

I teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Introduzione

Durante un corso di Calcolo Differenziale, dopo aver appreso e digerito il concetto di derivata di una funzione, si è soliti presentare alcuni teoremi legati all'argomento. I più importanti sono:

Introduzione

Durante un corso di Calcolo Differenziale, dopo aver appreso e digerito il concetto di derivata di una funzione, si è soliti presentare alcuni teoremi legati all'argomento. I più importanti sono:



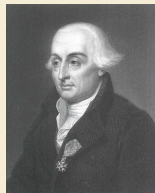
il teorema di Rolle

Introduzione

Durante un corso di Calcolo Differenziale, dopo aver appreso e digerito il concetto di derivata di una funzione, si è soliti presentare alcuni teoremi legati all'argomento. I più importanti sono:



il teorema di Rolle



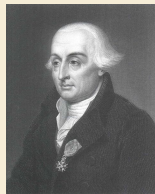
il teorema di Lagrange

Introduzione

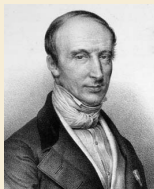
Durante un corso di Calcolo Differenziale, dopo aver appreso e digerito il concetto di derivata di una funzione, si è soliti presentare alcuni teoremi legati all'argomento. I più importanti sono:



il teorema di Rolle



il teorema di Lagrange



il teorema di Cauchy

Obiettivo dei teoremi

A che servono questi teoremi?

Obiettivo dei teoremi

A che servono questi teoremi? A rompere le scatole agli studenti, direte!

Obiettivo dei teoremi

A che servono questi teoremi? A rompere le scatole agli studenti, direte!

E invece no: l'importanza di questi teoremi sta nel fatto che collegano il concetto di derivata allo studio di funzioni. Essi sono teoremi *fondamentali*, nel senso che stanno alla base di tanti altri concetti.

Obiettivo dei teoremi

A che servono questi teoremi? A rompere le scatole agli studenti, direte!

E invece no: l'importanza di questi teoremi sta nel fatto che collegano il concetto di derivata allo studio di funzioni. Essi sono teoremi *fondamentali*, nel senso che stanno alla base di tanti altri concetti.

Ad esempio, per dedurre il fatto, molto intuitivo, che

una funzione che abbia derivata nulla su tutto un intervallo deve essere costante in quell'intervallo

si usano questi teoremi.

Obiettivo dei teoremi

A che servono questi teoremi? A rompere le scatole agli studenti, direte!

E invece no: l'importanza di questi teoremi sta nel fatto che collegano il concetto di derivata allo studio di funzioni. Essi sono teoremi *fondamentali*, nel senso che stanno alla base di tanti altri concetti.

Ad esempio, per dedurre il fatto, molto intuitivo, che

una funzione che abbia derivata nulla su tutto un intervallo deve essere costante in quell'intervallo

si usano questi teoremi.

Oppure, per dimostrare che

una funzione che abbia derivata positiva su tutto un intervallo deve essere crescente in quell'intervallo

si usano questi teoremi.

Importanza dei teoremi

Dei tre teoremi, il più generale è il Teorema di Cauchy. Esso comprende, come casi particolari, gli altri due teoremi.

Importanza dei teoremi

Dei tre teoremi, il più generale è il Teorema di Cauchy. Esso comprende, come casi particolari, gli altri due teoremi.

Ma come spesso succede in Matematica, i teoremi più generali vengono dimostrati a partire da casi particolari.

Importanza dei teoremi

Dei tre teoremi, il più generale è il Teorema di Cauchy. Esso comprende, come casi particolari, gli altri due teoremi.

Ma come spesso succede in Matematica, i teoremi più generali vengono dimostrati a partire da casi particolari.

E infatti anche noi seguiremo questo percorso: dimostreremo prima il Teorema di Rolle, che sta alla base degli altri due.

Importanza dei teoremi

Dei tre teoremi, il più generale è il Teorema di Cauchy. Esso comprende, come casi particolari, gli altri due teoremi.

Ma come spesso succede in Matematica, i teoremi più generali vengono dimostrati a partire da casi particolari.

E infatti anche noi seguiremo questo percorso: dimostreremo prima il Teorema di Rolle, che sta alla base degli altri due. Poi dimostreremo il Teorema di Lagrange, che muove un passo in avanti e generalizza quello di Rolle.

Importanza dei teoremi

Dei tre teoremi, il più generale è il Teorema di Cauchy. Esso comprende, come casi particolari, gli altri due teoremi.

Ma come spesso succede in Matematica, i teoremi più generali vengono dimostrati a partire da casi particolari.

E infatti anche noi seguiremo questo percorso: dimostreremo prima il Teorema di Rolle, che sta alla base degli altri due.

Poi dimostreremo il Teorema di Lagrange, che muove un passo in avanti e generalizza quello di Rolle.

Infine, dimostreremo il Teorema di Cauchy, che muove un passo ulteriore e generalizza i due precedenti.

I nomi dei tre teoremi

Soffermiamoci un attimo sul nome dei tre teoremi: tante volte nella Matematica capita che non ci sia un'attribuzione chiara di un certo risultato, e che il nome assegnato ai teoremi sia legato alla tradizione più che al valore storico.

I nomi dei tre teoremi

Soffermiamoci un attimo sul nome dei tre teoremi: tante volte nella Matematica capita che non ci sia un'attribuzione chiara di un certo risultato, e che il nome assegnato ai teoremi sia legato alla tradizione più che al valore storico.

In questo caso, è abbastanza condiviso attribuire il Teorema di Rolle proprio al matematico francese Michel Rolle (1652-1719), che pare sia stato il primo a fornirne una dimostrazione piuttosto rigorosa (perlomeno in linea con gli standard del suo periodo).

