I teoremi delle funzioni continue

Luca Lussardi

Università Cattolica del Sacro Cuore

I tre teoremi delle funzioni continue

In queste lezione presentiamo i tre teoremi classici delle funzioni continue, risultati fondamentali di analisi matematica per funzioni di una variabile reale.

I tre teoremi delle funzioni continue

In queste lezione presentiamo i tre teoremi classici delle funzioni continue, risultati fondamentali di analisi matematica per funzioni di una variabile reale. Si tratta di:

I tre teoremi delle funzioni continue

In queste lezione presentiamo i tre teoremi classici delle funzioni continue, risultati fondamentali di analisi matematica per funzioni di una variabile reale. Si tratta di:

- *teorema degli zeri*;

I tre teoremi delle funzioni continue

In queste lezione presentiamo i tre teoremi classici delle funzioni continue, risultati fondamentali di analisi matematica per funzioni di una variabile reale. Si tratta di:

- *teorema degli zeri*;
- *teorema dei valori intermedi*.

I tre teoremi delle funzioni continue

In queste lezione presentiamo i tre teoremi classici delle funzioni continue, risultati fondamentali di analisi matematica per funzioni di una variabile reale. Si tratta di:

- *teorema degli zeri*;
- *teorema dei valori intermedi*.
- *teorema di Weierstrass*.

I tre teoremi delle funzioni continue

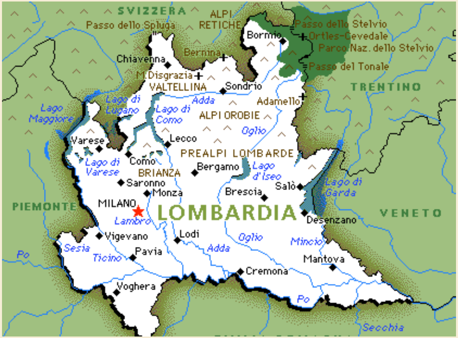
In queste lezione presentiamo i tre teoremi classici delle funzioni continue, risultati fondamentali di analisi matematica per funzioni di una variabile reale. Si tratta di:

- *teorema degli zeri*;
- *teorema dei valori intermedi*.
- *teorema di Weierstrass*.

Le rispettive dimostrazioni sono per lo più basate sull'uso combinato delle successioni reali e della continuità della funzione in gioco.

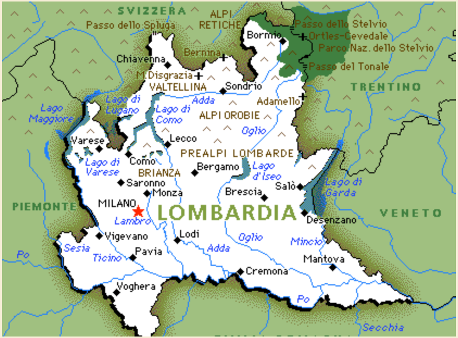
Il teorema degli zeri

È qui sotto rappresentata la cartina della regione Lombardia.



Il teorema degli zeri

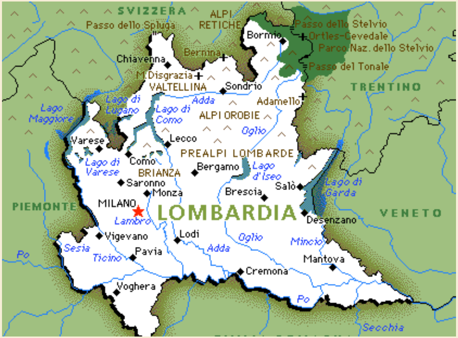
È qui sotto rappresentata la cartina della regione Lombardia.



Supponiamo di voler andare da Pavia a Voghera volendo restare in Lombardia;

Il teorema degli zeri

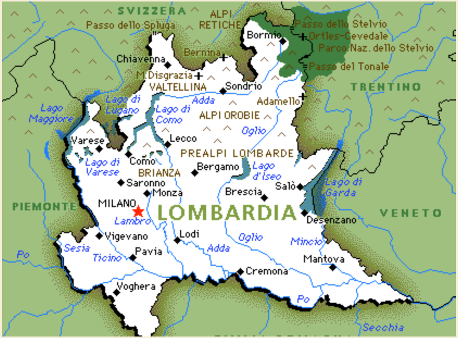
È qui sotto rappresentata la cartina della regione Lombardia.



