatti, egli considera prima di tutto la situazione in cui è data la variabile x che non forma un continuo geometrico, ma bensì forma una successione, o progressione, come viene chiamata dallo stesso Leibniz. Precisamente quindi la variabile x assume valori discreti $\{x_i\}$, in generale infiniti. Leibniz introduce quindi l'operatore differenza Δ che opera su x come segue:

$$\Delta_i x := x_{i+1} - x_i.$$

L'operatore Δ trasforma quindi progressioni in progressioni: esso trasforma la progressione $\{x_i\}$ nella progressione degli incrementi $\{\Delta_i x\}$. Per estrapolazione di Δ , viene quindi definito l'operatore *differenziale* d il quale stavolta agisce sulla variabile continua x pensata come progressione infinita dei suoi valori infinitamente vicini tra loro.

Leibniz passa quindi direttamente a enunciare, senza dimostrazione, le proprietà del differenziale:

Leibniz passa quindi direttamente a enunciare, senza dimostrazione, le proprietà del differenziale:

- $da = 0$, se a è una costante

Leibniz passa quindi direttamente a enunciare, senza dimostrazione, le proprietà del differenziale:

- $da = 0$, se a è una costante
- $x = y \Rightarrow dx = dy$

Leibniz passa quindi direttamente a enunciare, senza dimostrazione, le proprietà del differenziale:

- $da = 0$, se a è una costante
- $x = y \Rightarrow dx = dy$
- $d(x + y) = dx + dy$, $d(x - y) = dx - dy$

Leibniz passa quindi direttamente a enunciare, senza dimostrazione, le proprietà del differenziale:

- $da = 0$, se a è una costante
- $x = y \Rightarrow dx = dy$
- $d(x + y) = dx + dy$, $d(x - y) = dx - dy$
- $d(xy) = ydx + xdy$

Leibniz passa quindi direttamente a enunciare, senza dimostrazione, le proprietà del differenziale:

- $da = 0$, se a è una costante
- $x = y \Rightarrow dx = dy$
- $d(x + y) = dx + dy$, $d(x - y) = dx - dy$
- $d(xy) = ydx + xdy$
-

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Un esempio

Possiamo calcolare, a titolo di esercizio, seguendo le regole di Leibniz,

$$d\left(\frac{x - x^3}{\log y}\right)$$

Un esempio

Possiamo calcolare, a titolo di esercizio, seguendo le regole di Leibniz,

$$d\left(\frac{x - x^3}{\log y}\right)$$

ottenendo

$$d\left(\frac{x - x^3}{\log y}\right) =$$

Un esempio

Possiamo calcolare, a titolo di esercizio, seguendo le regole di Leibniz,

$$d\left(\frac{x - x^3}{\log y}\right)$$

ottenendo

$$d\left(\frac{x - x^3}{\log y}\right) = \frac{\log y d(x - x^3) - (x - x^3) d(\log y)}{\log^2 y}$$

Un esempio

Possiamo calcolare, a titolo di esercizio, seguendo le regole di Leibniz,

$$d\left(\frac{x - x^3}{\log y}\right)$$

ottenendo

$$\begin{aligned}d\left(\frac{x - x^3}{\log y}\right) &= \frac{\log y d(x - x^3) - (x - x^3) d(\log y)}{\log^2 y} \\&= \frac{\log y (dx - d(x^3)) - \frac{(x - x^3) dy}{y}}{\log^2 y}\end{aligned}$$

Un esempio

Possiamo calcolare, a titolo di esercizio, seguendo le regole di Leibniz,

$$d\left(\frac{x - x^3}{\log y}\right)$$

ottenendo

$$\begin{aligned}d\left(\frac{x - x^3}{\log y}\right) &= \frac{\log y d(x - x^3) - (x - x^3) d(\log y)}{\log^2 y} \\&= \frac{\log y (dx - d(x^3)) - \frac{(x - x^3) dy}{y}}{\log^2 y} \\&= \frac{y \log y (1 - 3x^2) dx - (x - x^3) dy}{y \log^2 y}.\end{aligned}$$

I differenziali primi

Quella appena presentata è la teoria dei differenziali *primi*:

I differenziali primi

Quella appena presentata è la teoria dei differenziali *primi*: in questo Leibniz giunge a conclusioni corrette, nel senso che se la relazione $P(x, y) = 0$ fosse espressa localmente da $y = f(x)$ allora è vero che il rapporto

$$\frac{dy}{dx}$$

calcolato usando le regole di Leibniz, coincide con la derivata prima di f .