I nomi dei tre teoremi

Soffermiamoci un attimo sul nome dei tre teoremi: tante volte nella Matematica capita che non ci sia un'attribuzione chiara di un certo risultato, e che il nome assegnato ai teoremi sia legato alla tradizione più che al valore storico.

In questo caso, è abbastanza condiviso attribuire il Teorema di Rolle proprio al matematico francese Michel Rolle (1652-1719), che pare sia stato il primo a fornirne una dimostrazione piuttosto rigorosa (perlomeno in linea con gli standard del suo periodo).

Riguardo invece ai Teoremi di Lagrange e Cauchy, non c'è un motivo storico per attribuire il primo a Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e il secondo a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

I nomi dei tre teoremi

Soffermiamoci un attimo sul nome dei tre teoremi: tante volte nella Matematica capita che non ci sia un'attribuzione chiara di un certo risultato, e che il nome assegnato ai teoremi sia legato alla tradizione più che al valore storico.

In questo caso, è abbastanza condiviso attribuire il Teorema di Rolle proprio al matematico francese Michel Rolle (1652-1719), che pare sia stato il primo a fornirne una dimostrazione piuttosto rigorosa (perlomeno in linea con gli standard del suo periodo).

Riguardo invece ai Teoremi di Lagrange e Cauchy, non c'è un motivo storico per attribuire il primo a Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e il secondo a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

Anzi, all'estero si parla più in generale di “Teorema del valor medio” e “Teorema esteso del valor medio” (o anche di “Teorema degli accrescimenti finiti”).

I nomi dei tre teoremi

Soffermiamoci un attimo sul nome dei tre teoremi: tante volte nella Matematica capita che non ci sia un'attribuzione chiara di un certo risultato, e che il nome assegnato ai teoremi sia legato alla tradizione più che al valore storico.

In questo caso, è abbastanza condiviso attribuire il Teorema di Rolle proprio al matematico francese Michel Rolle (1652-1719), che pare sia stato il primo a fornirne una dimostrazione piuttosto rigorosa (perlomeno in linea con gli standard del suo periodo).

Riguardo invece ai Teoremi di Lagrange e Cauchy, non c'è un motivo storico per attribuire il primo a Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e il secondo a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

Anzi, all'estero si parla più in generale di “Teorema del valor medio” e “Teorema esteso del valor medio” (o anche di “Teorema degli accrescimenti finiti”).

Ma non c'è dubbio che Lagrange e Cauchy siano stati tra i primi a formalizzare e dimostrare in modo rigoroso queste proprietà delle funzioni derivabili.

Il Teorema di Rolle

Dopo tutte queste chiacchiere, cominciamo finalmente con la Matematica.

Teorema di Rolle

Siano $a < b$ e sia $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile su tutto l'intervallo aperto $]a; b[$ e che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $c \in]a; b[$ tale che $f'(c) = 0$.

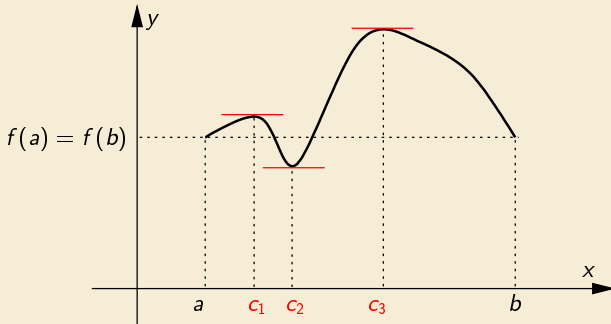
Il Teorema di Rolle

Dopo tutte queste chiacchiere, cominciamo finalmente con la Matematica.

Teorema di Rolle

Siano $a < b$ e sia $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile su tutto l'intervallo aperto $]a; b[$ e che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $c \in]a; b[$ tale che $f'(c) = 0$.

Naturalmente, c potrebbe non essere unico, come mostrato in figura.



Dimostrazione del Teorema di Rolle

Dim. f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$

Dimostrazione del Teorema di Rolle

Dim. f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$

⇓ Teorema di Weierstrass

Dimostrazione del Teorema di Rolle

Dim. f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$

⇓ Teorema di Weierstrass

f ammette punto di massimo x_M e punto di minimo x_m in $[a; b]$.

Dimostrazione del Teorema di Rolle

Dim. f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$

⇓ Teorema di Weierstrass

f ammette punto di massimo x_M e punto di minimo x_m in $[a; b]$.

Ora analizziamo tre casi:

1. $x_M \in]a; b[$: poiché x_M è punto di massimo e f è derivabile sull'intervallo aperto, si deve avere $f'(x_M) = 0$, quindi si può scegliere $c = x_M$.

Dimostrazione del Teorema di Rolle

Dim. f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$

⇓ Teorema di Weierstrass

f ammette punto di massimo x_M e punto di minimo x_m in $[a; b]$.

Ora analizziamo tre casi:

1. $x_M \in]a; b[$: poiché x_M è punto di massimo e f è derivabile sull'intervallo aperto, si deve avere $f'(x_M) = 0$, quindi si può scegliere $c = x_M$.
2. $x_m \in]a; b[$: allo stesso modo, poiché x_m è punto di minimo, si deve avere $f'(x_m) = 0$, quindi si può scegliere $c = x_m$.

Dimostrazione del Teorema di Rolle

Dim. f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$

⇓ Teorema di Weierstrass

f ammette punto di massimo x_M e punto di minimo x_m in $[a; b]$.