Supponiamo di voler andare da Pavia a Voghera volendo restare in Lombardia; dobbiamo allora necessariamente attraversare il fiume Po.

Il teorema degli zeri

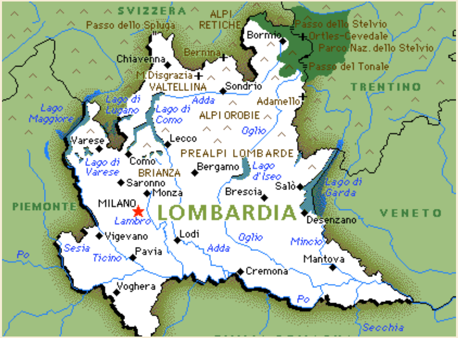
È qui sotto rappresentata la cartina della regione Lombardia.



Supponiamo di voler andare da Pavia a Voghera volendo restare in Lombardia; dobbiamo allora necessariamente attraversare il fiume Po. È proprio così o c'è una via d'uscita?

Il teorema degli zeri

È qui sotto rappresentata la cartina della regione Lombardia.



Supponiamo di voler andare da Pavia a Voghera volendo restare in Lombardia; dobbiamo allora necessariamente attraversare il fiume Po. È proprio così o c'è una via d'uscita? Il teorema degli zeri per le funzioni continue afferma, in sostanza, che non ci sono altre possibilità che attraversare il fiume.

Il teorema degli zeri

Enunciato: *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Supponiamo che* $f(a)f(b) < 0$. *Allora esiste* $c \in (a, b)$ *tale che* $f(c) = 0$.

Il teorema degli zeri

Enunciato: *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Supponiamo che* $f(a)f(b) < 0$*. Allora esiste* $c \in (a, b)$ *tale che* $f(c) = 0$*.*

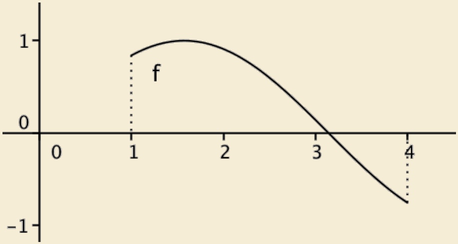


Figura : La funzione f è tale per cui $f(1) > 0$ e $f(4) < 0$ e invero presenta uno zero in $[1, 4]$.

Diamo ora la dimostrazione completa del teorema degli zeri.

Diamo ora la dimostrazione completa del teorema degli zeri. Supponiamo che sia $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$; l'altro caso si fa in modo del tutto analogo. Dividiamo lintervallo $[a, b]$ in due intervalli uguali, cioè sia x_1 il punto medio di $[a, b]$, ovvero

$$x_1 := \frac{a+b}{2}.$$

A questo punto si possono presentare tre casi:

1 $f(x_1) = 0$, nel qual caso poniamo $x_2 := x_1$;

2 $f(x_1) > 0$;

3 $f(x_1) < 0$.

Diamo ora la dimostrazione completa del teorema degli zeri. Supponiamo che sia $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$; l'altro caso si fa in modo del tutto analogo. Dividiamo lintervallo $[a, b]$ in due intervalli uguali, cioè sia x_1 il punto medio di $[a, b]$, ovvero

$$x_1 := \frac{a+b}{2}.$$

A questo punto si possono presentare tre casi:

1. $f(x_1) = 0$, nel qual caso poniamo $x_2 := x_1$;
2. $f(x_1) > 0$;
3. $f(x_1) < 0$.