I differenziali primi

Quella appena presentata è la teoria dei differenziali *primi*: in questo Leibniz giunge a conclusioni corrette, nel senso che se la relazione $P(x, y) = 0$ fosse espressa localmente da $y = f(x)$ allora è vero che il rapporto

$$\frac{dy}{dx}$$

calcolato usando le regole di Leibniz, coincide con la derivata prima di f . Difatti, secondo le regole di Leibniz,

I differenziali primi

Quella appena presentata è la teoria dei differenziali *primi*: in questo Leibniz giunge a conclusioni corrette, nel senso che se la relazione $P(x, y) = 0$ fosse espressa localmente da $y = f(x)$ allora è vero che il rapporto

$$\frac{dy}{dx}$$

calcolato usando le regole di Leibniz, coincide con la derivata prima di f . Difatti, secondo le regole di Leibniz, differenziando la relazione

$$y = f(x)$$

I differenziali primi

Quella appena presentata è la teoria dei differenziali *primi*: in questo Leibniz giunge a conclusioni corrette, nel senso che se la relazione $P(x, y) = 0$ fosse espressa localmente da $y = f(x)$ allora è vero che il rapporto

$$\frac{dy}{dx}$$

calcolato usando le regole di Leibniz, coincide con la derivata prima di f . Difatti, secondo le regole di Leibniz, differenziando la relazione

$$y = f(x)$$

si trova

$$dy = f'(x)dx$$

essendo f' la “nostra” derivata prima,

I differenziali primi

Quella appena presentata è la teoria dei differenziali *primi*: in questo Leibniz giunge a conclusioni corrette, nel senso che se la relazione $P(x, y) = 0$ fosse espressa localmente da $y = f(x)$ allora è vero che il rapporto

$$\frac{dy}{dx}$$

calcolato usando le regole di Leibniz, coincide con la derivata prima di f . Difatti, secondo le regole di Leibniz, differenziando la relazione

$$y = f(x)$$

si trova

$$dy = f'(x)dx$$

essendo f' la “nostra” derivata prima, e dunque

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Differenziali di ordine più elevato

Il prossimo step è il passaggio ai differenziali di ordine più elevato, primo vero elemento di novità rispetto al calcolo newtoniano.

Differenziali di ordine più elevato

Il prossimo step è il passaggio ai differenziali di ordine più elevato, primo vero elemento di novità rispetto al calcolo newtoniano. Leibniz infatti osserva che una volta assegnata la progressione della variabile x , anche dx è una variabile che forma una progressione infinita,

Differenziali di ordine più elevato

Il prossimo step è il passaggio ai differenziali di ordine più elevato, primo vero elemento di novità rispetto al calcolo newtoniano. Leibniz infatti osserva che una volta assegnata la progressione della variabile x , anche dx è una variabile che forma una progressione infinita, e dunque ha senso considerare ddx , denotato anche con d^2x ,

Differenziali di ordine più elevato

Il prossimo step è il passaggio ai differenziali di ordine più elevato, primo vero elemento di novità rispetto al calcolo newtoniano. Leibniz infatti osserva che una volta assegnata la progressione della variabile x , anche dx è una variabile che forma una progressione infinita, e dunque ha senso considerare ddx , denotato anche con d^2x , e quindi per ricorsione $d^3x, d^4x, \dots$

Differenziali di ordine più elevato

Il prossimo step è il passaggio ai differenziali di ordine più elevato, primo vero elemento di novità rispetto al calcolo newtoniano. Leibniz infatti osserva che una volta assegnata la progressione della variabile x , anche dx è una variabile che forma una progressione infinita, e dunque ha senso considerare ddx , denotato anche con d^2x , e quindi per ricorsione $d^3x, d^4x, \dots$. Così come dx è una quantità infinitamente piccola rispetto a x , il *differenziale secondo* d^2x è una quantità infinitamente piccola rispetto a dx , il *differenziale terzo* d^3x è una quantità infinitamente piccola rispetto a d^2x , e così via.

Differenziali di ordine più elevato

Il prossimo step è il passaggio ai differenziali di ordine più elevato, primo vero elemento di novità rispetto al calcolo newtoniano. Leibniz infatti osserva che una volta assegnata la progressione della variabile x , anche dx è una variabile che forma una progressione infinita, e dunque ha senso considerare ddx , denotato anche con d^2x , e quindi per ricorsione $d^3x, d^4x, \dots$. Così come dx è una quantità infinitamente piccola rispetto a x , il *differenziale secondo* d^2x è una quantità infinitamente piccola rispetto a dx , il *differenziale terzo* d^3x è una quantità infinitamente piccola rispetto a d^2x , e così via. Sfruttando il calcolo dei differenziali successivi, che obbediscono alle stesse leggi dei differenziali primi ovviamente, Leibniz afferma che è dunque possibile scrivere infinite equazioni differenziali a partire dall'equazione di una curva, differenziando ripetutamente l'espressione assegnata.

Un esempio

Consideriamo, ad esempio, la relazione $ay = x^2$.