Ora analizziamo tre casi:

1. $x_M \in]a; b[$: poiché x_M è punto di massimo e f è derivabile sull'intervallo aperto, si deve avere $f'(x_M) = 0$, quindi si può scegliere $c = x_M$.
2. $x_m \in]a; b[$: allo stesso modo, poiché x_m è punto di minimo, si deve avere $f'(x_m) = 0$, quindi si può scegliere $c = x_m$.
3. $x_M, x_m \notin]a; b[$: questo vuol dire che i punti di massimo e minimo stanno sugli estremi a, b dell'intervallo. Ma poiché $f(a) = f(b)$, massimo e minimo devono coincidere, quindi f è costante.

Ma allora $f' = 0$ in ogni punto di $]a; b[$ e posso scegliere c a piacere. □

Approfondimento: derivata nei punti di massimo e minimo

Nel corso della dimostrazione, abbiamo usato il fatto che

se una funzione derivabile f in un intervallo aperto ha un punto di massimo in quell'intervallo, allora f' è nulla in quel punto.

Approfondimento: derivata nei punti di massimo e minimo

Nel corso della dimostrazione, abbiamo usato il fatto che

se una funzione derivabile f in un intervallo aperto ha un punto di massimo in quell'intervallo, allora f' è nulla in quel punto.

(la stessa cosa vale con un punto di minimo, naturalmente.)

Ora ne diamo una dimostrazione.

Approfondimento: derivata nei punti di massimo e minimo

Nel corso della dimostrazione, abbiamo usato il fatto che

se una funzione derivabile f in un intervallo aperto ha un punto di massimo in quell'intervallo, allora f' è nulla in quel punto.

(la stessa cosa vale con un punto di minimo, naturalmente.)

Ora ne diamo una dimostrazione.

Dim. Se x_M è punto di massimo, si ha $f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in]a; b[$.

Approfondimento: derivata nei punti di massimo e minimo

Nel corso della dimostrazione, abbiamo usato il fatto che

se una funzione derivabile f in un intervallo aperto ha un punto di massimo in quell'intervallo, allora f' è nulla in quel punto.

(la stessa cosa vale con un punto di minimo, naturalmente.)

Ora ne diamo una dimostrazione.

Dim. Se x_M è punto di massimo, si ha $f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in]a; b[$.
Il rapporto incrementale in x_M quindi dà, per $h > 0$,

$$\frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_M) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \leq 0.$$

Approfondimento: derivata nei punti di massimo e minimo

Nel corso della dimostrazione, abbiamo usato il fatto che

se una funzione derivabile f in un intervallo aperto ha un punto di massimo in quell'intervallo, allora f' è nulla in quel punto.

(la stessa cosa vale con un punto di minimo, naturalmente.)

Ora ne diamo una dimostrazione.

Dim. Se x_M è punto di massimo, si ha $f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in]a; b[$.
Il rapporto incrementale in x_M quindi dà, per $h > 0$,

$$\frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_M) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \leq 0.$$

Allo stesso modo, per $h < 0$ si ottiene

$$\frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_M) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \geq 0.$$

Approfondimento: derivata nei punti di massimo e minimo

Nel corso della dimostrazione, abbiamo usato il fatto che

se una funzione derivabile f in un intervallo aperto ha un punto di massimo in quell'intervallo, allora f' è nulla in quel punto.

(la stessa cosa vale con un punto di minimo, naturalmente.)

Ora ne diamo una dimostrazione.

Dim. Se x_M è punto di massimo, si ha $f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in]a; b[$.
Il rapporto incrementale in x_M quindi dà, per $h > 0$,

$$\frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_M) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \leq 0.$$

Allo stesso modo, per $h < 0$ si ottiene

$$\frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_M) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \geq 0.$$

Quindi si ha $f'(x_M) = 0$.



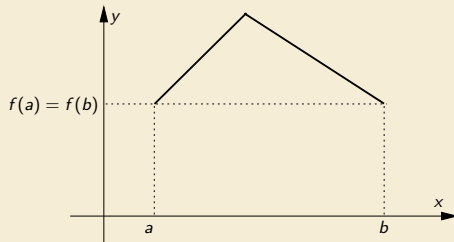
Controesempi al Teorema di Rolle

Le ipotesi del Teorema di Rolle sono tutte necessarie, nel senso che se una di esse non vale si possono trovare degli esempi che violano il teorema.

Controesempi al Teorema di Rolle

Le ipotesi del Teorema di Rolle sono tutte necessarie, nel senso che se una di esse non vale si possono trovare degli esempi che violano il teorema.

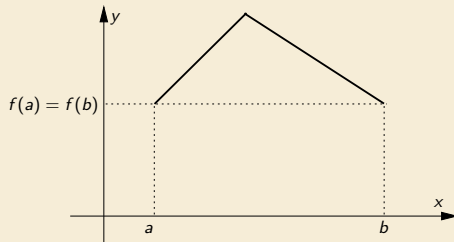
Se f non fosse derivabile, si potrebbe avere una situazione come in figura, in cui non ci sono punti a derivata nulla.



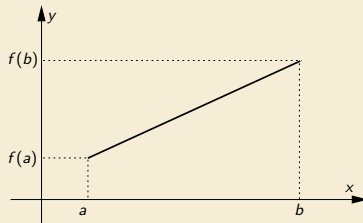
Controesempi al Teorema di Rolle

Le ipotesi del Teorema di Rolle sono tutte necessarie, nel senso che se una di esse non vale si possono trovare degli esempi che violano il teorema.

Se f non fosse derivabile, si potrebbe avere una situazione come in figura, in cui non ci sono punti a derivata nulla.

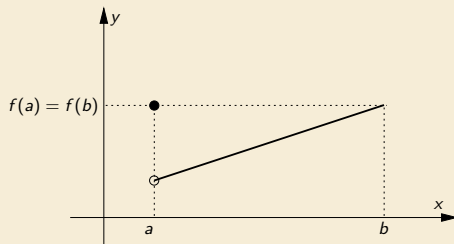


Se fosse $f(a) \neq f(b)$, si potrebbe avere una retta obliqua, come in figura, in cui non ci sono punti a derivata nulla.