Se ora siamo nel caso 2 poniamo x_2 come il punto medio dell'intervallo $[x_1, b]$ mentre se siamo nel caso 3 poniamo x_2 come il punto medio dell'intervallo $[a, x_1]$. Osserviamo che in ogni caso si ha

$$|x_2 - x_1| = \frac{b-a}{4} = \frac{b-a}{2^2}.$$

Iteriamo ora questo procedimento ripartendo dall'intervallo $[x_1, b]$ o dall'intervallo $[a, x_1]$, a seconda di dove siamo arrivati al passo precedente.

Iteriamo ora questo procedimento ripartendo dall'intervallo $[x_1, b]$ o dall'intervallo $[a, x_1]$, a seconda di dove siamo arrivati al passo precedente. Troviamo quindi una successione di intervalli della forma $[a_h, b_h]$ tale che

$$|a_h - b_h| = \frac{b-a}{2^h}, \quad a_h \text{ crescente e } b_h \text{ decrescente}$$

e tali che $f(a_h)f(b_h) \leq 0$.

Iteriamo ora questo procedimento ripartendo dall'intervallo $[x_1, b]$ o dall'intervallo $[a, x_1]$, a seconda di dove siamo arrivati al passo precedente. Troviamo quindi una successione di intervalli della forma $[a_h, b_h]$ tale che

$$|a_h - b_h| = \frac{b-a}{2^h}, \quad a_h \text{ crescente e } b_h \text{ decrescente}$$

e tali che $f(a_h)f(b_h) \leq 0$. Per monotonia si ha che la successione a_h ha limite in $[a, b]$, e la stessa cosa vale per b_h.

Iteriamo ora questo procedimento ripartendo dall'intervallo $[x_1, b]$ o dall'intervallo $[a, x_1]$, a seconda di dove siamo arrivati al passo precedente. Troviamo quindi una successione di intervalli della forma $[a_h, b_h]$ tale che

$$|a_h - b_h| = \frac{b-a}{2^h}, \quad a_h \text{ crescente e } b_h \text{ decrescente}$$

e tali che $f(a_h)f(b_h) \leq 0$. Per monotonia si ha che la successione a_h ha limite in $[a, b]$, e la stessa cosa vale per b_h. Siccome

$$\lim_{h \to +\infty} |a_h - b_h| = 0$$

necessariamente a_h e b_h convergono allo stesso limite $x_0 \in [a, b]$.

Iteriamo ora questo procedimento ripartendo dall'intervallo $[x_1, b]$ o dall'intervallo $[a, x_1]$, a seconda di dove siamo arrivati al passo precedente. Troviamo quindi una successione di intervalli della forma $[a_h, b_h]$ tale che

$$|a_h - b_h| = \frac{b-a}{2^h}, \quad a_h \text{ crescente e } b_h \text{ decrescente}$$

e tali che $f(a_h)f(b_h) \leq 0$. Per monotonia si ha che la successione a_h ha limite in $[a, b]$, e la stessa cosa vale per b_h. Siccome

$$\lim_{h \to +\infty} |a_h - b_h| = 0$$

necessariamente a_h e b_h convergono allo stesso limite $x_0 \in [a, b]$. Siccome poi f è continua si trova

$$\lim_{h \to +\infty} f(a_h) = \lim_{h \to +\infty} f(b_h) = f(x_0).$$

Iteriamo ora questo procedimento ripartendo dall'intervallo $[x_1, b]$ o dall'intervallo $[a, x_1]$, a seconda di dove siamo arrivati al passo precedente. Troviamo quindi una successione di intervalli della forma $[a_h, b_h]$ tale che

$$|a_h - b_h| = \frac{b-a}{2^h}, \quad a_h \text{ crescente e } b_h \text{ decrescente}$$

e tali che $f(a_h)f(b_h) \leq 0$. Per monotonia si ha che la successione a_h ha limite in $[a, b]$, e la stessa cosa vale per b_h. Siccome

$$\lim_{h \to +\infty} |a_h - b_h| = 0$$

necessariamente a_h e b_h convergono allo stesso limite $x_0 \in [a, b]$. Siccome poi f è continua si trova