Un esempio

Consideriamo, ad esempio, la relazione $ay = x^2$. Da essa, per differenziazione, si trova $ady = 2xdx$.

Un esempio

Consideriamo, ad esempio, la relazione $ay = x^2$. Da essa, per differenziazione, si trova $ady = 2xdx$. Differenziando nuovamente si hanno le relazioni successive:

$$ad^2y = 2dx^2 + 2xd^2x, \quad ad^3y = 4dxd^2x + 2dxd^2x + 2xd^3x = 6dxd^2x + 2xd^3x,$$

...

Un esempio

Consideriamo, ad esempio, la relazione $ay = x^2$. Da essa, per differenziazione, si trova $ady = 2xdx$. Differenziando nuovamente si hanno le relazioni successive:

$$ad^2y = 2dx^2 + 2xd^2x, \quad ad^3y = 4dxd^2x + 2dxd^2x + 2xd^3x = 6dxd^2x + 2xd^3x,$$

...

Supponiamo ora che venga scelta una progressione della variabile x tale per cui si abbia che dx è costante, e quindi $d^2x = 0$.

Un esempio

Consideriamo, ad esempio, la relazione $ay = x^2$. Da essa, per differenziazione, si trova $ady = 2xdx$. Differenziando nuovamente si hanno le relazioni successive:

$$ad^2y = 2dx^2 + 2xd^2x, \quad ad^3y = 4dxd^2x + 2xd^2d^2x + 2xd^3x = 6dxd^2x + 2xd^3x,$$

...

Supponiamo ora che venga scelta una progressione della variabile x tale per cui si abbia che dx è costante, e quindi $d^2x = 0$. Segue che si hanno le equazioni differenziali

$$ady = 2xdx, \quad ad^2y = 2dx^2, \quad ad^3y = 0, \quad \dots$$

Un esempio

Consideriamo, ad esempio, la relazione $ay = x^2$. Da essa, per differenziazione, si trova $ady = 2xdx$. Differenziando nuovamente si hanno le relazioni successive:

$$ad^2y = 2dx^2 + 2xd^2x, \quad ad^3y = 4dxd^2x + 2xd^3x = 6dxd^2x + 2xd^3x,$$

...

Supponiamo ora che venga scelta una progressione della variabile x tale per cui si abbia che dx è costante, e quindi $d^2x = 0$. Segue che si hanno le equazioni differenziali

$$ady = 2xdx, \quad ad^2y = 2dx^2, \quad ad^3y = 0, \quad \dots$$

Se invece viene scelta una progressione della variabile y tale per cui si abbia che dy è costante, e quindi $d^2y = 0$, allora si hanno le equazioni differenziali

$$ady = 2xdx, \quad 0 = 2dx^2 + 2xd^2x, \quad 0 = 6dxd^2x + 2xd^3x, \quad \dots$$

Le equazioni appena scritte oggi le scriveremmo rispettivamente come

$$ay' = 2x, \quad ay'' = 2, \quad ay''' = 0, \quad \dots$$

e

$$a = 2xx', \quad 0 = 2(x')^2 + 2xx'', \quad 0 = 6x'x'' + 2xx''', \quad \dots$$

Le equazioni appena scritte oggi le scriveremmo rispettivamente come

$$ay' = 2x, \quad ay'' = 2, \quad ay''' = 0, \quad \dots$$

e

$$a = 2xx', \quad 0 = 2(x')^2 + 2xx'', \quad 0 = 6x'x'' + 2xx''', \quad \dots$$

che corrispondono a derivare la funzione

$$y = \frac{x^2}{a}$$

oppure la funzione $x = \sqrt{ay}$ rispettivamente.

L'esempio precedente suggerisce alcune importanti osservazioni circa l'uso dei differenziali di ordine maggiore di 1.

L'esempio precedente suggerisce alcune importanti osservazioni circa l'uso dei differenziali di ordine maggiore di 1. Infatti, contrariamente a quanto visto per i differenziali del primo ordine,

L'esempio precedente suggerisce alcune importanti osservazioni circa l'uso dei differenziali di ordine maggiore di 1. Infatti, contrariamente a quanto visto per i differenziali del primo ordine, se la relazione $P(x, y) = 0$ fosse espressa localmente da $y = f(x)$ allora il rapporto

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

calcolato usando le regole di Leibniz, *non coincide*, in generale, con la derivata seconda di f , nonostante la notazione moderna sia ancora questa.