Controesempi al Teorema di Rolle

Infine, se f non fosse continua in uno degli estremi, potrebbe capitare la situazione in figura, in cui di nuovo non ci sono punti a derivata nulla.



Esercizio sul Teorema di Rolle

Un tipico esercizio sul Teorema di Rolle è il seguente:

Esercizio

Stabilire se il Teorema di Rolle è applicabile alla funzione

$f(x) = \sin^2 x + \cos x$ sull'intervallo $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio sul Teorema di Rolle

Un tipico esercizio sul Teorema di Rolle è il seguente:

Esercizio

Stabilire se il Teorema di Rolle è applicabile alla funzione $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ sull'intervallo $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Svolgimento. La funzione f , essendo composizione di funzioni derivabili, è sicuramente continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio sul Teorema di Rolle

Un tipico esercizio sul Teorema di Rolle è il seguente:

Esercizio

Stabilire se il Teorema di Rolle è applicabile alla funzione $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ sull'intervallo $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Svolgimento. La funzione f , essendo composizione di funzioni derivabili, è sicuramente continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Inoltre, $f(0) = 1 = f(\frac{\pi}{2})$, quindi le ipotesi del Teorema di Rolle sono soddisfatte.

Esercizio sul Teorema di Rolle

Un tipico esercizio sul Teorema di Rolle è il seguente:

Esercizio

Stabilire se il Teorema di Rolle è applicabile alla funzione $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ sull'intervallo $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Svolgimento. La funzione f , essendo composizione di funzioni derivabili, è sicuramente continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Inoltre, $f(0) = 1 = f(\frac{\pi}{2})$, quindi le ipotesi del Teorema di Rolle sono soddisfatte.

Essendo sicuri che esistono dei punti c in cui la derivata si annulla, possiamo provare a trovarli:

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - \sin x = \sin x(2 \cos x - 1) = 0.$$

Esercizio sul Teorema di Rolle

L'equazione goniometrica $\sin x(2 \cos x - 1) = 0$ ha soluzioni per

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k\pi$$

ma queste sono tutte fuori dall'intervallo aperto $]0; \frac{\pi}{2}[$.

Esercizio sul Teorema di Rolle

L'equazione goniometrica $\sin x(2 \cos x - 1) = 0$ ha soluzioni per

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k\pi$$

ma queste sono tutte fuori dall'intervallo aperto $]0; \frac{\pi}{2}[$.

Inoltre ci sono le soluzioni date da

$$2 \cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Esercizio sul Teorema di Rolle

L'equazione goniometrica $\sin x(2 \cos x - 1) = 0$ ha soluzioni per

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k\pi$$

ma queste sono tutte fuori dall'intervallo aperto $]0; \frac{\pi}{2}[$.

Inoltre ci sono le soluzioni date da

$$2 \cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Tra queste, l'unica che si trova nell'intervallo dato è $x = \frac{\pi}{3}$.

Il Teorema di Rolle è verificato per $c = \frac{\pi}{3}$.



Il Teorema di Lagrange

Ora facciamo un passo ulteriore, enunciando il secondo teorema.

Il Teorema di Lagrange

Ora facciamo un passo ulteriore, enunciando il secondo teorema.

Teorema di Lagrange

Siano $a < b$ e sia $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile su tutto l'intervallo aperto $]a; b[$. Allora esiste $c \in]a; b[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

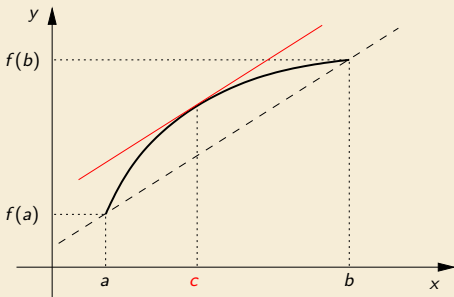
Il Teorema di Lagrange

Ora facciamo un passo ulteriore, enunciando il secondo teorema.

Teorema di Lagrange

Siano $a < b$ e sia $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile su tutto l'intervallo aperto $]a; b[$. Allora esiste $c \in]a; b[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Il rapporto a secondo membro

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

è il coefficiente angolare della retta passante per gli estremi dell'arco di curva (tratteggiata nella figura).

Osservazioni sul Teorema di Lagrange

Prima di darne la dimostrazione, facciamo alcune osservazioni sul Teorema di Lagrange.

Osservazioni sul Teorema di Lagrange

Prima di darne la dimostrazione, facciamo alcune osservazioni sul Teorema di Lagrange.

- Questo teorema è forse il più importante dei tre: anche se il Teorema di Cauchy è più generale, per le questioni riguardanti lo studio delle funzioni si usa quasi sempre il Teorema di Lagrange.

Osservazioni sul Teorema di Lagrange

Prima di darne la dimostrazione, facciamo alcune osservazioni sul Teorema di Lagrange.

- Questo teorema è forse il più importante dei tre: anche se il Teorema di Cauchy è più generale, per le questioni riguardanti lo studio delle funzioni si usa quasi sempre il Teorema di Lagrange.
- Rispetto al Teorema di Rolle, questo teorema ha un'ipotesi *in meno*: non viene richiesto che la funzione parta e arrivi con lo stesso valore.

Osservazioni sul Teorema di Lagrange

Prima di darne la dimostrazione, facciamo alcune osservazioni sul Teorema di Lagrange.