$$\lim_{h \to +\infty} f(a_h) = \lim_{h \to +\infty} f(b_h) = f(x_0).$$

Essendo, per costruzione, $f(a_h)f(b_h) \leq 0$ per ogni h, si ha quindi, passando al limite,

$$(f(x_0))^2 \leq 0$$

Iteriamo ora questo procedimento ripartendo dall'intervallo $[x_1, b]$ o dall'intervallo $[a, x_1]$, a seconda di dove siamo arrivati al passo precedente. Troviamo quindi una successione di intervalli della forma $[a_h, b_h]$ tale che

$$|a_h - b_h| = \frac{b-a}{2^h}, \quad a_h \text{ crescente e } b_h \text{ decrescente}$$

e tali che $f(a_h)f(b_h) \leq 0$. Per monotonia si ha che la successione a_h ha limite in $[a, b]$, e la stessa cosa vale per b_h. Siccome

$$\lim_{h \to +\infty} |a_h - b_h| = 0$$

necessariamente a_h e b_h convergono allo stesso limite $x_0 \in [a, b]$. Siccome poi f è continua si trova

$$\lim_{h \to +\infty} f(a_h) = \lim_{h \to +\infty} f(b_h) = f(x_0).$$

Essendo, per costruzione, $f(a_h)f(b_h) \leq 0$ per ogni h, si ha quindi, passando al limite,

$$(f(x_0))^2 \leq 0 \Longrightarrow f(x_0) = 0$$

Iteriamo ora questo procedimento ripartendo dall'intervallo $[x_1, b]$ o dall'intervallo $[a, x_1]$, a seconda di dove siamo arrivati al passo precedente. Troviamo quindi una successione di intervalli della forma $[a_h, b_h]$ tale che

$$|a_h - b_h| = \frac{b-a}{2^h}, \quad a_h \text{ crescente e } b_h \text{ decrescente}$$

e tali che $f(a_h)f(b_h) \leq 0$. Per monotonia si ha che la successione a_h ha limite in $[a, b]$, e la stessa cosa vale per b_h. Siccome

$$\lim_{h \to +\infty} |a_h - b_h| = 0$$

necessariamente a_h e b_h convergono allo stesso limite $x_0 \in [a, b]$. Siccome poi f è continua si trova

$$\lim_{h \to +\infty} f(a_h) = \lim_{h \to +\infty} f(b_h) = f(x_0).$$

Essendo, per costruzione, $f(a_h)f(b_h) \leq 0$ per ogni h, si ha quindi, passando al limite,

$$(f(x_0))^2 \leq 0 \Longrightarrow f(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0 \text{ è lo zero cercato.}$$

Facciamo ora qualche osservazione sul teorema degli zeri, chiedendoci ad esempio se la tesi resta vera rimuovendo qualche ipotesi.

Facciamo ora qualche osservazione sul teorema degli zeri, chiedendoci ad esempio se la tesi resta vera rimuovendo qualche ipotesi.

- Supponiamo che $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sia continua ma non soddisfi $f(a)f(b) < 0$.

Facciamo ora qualche osservazione sul teorema degli zeri, chiedendoci ad esempio se la tesi resta vera rimuovendo qualche ipotesi.

- Supponiamo che $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sia continua ma non soddisfi $f(a)f(b) < 0$. È facile vedere che allora non è necessariamente vero che f ha uno zero in $[a, b]$:

Facciamo ora qualche osservazione sul teorema degli zeri, chiedendoci ad esempio se la tesi resta vera rimuovendo qualche ipotesi.

- Supponiamo che $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sia continua ma non soddisfi $f(a)f(b) < 0$. È facile vedere che allora non è necessariamente vero che f ha uno zero in $[a,b]$: infatti, ad esempio, la funzione $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 1$ non ha zeri.

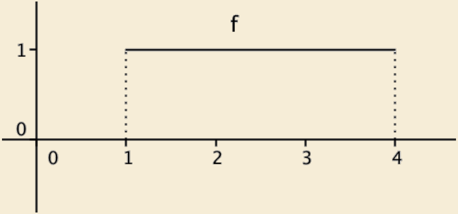


Figura : La funzione f è continua ma è tale per cui $f(1)f(4) = 1 > 0$ e non ha zeri.