L'esempio precedente suggerisce alcune importanti osservazioni circa l'uso dei differenziali di ordine maggiore di 1. Infatti, contrariamente a quanto visto per i differenziali del primo ordine, se la relazione $P(x, y) = 0$ fosse espressa localmente da $y = f(x)$ allora il rapporto

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

calcolato usando le regole di Leibniz, *non coincide*, in generale, con la derivata seconda di f , nonostante la notazione moderna sia ancora questa. Infatti, differenziando due volte la relazione

$$y = f(x)$$

usando le regole di Leibniz,

L'esempio precedente suggerisce alcune importanti osservazioni circa l'uso dei differenziali di ordine maggiore di 1. Infatti, contrariamente a quanto visto per i differenziali del primo ordine, se la relazione $P(x, y) = 0$ fosse espressa localmente da $y = f(x)$ allora il rapporto

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

calcolato usando le regole di Leibniz, *non coincide*, in generale, con la derivata seconda di f , nonostante la notazione moderna sia ancora questa. Infatti, differenziando due volte la relazione

$$y = f(x)$$

usando le regole di Leibniz, si trova

$$dy = f'(x)dx, \quad d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

dove, come al solito, f' e f'' sono rispettivamente le “nostre” derivate, prima e seconda.

L'esempio precedente suggerisce alcune importanti osservazioni circa l'uso dei differenziali di ordine maggiore di 1. Infatti, contrariamente a quanto visto per i differenziali del primo ordine, se la relazione $P(x, y) = 0$ fosse espressa localmente da $y = f(x)$ allora il rapporto

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

calcolato usando le regole di Leibniz, *non coincide*, in generale, con la derivata seconda di f , nonostante la notazione moderna sia ancora questa. Infatti, differenziando due volte la relazione

$$y = f(x)$$

usando le regole di Leibniz, si trova

$$dy = f'(x)dx, \quad d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

dove, come al solito, f' e f'' sono rispettivamente le “nostre” derivate, prima e seconda. Dunque,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

solo se $d^2x = 0$, cioè solo se la progressione di dx è costante.

Le tangenti

Vediamo quindi come Leibniz applica il calcolo differenziale per risolvere il classico problema delle tangenti:

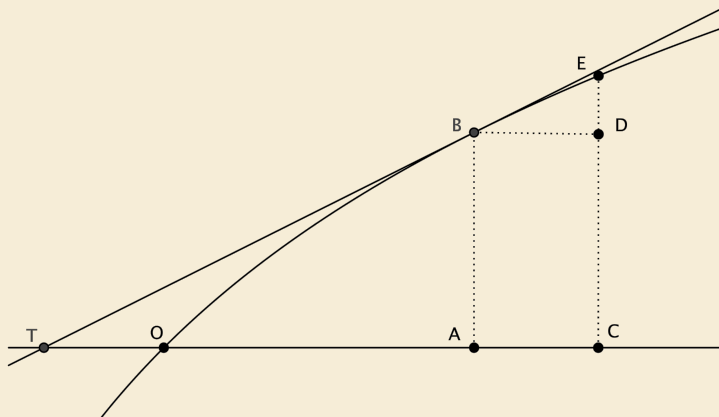


Figura : La tangente TB alla curva OBE nel punto B .

Leibniz osserva, come del resto era già ben noto, che approssimativamente si ha

$$|BD| : |DE| = |TA| : |AB|.$$

Leibniz osserva, come del resto era già ben noto, che approssimativamente si ha

$$|BD| : |DE| = |TA| : |AB|.$$

Estrapolando quindi l'operatore differenza si ha la relazione

$$dx : dy = |TA| : |AB|$$

Leibniz osserva, come del resto era già ben noto, che approssimativamente si ha

$$|BD| : |DE| = |TA| : |AB|.$$

Estrapolando quindi l'operatore differenza si ha la relazione

$$dx : dy = |TA| : |AB|$$

da cui si ricava la sottotangente

$$|TA| = |AB| \frac{dx}{dy} \quad (1)$$

Leibniz osserva, come del resto era già ben noto, che approssimativamente si ha

$$|BD| : |DE| = |TA| : |AB|.$$

Estrapolando quindi l'operatore differenza si ha la relazione

$$dx : dy = |TA| : |AB|$$

da cui si ricava la sottotangente

$$|TA| = |AB| \frac{dx}{dy} \quad (1)$$

che, in quanto a notazione, è esattamente quello che scriveremmo oggi:

Leibniz osserva, come del resto era già ben noto, che approssimativamente si ha

$$|BD| : |DE| = |TA| : |AB|.$$

Estrapolando quindi l'operatore differenza si ha la relazione

$$dx : dy = |TA| : |AB|$$

da cui si ricava la sottotangente

$$|TA| = |AB| \frac{dx}{dy} \quad (1)$$

che, in quanto a notazione, è esattamente quello che scriveremmo oggi: la differenza che c'è tra la (1) e il nostro modo di concepire la (1) risiede nel fatto che per noi la scrittura

$$\frac{dx}{dy}$$

è una notazione unica, mentre per Leibniz è un vero rapporto algebrico di differenziali.