- Questo teorema è forse il più importante dei tre: anche se il Teorema di Cauchy è più generale, per le questioni riguardanti lo studio delle funzioni si usa quasi sempre il Teorema di Lagrange.
- Rispetto al Teorema di Rolle, questo teorema ha un'ipotesi *in meno*: non viene richiesto che la funzione parta e arrivi con lo stesso valore.
- Il Teorema di Rolle è un caso particolare di questo: se vale anche che $f(a) = f(b)$, il secondo membro si annulla e otteniamo appunto il Teorema di Rolle.

Osservazioni sul Teorema di Lagrange

Prima di darne la dimostrazione, facciamo alcune osservazioni sul Teorema di Lagrange.

- Questo teorema è forse il più importante dei tre: anche se il Teorema di Cauchy è più generale, per le questioni riguardanti lo studio delle funzioni si usa quasi sempre il Teorema di Lagrange.
- Rispetto al Teorema di Rolle, questo teorema ha un'ipotesi *in meno*: non viene richiesto che la funzione parta e arrivi con lo stesso valore.
- Il Teorema di Rolle è un caso particolare di questo: se vale anche che $f(a) = f(b)$, il secondo membro si annulla e otteniamo appunto il Teorema di Rolle.
- Il teorema ha un'interpretazione geometrica semplice: esiste un punto sulla funzione che ha la tangente parallela alla retta che congiunge i due estremi dell'arco di funzione (si veda la figura precedente).

Dimostrazione del Teorema di Lagrange

Dim. Costruiamo, a partire da f , una funzione che soddisfi le ipotesi del Teorema di Rolle.

Dimostrazione del Teorema di Lagrange

Dim. Costruiamo, a partire da f , una funzione che soddisfi le ipotesi del Teorema di Rolle.

Per fare ciò, sommiamo a f una funzione lineare. Definiamo quindi una funzione g in questo modo:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Poiché la funzione lineare aggiunta è sempre derivabile, si ha che g è sicuramente continua su $[a; b]$ e derivabile su $]a; b[$.

Dimostrazione del Teorema di Lagrange

Dim. Costruiamo, a partire da f , una funzione che soddisfi le ipotesi del Teorema di Rolle.

Per fare ciò, sommiamo a f una funzione lineare. Definiamo quindi una funzione g in questo modo:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Poiché la funzione lineare aggiunta è sempre derivabile, si ha che g è sicuramente continua su $[a; b]$ e derivabile su $]a; b[$.

Inoltre

$$g(a) = f(a),$$

Dimostrazione del Teorema di Lagrange

Dim. Costruiamo, a partire da f , una funzione che soddisfi le ipotesi del Teorema di Rolle.

Per fare ciò, sommiamo a f una funzione lineare. Definiamo quindi una funzione g in questo modo:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Poiché la funzione lineare aggiunta è sempre derivabile, si ha che g è sicuramente continua su $[a; b]$ e derivabile su $]a; b[$.

Inoltre

$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b) - [f(b) - f(a)] = f(a)$$

quindi g assume lo stesso valore negli estremi.

Dimostrazione del Teorema di Lagrange

Dim. Costruiamo, a partire da f , una funzione che soddisfi le ipotesi del Teorema di Rolle.

Per fare ciò, sommiamo a f una funzione lineare. Definiamo quindi una funzione g in questo modo:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Poiché la funzione lineare aggiunta è sempre derivabile, si ha che g è sicuramente continua su $[a; b]$ e derivabile su $]a; b[$.

Inoltre

$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b) - [f(b) - f(a)] = f(a)$$

quindi g assume lo stesso valore negli estremi.

Per il Teorema di Rolle si ha allora che esiste c tale che

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e dunque vale il Teorema di Lagrange.



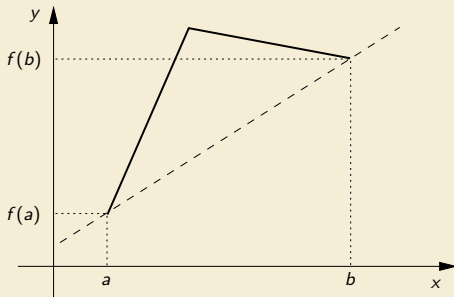
Controesempi al Teorema di Lagrange

Anche nel caso del Teorema di Lagrange si possono vedere dei controesempi se cadono alcune ipotesi.

Controesempi al Teorema di Lagrange

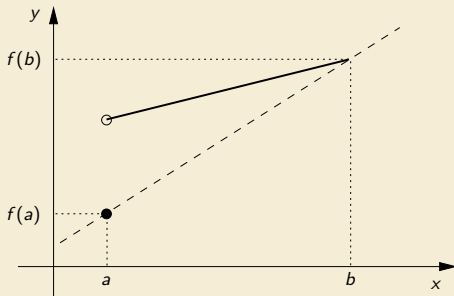
Anche nel caso del Teorema di Lagrange si possono vedere dei controesempi se cadono alcune ipotesi.

Se f non fosse derivabile, si potrebbe avere una situazione come in figura, in cui non ci sono punti con tangente parallela alla retta che unisce gli estremi:



Controesempi al Teorema di Lagrange

Se invece f non fosse continua in uno degli estremi, potrebbe capitare la situazione in figura, in cui il teorema di Lagrange non vale:



Esercizio sul Teorema di Lagrange

Un tipico esercizio sul Teorema di Lagrange è il seguente:

Esercizio

Applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $y = \log(x + x^2)$ sull'intervallo $[1; 2]$.

Esercizio sul Teorema di Lagrange

Un tipico esercizio sul Teorema di Lagrange è il seguente:

Esercizio

Applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $y = \log(x + x^2)$ sull'intervallo $[1; 2]$.

Svolgimento. La funzione data è continua e derivabile sull'intervallo.

Esercizio sul Teorema di Lagrange

Un tipico esercizio sul Teorema di Lagrange è il seguente:

Esercizio

Applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $y = \log(x + x^2)$ sull'intervallo $[1; 2]$.