- Supponiamo invece ora che $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ soddisfi $f(a)f(b) < 0$ ma non sia continua.

- Supponiamo invece ora che $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ soddisfi $f(a)f(b) < 0$ ma non sia continua. È ancora facile vedere che anche in questo caso non è necessariamente vero che f ha uno zero in $[a,b]$:

- Supponiamo invece ora che $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ soddisfi $f(a)f(b) < 0$ ma non sia continua. È ancora facile vedere che anche in questo caso non è necessariamente vero che f ha uno zero in $[a,b]$: infatti, ad esempio, la funzione $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 1$ se $x \in [1,2]$, $f(x) = -1$ se $x \in (2,4]$, non ha zeri.

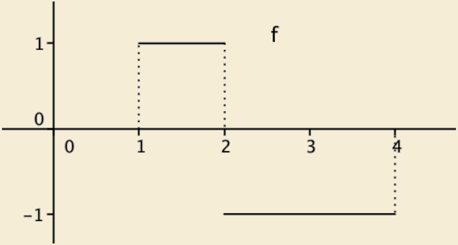


Figura : La funzione f è tale per cui $f(0) > 0$ e $f(1) < 0$ ma non è continua e non ha zeri.

La dimostrazione del teorema degli zeri rappresenta una procedura numerica per l'approssimazione delle soluzioni di equazioni, che viene anche detta *metodo della bisezione*:

Il metodo di bisezione

La dimostrazione del teorema degli zeri rappresenta una procedura numerica per l'approssimazione delle soluzioni di equazioni, che viene anche detta *metodo della bisezione*: illustriamo, con un esempio, come si può cercare in modo approssimato una soluzione di un'equazione sfruttando la procedure di bisezione.

Sia ad esempio da risolvere l'equazione $x^2 - 2 = 0$.

Sia ad esempio da risolvere l'equazione $x^2 - 2 = 0$. Cominciamo col disegnare la funzione

$$f(x) := x^2 - 2.$$

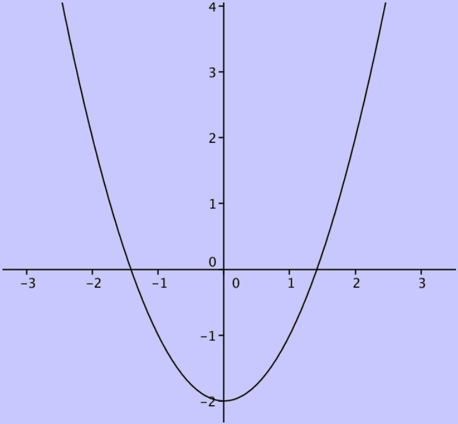


Figura : La funzione $x^2 - 2$ ha due zeri.

La funzione f presenta, come la figura mostra, due zeri: supponiamo di voler determinare lo zero che si trova tra 1 e 2.

La funzione f presenta, come la figura mostra, due zeri: supponiamo di voler determinare lo zero che si trova tra 1 e 2. Cominciamo con l'osservare che $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ è certamente continua, dal momento che f è continua su tutto $\mathbb{R}$;

La funzione f presenta, come la figura mostra, due zeri: supponiamo di voler determinare lo zero che si trova tra 1 e 2. Cominciamo con l'osservare che $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ è certamente continua, dal momento che f è continua su tutto $\mathbb{R}$; inoltre risulta $f(1) = -1$ mentre $f(2) = 2$, per cui $f(1)f(2) < 0$.

La funzione f presenta, come la figura mostra, due zeri: supponiamo di voler determinare lo zero che si trova tra 1 e 2. Cominciamo con l'osservare che $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ è certamente continua, dal momento che f è continua su tutto $\mathbb{R}$; inoltre risulta $f(1) = -1$ mentre $f(2) = 2$, per cui $f(1)f(2) < 0$. Il teorema degli zeri dice dunque che esiste $x_0 \in (1,2)$ tale che $f(x_0) = 0$.