Svolgimento. La funzione data è continua e derivabile sull'intervallo. Quindi il Teorema di Lagrange è applicabile e garantisce l'esistenza di almeno un punto c in $[1; 2]$ che verifica

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}.$$

Esercizio sul Teorema di Lagrange

Un tipico esercizio sul Teorema di Lagrange è il seguente:

Esercizio

Applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $y = \log(x + x^2)$ sull'intervallo $[1; 2]$.

Svolgimento. La funzione data è continua e derivabile sull'intervallo. Quindi il Teorema di Lagrange è applicabile e garantisce l'esistenza di almeno un punto c in $[1; 2]$ che verifica

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}.$$

Sostituendo la nostra funzione f otteniamo l'equazione

$$\frac{1 + 2c}{c + c^2} = \log 6 - \log 2 = \log\left(\frac{6}{2}\right) = \log 3 \quad \Rightarrow \quad 1 + 2c = (\log 3)(c + c^2).$$

Esercizio sul Teorema di Lagrange

Quindi otteniamo l'equazione di secondo grado

$$(\log 3)c^2 - (2 - \log 3)c - 1 = 0$$

che ha soluzioni date da

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \frac{1}{2 \log 3} \left(2 - \log 3 \pm \sqrt{(2 - \log 3)^2 + 4 \log 3} \right) \\ &= \frac{1}{2 \log 3} \left(2 - \log 3 \pm \sqrt{4 + \log^2 3} \right). \end{aligned}$$

Esercizio sul Teorema di Lagrange

Quindi otteniamo l'equazione di secondo grado

$$(\log 3)c^2 - (2 - \log 3)c - 1 = 0$$

che ha soluzioni date da

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \frac{1}{2 \log 3} \left(2 - \log 3 \pm \sqrt{(2 - \log 3)^2 + 4 \log 3} \right) \\ &= \frac{1}{2 \log 3} \left(2 - \log 3 \pm \sqrt{4 + \log^2 3} \right). \end{aligned}$$

Scegliendo il meno, si ha $c_1 < 0$, quindi c_1 non sta nell'intervallo $[1; 2]$.

Esercizio sul Teorema di Lagrange

Quindi otteniamo l'equazione di secondo grado

$$(\log 3)c^2 - (2 - \log 3)c - 1 = 0$$

che ha soluzioni date da

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \frac{1}{2\log 3} \left(2 - \log 3 \pm \sqrt{(2 - \log 3)^2 + 4\log 3} \right) \\ &= \frac{1}{2\log 3} \left(2 - \log 3 \pm \sqrt{4 + \log^2 3} \right). \end{aligned}$$

Scegliendo il meno, si ha $c_1 < 0$, quindi c_1 non sta nell'intervallo $[1; 2]$.
Quindi la soluzione accettabile deve essere

$$c_2 = \frac{1}{2\log 3} \left(2 - \log 3 + \sqrt{4 + \log^2 3} \right)$$

e infatti si ha $c_2 \simeq 1.45$.



Il Teorema di Cauchy

Infine, vediamo il Teorema di Cauchy.

Il Teorema di Cauchy

Infine, vediamo il Teorema di Cauchy.

Teorema di Cauchy

Siano $a < b$ e $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue. Supponiamo che f, g siano derivabili su tutto l'intervallo aperto $]a; b[$. Allora esiste $c \in]a; b[$ tale che

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

Inoltre, se g' non si annulla mai, allora $g(b) \neq g(a)$ e quindi

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Commenti sul Teorema di Cauchy

Anche qui facciamo qualche osservazione.

Commenti sul Teorema di Cauchy

Anche qui facciamo qualche osservazione.

- Il Teorema di Lagrange è un caso particolare di quello di Cauchy: basta prendere come funzione g la funzione identità: $g(x) = x$. In questo modo g è sicuramente continua e derivabile e $g'(x) = 1 \neq 0$, quindi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

che è proprio il Teorema di Lagrange.

Commenti sul Teorema di Cauchy

Anche qui facciamo qualche osservazione.

- Il Teorema di Lagrange è un caso particolare di quello di Cauchy: basta prendere come funzione g la funzione identità: $g(x) = x$. In questo modo g è sicuramente continua e derivabile e $g'(x) = 1 \neq 0$, quindi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

che è proprio il Teorema di Lagrange.

- Esiste un'interpretazione geometrica del teorema, più complicata delle precedenti perché vengono coinvolte due funzioni. Non la vedremo.

Commenti sul Teorema di Cauchy

Anche qui facciamo qualche osservazione.

- Il Teorema di Lagrange è un caso particolare di quello di Cauchy: basta prendere come funzione g la funzione identità: $g(x) = x$. In questo modo g è sicuramente continua e derivabile e $g'(x) = 1 \neq 0$, quindi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

che è proprio il Teorema di Lagrange.

- Esiste un'interpretazione geometrica del teorema, più complicata delle precedenti perché vengono coinvolte due funzioni. Non la vedremo.
- Il Teorema di Cauchy è utile soprattutto nella dimostrazione di alcuni risultati avanzati del Calcolo Differenziale, come i Teoremi di de L'Hôpital sul calcolo dei limiti mediante le derivate e la Formula di Taylor.

Dimostrazione del Teorema di Cauchy

Dim. Come per il Teorema di Lagrange, costruiamo a partire da f e g una funzione che soddisfi il Teorema di Rolle.

Prendiamo tale funzione della forma $h(x) = p f(x) - q g(x)$ dove p, q sono costanti da scegliere in modo che $h(x)$ assuma lo stesso valore agli estremi.

Dimostrazione del Teorema di Cauchy

Dim. Come per il Teorema di Lagrange, costruiamo a partire da f e g una funzione che soddisfi il Teorema di Rolle.

Prendiamo tale funzione della forma $h(x) = p f(x) - q g(x)$ dove p, q sono costanti da scegliere in modo che $h(x)$ assuma lo stesso valore agli estremi.

Poiché $h(a) = p f(a) - q g(a)$, $h(b) = p f(b) - q g(b)$, imponiamo

$$\begin{aligned} h(a) = h(b) &\Rightarrow p f(a) - q g(a) = p f(b) - q g(b) \\ &\Rightarrow q[g(b) - g(a)] = p[f(b) - f(a)]. \end{aligned}$$

Dimostrazione del Teorema di Cauchy

Dim. Come per il Teorema di Lagrange, costruiamo a partire da f e g una funzione che soddisfi il Teorema di Rolle.

Prendiamo tale funzione della forma $h(x) = p f(x) - q g(x)$ dove p, q sono costanti da scegliere in modo che $h(x)$ assuma lo stesso valore agli estremi.

Poiché $h(a) = p f(a) - q g(a)$, $h(b) = p f(b) - q g(b)$, imponiamo

$$\begin{aligned} h(a) = h(b) &\Rightarrow p f(a) - q g(a) = p f(b) - q g(b) \\ &\Rightarrow q[g(b) - g(a)] = p[f(b) - f(a)]. \end{aligned}$$

Per esempio, possiamo scegliere: $q = f(b) - f(a)$, $p = g(b) - g(a)$.

Dimostrazione del Teorema di Cauchy

Dim. Come per il Teorema di Lagrange, costruiamo a partire da f e g una funzione che soddisfi il Teorema di Rolle.

Prendiamo tale funzione della forma $h(x) = p f(x) - q g(x)$ dove p, q sono costanti da scegliere in modo che $h(x)$ assuma lo stesso valore agli estremi.

Poiché $h(a) = p f(a) - q g(a)$, $h(b) = p f(b) - q g(b)$, imponiamo

$$\begin{aligned} h(a) = h(b) &\Rightarrow p f(a) - q g(a) = p f(b) - q g(b) \\ &\Rightarrow q[g(b) - g(a)] = p[f(b) - f(a)]. \end{aligned}$$

Per esempio, possiamo scegliere: $q = f(b) - f(a)$, $p = g(b) - g(a)$.

Dal Teorema di Rolle otteniamo c tale che

$$0 = h'(c) = p f'(c) - q g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c) - [f(b) - f(a)]g'(c),$$

che mostra la prima parte del teorema.

Dimostrazione del Teorema di Cauchy

La seconda parte del teorema si dimostra immediatamente:

Dimostrazione del Teorema di Cauchy

La seconda parte del teorema si dimostra immediatamente:

se $g' \neq 0$ in tutti i punti, ne segue che g non può soddisfare il Teorema di Rolle. Ma essendo continua e derivabile, deve per forza essere $g(b) \neq g(a)$. Inoltre si ha anche $g'(c) \neq 0$.

Dimostrazione del Teorema di Cauchy

La seconda parte del teorema si dimostra immediatamente:

se $g' \neq 0$ in tutti i punti, ne segue che g non può soddisfare il Teorema di Rolle. Ma essendo continua e derivabile, deve per forza essere $g(b) \neq g(a)$. Inoltre si ha anche $g'(c) \neq 0$.

Allora nella prima parte della tesi, che è

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)],$$

si può dividere tutto per $g(b) - g(a)$ e anche per $g'(c)$, ottenendo la seconda parte del teorema. □

Esercizio sul Teorema di Cauchy

Un tipico esercizio sul Teorema di Cauchy è il seguente:

Esercizio

Stabilire se il Teorema di Cauchy è applicabile alle funzioni $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + x^2$ sull'intervallo $[0; 1]$.

Esercizio sul Teorema di Cauchy

Un tipico esercizio sul Teorema di Cauchy è il seguente:

Esercizio

Stabilire se il Teorema di Cauchy è applicabile alle funzioni $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + x^2$ sull'intervallo $[0; 1]$.

Svolgimento. Le due funzioni sono evidentemente continue sull'intervallo chiuso e derivabili sull'intervallo aperto. Si noti che la funzione $\sqrt{x}$ è continua ma *non derivabile* in 0.

Esercizio sul Teorema di Cauchy

Un tipico esercizio sul Teorema di Cauchy è il seguente:

Esercizio

Stabilire se il Teorema di Cauchy è applicabile alle funzioni $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + x^2$ sull'intervallo $[0; 1]$.

Svolgimento. Le due funzioni sono evidentemente continue sull'intervallo chiuso e derivabili sull'intervallo aperto. Si noti che la funzione $\sqrt{x}$ è continua ma *non derivabile* in 0.

Quindi si può applicare il Teorema di Cauchy, da cui si deduce che esiste c tale che

$$f'(c)(2 - 0) = g'(c)(1 - 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{c}} = 1 + 2c.$$

Esercizio sul Teorema di Cauchy

L'equazione

$$\frac{2}{\sqrt{c}} = 1 + 2c$$

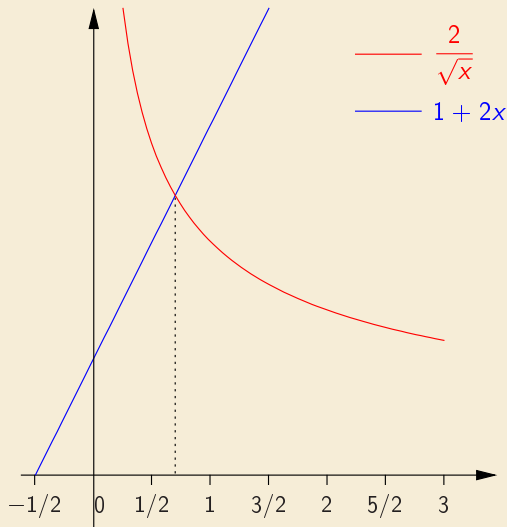
dà luogo ad una cubica, che non è facilmente risolubile, ma possiamo farne uno studio grafico.