La funzione f presenta, come la figura mostra, due zeri: supponiamo di voler determinare lo zero che si trova tra 1 e 2. Cominciamo con l'osservare che $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ è certamente continua, dal momento che f è continua su tutto $\mathbb{R}$; inoltre risulta $f(1) = -1$ mentre $f(2) = 2$, per cui $f(1)f(2) < 0$. Il teorema degli zeri dice dunque che esiste $x_0 \in (1,2)$ tale che $f(x_0) = 0$. Mettiamo quindi in azione l'algoritmo della dimostrazione del teorema degli zeri.

La funzione f presenta, come la figura mostra, due zeri: supponiamo di voler determinare lo zero che si trova tra 1 e 2. Cominciamo con l'osservare che $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ è certamente continua, dal momento che f è continua su tutto $\mathbb{R}$; inoltre risulta $f(1) = -1$ mentre $f(2) = 2$, per cui $f(1)f(2) < 0$. Il teorema degli zeri dice dunque che esiste $x_0 \in (1,2)$ tale che $f(x_0) = 0$. Mettiamo quindi in azione l'algoritmo della dimostrazione del teorema degli zeri. Poniamo

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5.$$

La funzione f presenta, come la figura mostra, due zeri: supponiamo di voler determinare lo zero che si trova tra 1 e 2. Cominciamo con l'osservare che $f: [1,2] \to \mathbb{R}$ è certamente continua, dal momento che f è continua su tutto $\mathbb{R}$; inoltre risulta $f(1) = -1$ mentre $f(2) = 2$, per cui $f(1)f(2) < 0$. Il teorema degli zeri dice dunque che esiste $x_0 \in (1,2)$ tale che $f(x_0) = 0$. Mettiamo quindi in azione l'algoritmo della dimostrazione del teorema degli zeri. Poniamo

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5.$$

Osserviamo ora che $f(1.5) = 1.5^2 - 2 = 0.25 > 0$ e dunque continuiamo l'algoritmo sull'intervallo $[1, 1.5]$ ponendo

$$x_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25.$$

La funzione f presenta, come la figura mostra, due zeri: supponiamo di voler determinare lo zero che si trova tra 1 e 2. Cominciamo con l'osservare che $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ è certamente continua, dal momento che f è continua su tutto $\mathbb{R}$; inoltre risulta $f(1) = -1$ mentre $f(2) = 2$, per cui $f(1)f(2) < 0$. Il teorema degli zeri dice dunque che esiste $x_0 \in (1,2)$ tale che $f(x_0) = 0$. Mettiamo quindi in azione l'algoritmo della dimostrazione del teorema degli zeri. Poniamo

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5.$$

Osserviamo ora che $f(1.5) = 1.5^2 - 2 = 0.25 > 0$ e dunque continuiamo l'algoritmo sull'intervallo $[1, 1.5]$ ponendo

$$x_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25.$$

Si ha ora $f(1.25) = 1.25^2 - 2 = -0.4375 < 0$,

La funzione f presenta, come la figura mostra, due zeri: supponiamo di voler determinare lo zero che si trova tra 1 e 2. Cominciamo con l'osservare che $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ è certamente continua, dal momento che f è continua su tutto $\mathbb{R}$; inoltre risulta $f(1) = -1$ mentre $f(2) = 2$, per cui $f(1)f(2) < 0$. Il teorema degli zeri dice dunque che esiste $x_0 \in (1,2)$ tale che $f(x_0) = 0$. Mettiamo quindi in azione l'algoritmo della dimostrazione del teorema degli zeri. Poniamo

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5.$$

Osserviamo ora che $f(1.5) = 1.5^2 - 2 = 0.25 > 0$ e dunque continuiamo l'algoritmo sull'intervallo $[1, 1.5]$ ponendo

$$x_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25.$$

Si ha ora $f(1.25) = 1.25^2 - 2 = -0.4375 < 0$, e dunque continuiamo l'algoritmo sull'intervallo $[1.25, 1.5]$ ponendo

$$x_3 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375.$$

Proseguiamo il procedimento e mettiamo in una tabella i risultati delle iterazioni:

Proseguiamo il procedimento e mettiamo in una tabella i risultati delle iterazioni:

h-esima iterazione	x_h
1	1.5
2	1.25
3	1.375
4	1.4375
5	1.40625
6	1.421875
7	1.4140625

Proseguiamo il procedimento e mettiamo in una tabella i risultati delle iterazioni:

h-esima iterazione	x_h
1	1.5
2	1.25
3	1.375
4	1.4375
5	1.40625
6	1.421875
7	1.4140625

Come si osserva già alla settima iterazione abbiamo un valore vicino al valore reale della soluzione positiva dell'equazione $x^2 - 2 = 0$, che è pari a $\sqrt{2} \sim 1.414213562$.

Il teorema dei valori intermedi

Enunciato: *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora* f *assume tutti i valori tra* $f(a)$ *e* $f(b)$*.*

Il teorema dei valori intermedi

Enunciato: *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$.*

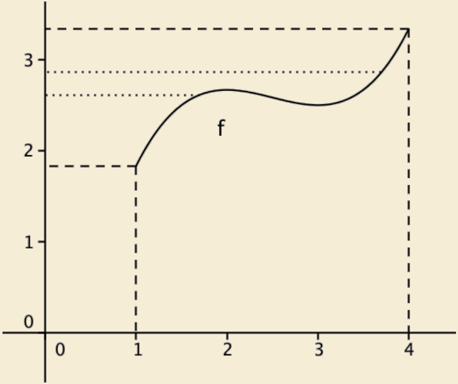


Figura : La funzione f assume tutti i valori tra $f(1)$ e $f(4)$.

Vediamo la dimostrazione il teorema dei valori intermedi, come applicazione del teorema degli zeri.

Vediamo la dimostrazione il teorema dei valori intermedi, come applicazione del teorema degli zeri. Anzitutto, non c'è nulla da dimostrare se $f(a) = f(b)$.

Vediamo la dimostrazione il teorema dei valori intermedi, come applicazione del teorema degli zeri. Anzitutto, non c'è nulla da dimostrare se $f(a) = f(b)$. Possiamo allora supporre che

$$f(a) \neq f(b).$$

Vediamo la dimostrazione il teorema dei valori intermedi, come applicazione del teorema degli zeri. Anzitutto, non c'è nulla da dimostrare se $f(a) = f(b)$. Possiamo allora supporre che

$$f(a) \neq f(b).$$

Ad esempio, sia $f(a) < f(b)$ (il caso $f(a) > f(b)$ è del tutto analogo e può essere svolto per esercizio).

Vediamo la dimostrazione il teorema dei valori intermedi, come applicazione del teorema degli zeri. Anzitutto, non c'è nulla da dimostrare se $f(a) = f(b)$. Possiamo allora supporre che

$$f(a) \neq f(b).$$

Ad esempio, sia $f(a) < f(b)$ (il caso $f(a) > f(b)$ è del tutto analogo e può essere svolto per esercizio). Sia $y_0 \in (f(a), f(b))$; dobbiamo mostrare che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Vediamo la dimostrazione il teorema dei valori intermedi, come applicazione del teorema degli zeri. Anzitutto, non c'è nulla da dimostrare se $f(a) = f(b)$. Possiamo allora supporre che

$$f(a) \neq f(b).$$

Ad esempio, sia $f(a) < f(b)$ (il caso $f(a) > f(b)$ è del tutto analogo e può essere svolto per esercizio). Sia $y_0 \in (f(a), f(b))$; dobbiamo mostrare che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = y_0$. Introduciamo allora la funzione ausiliaria $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x) := y_0 - f(x).$$

Vediamo la dimostrazione il teorema dei valori intermedi, come applicazione del teorema degli zeri. Anzitutto, non c'è nulla da dimostrare se $f(a) = f(b)$. Possiamo allora supporre che

$$f(a) \neq f(b).$$

Ad esempio, sia $f(a) < f(b)$ (il caso $f(a) > f(b)$ è del tutto analogo e può essere svolto per esercizio). Sia $y_0 \in (f(a), f(b))$; dobbiamo mostrare che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = y_0$. Introduciamo allora la funzione ausiliaria $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x) := y_0 - f(x).$$

Intanto, g è una funzione continua.