Esercizio sul Teorema di Cauchy

L'equazione

$$\frac{2}{\sqrt{c}} = 1 + 2c$$

dà luogo ad una cubica, che non è facilmente risolvibile, ma possiamo farne uno studio grafico.



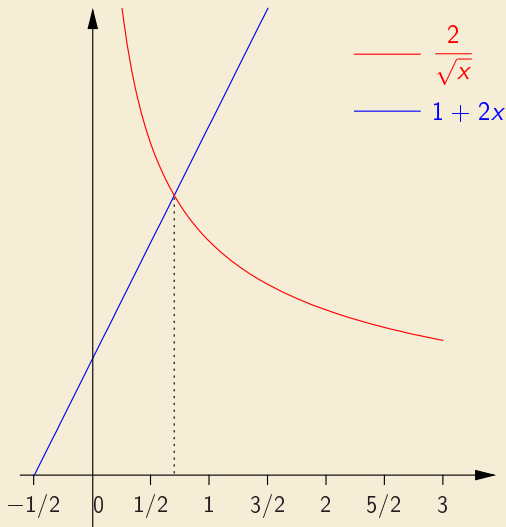
Esercizio sul Teorema di Cauchy

L'equazione

$$\frac{2}{\sqrt{c}} = 1 + 2c$$

dà luogo ad una cubica, che non è facilmente risolvibile, ma possiamo farne uno studio grafico.

Si vede che esiste una soluzione nell'intervallo $]0; 1[$, come previsto dal Teorema di Cauchy. $\square$



Un esempio di applicazione

Per concludere, proviamo a dimostrare le due affermazioni incontrate all'inizio della lezione, usando i teoremi appena visti.

Un esempio di applicazione

Per concludere, proviamo a dimostrare le due affermazioni incontrate all'inizio della lezione, usando i teoremi appena visti.

Teorema

Una funzione f che abbia derivata nulla su tutto un intervallo $[a; b]$ deve essere costante in quell'intervallo.

Un esempio di applicazione

Per concludere, proviamo a dimostrare le due affermazioni incontrate all'inizio della lezione, usando i teoremi appena visti.

Teorema

Una funzione f che abbia derivata nulla su tutto un intervallo $[a; b]$ deve essere costante in quell'intervallo.

Dim. Intanto la funzione f è sicuramente continua e derivabile in tutti i punti.

Un esempio di applicazione

Per concludere, proviamo a dimostrare le due affermazioni incontrate all'inizio della lezione, usando i teoremi appena visti.

Teorema

Una funzione f che abbia derivata nulla su tutto un intervallo $[a; b]$ deve essere costante in quell'intervallo.

Dim. Intanto la funzione f è sicuramente continua e derivabile in tutti i punti.

Prendiamo un punto qualsiasi $y \in]a; b[$: applicando il Teorema di Lagrange a f sull'intervallo $[a; y]$ si ha che esiste c per cui

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(c) = 0.$$

Un esempio di applicazione

Per concludere, proviamo a dimostrare le due affermazioni incontrate all'inizio della lezione, usando i teoremi appena visti.

Teorema

Una funzione f che abbia derivata nulla su tutto un intervallo $[a; b]$ deve essere costante in quell'intervallo.

Dim. Intanto la funzione f è sicuramente continua e derivabile in tutti i punti.

Prendiamo un punto qualsiasi $y \in]a; b[$: applicando il Teorema di Lagrange a f sull'intervallo $[a; y]$ si ha che esiste c per cui

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(c) = 0.$$

Quindi $f(y) = f(a)$. Ma poiché y era arbitrario, si ha che f è costante. □

Un altro esempio di applicazione

Teorema

Una funzione che abbia derivata positiva su tutto un intervallo $[a; b]$ deve essere crescente in quell'intervallo.

Un altro esempio di applicazione

Teorema

Una funzione che abbia derivata positiva su tutto un intervallo $[a; b]$ deve essere crescente in quell'intervallo.

Dim. Anche qui la funzione f è sicuramente continua e derivabile in tutti i punti.

Un altro esempio di applicazione

Teorema

Una funzione che abbia derivata positiva su tutto un intervallo $[a; b]$ deve essere crescente in quell'intervallo.

Dim. Anche qui la funzione f è sicuramente continua e derivabile in tutti i punti.

Prendiamo ora due punti $y_1, y_2 \in]a; b[$ con $y_1 < y_2$. Applichiamo il Teorema di Lagrange a f sull'intervallo $[y_1; y_2]$: esiste c tale che

$$\frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1} = f'(c) \geq 0.$$

Un altro esempio di applicazione

Teorema

Una funzione che abbia derivata positiva su tutto un intervallo $[a; b]$ deve essere crescente in quell'intervallo.

Dim. Anche qui la funzione f è sicuramente continua e derivabile in tutti i punti.

Prendiamo ora due punti $y_1, y_2 \in]a; b[$ con $y_1 < y_2$. Applichiamo il Teorema di Lagrange a f sull'intervallo $[y_1; y_2]$: esiste c tale che

$$\frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1} = f'(c) \geq 0.$$

Poiché $y_1 < y_2$, si ha $f(y_2) - f(y_1) \geq 0$, ovvero $f(y_2) \geq f(y_1)$. Essendo y_1, y_2 due punti presi arbitrariamente, ne deduciamo che f è crescente nell'intervallo $[a; b]$. □