Vediamo la dimostrazione il teorema dei valori intermedi, come applicazione del teorema degli zeri. Anzitutto, non c'è nulla da dimostrare se $f(a) = f(b)$. Possiamo allora supporre che

$$f(a) \neq f(b).$$

Ad esempio, sia $f(a) < f(b)$ (il caso $f(a) > f(b)$ è del tutto analogo e può essere svolto per esercizio). Sia $y_0 \in (f(a), f(b))$; dobbiamo mostrare che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = y_0$. Introduciamo allora la funzione ausiliaria $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x) := y_0 - f(x).$$

Intanto, g è una funzione continua. Si ha poi

$$g(a) = y_0 - f(a) > 0, \quad g(b) = y_0 - f(b) < 0.$$

Vediamo la dimostrazione il teorema dei valori intermedi, come applicazione del teorema degli zeri. Anzitutto, non c'è nulla da dimostrare se $f(a) = f(b)$. Possiamo allora supporre che

$$f(a) \neq f(b).$$

Ad esempio, sia $f(a) < f(b)$ (il caso $f(a) > f(b)$ è del tutto analogo e può essere svolto per esercizio). Sia $y_0 \in (f(a), f(b))$; dobbiamo mostrare che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = y_0$. Introduciamo allora la funzione ausiliaria $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x) := y_0 - f(x).$$

Intanto, g è una funzione continua. Si ha poi

$$g(a) = y_0 - f(a) > 0, \quad g(b) = y_0 - f(b) < 0.$$

Per il teorema degli zeri esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $g(x_0) = 0$,

Vediamo la dimostrazione il teorema dei valori intermedi, come applicazione del teorema degli zeri. Anzitutto, non c'è nulla da dimostrare se $f(a) = f(b)$. Possiamo allora supporre che

$$f(a) \neq f(b).$$

Ad esempio, sia $f(a) < f(b)$ (il caso $f(a) > f(b)$ è del tutto analogo e può essere svolto per esercizio). Sia $y_0 \in (f(a), f(b))$; dobbiamo mostrare che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = y_0$. Introduciamo allora la funzione ausiliaria $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x) := y_0 - f(x).$$

Intanto, g è una funzione continua. Si ha poi

$$g(a) = y_0 - f(a) > 0, \quad g(b) = y_0 - f(b) < 0.$$

Per il teorema degli zeri esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $g(x_0) = 0$, che vuol dire $f(x_0) = y_0$.

Vediamo la dimostrazione il teorema dei valori intermedi, come applicazione del teorema degli zeri. Anzitutto, non c'è nulla da dimostrare se $f(a) = f(b)$. Possiamo allora supporre che

$$f(a) \neq f(b).$$

Ad esempio, sia $f(a) < f(b)$ (il caso $f(a) > f(b)$ è del tutto analogo e può essere svolto per esercizio). Sia $y_0 \in (f(a), f(b))$; dobbiamo mostrare che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = y_0$. Introduciamo allora la funzione ausiliaria $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x) := y_0 - f(x).$$

Intanto, g è una funzione continua. Si ha poi

$$g(a) = y_0 - f(a) > 0, \quad g(b) = y_0 - f(b) < 0.$$

Per il teorema degli zeri esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $g(x_0) = 0$, che vuol dire $f(x_0) = y_0$. Dal momento che poi $y_0 \neq f(a), f(b)$ risulta anche $x_0 \in (a, b)$ che conclude la dimostrazione.

Facciamo anche in questo caso qualche osservazione sul teorema dei valori intermedi.

Facciamo anche in questo caso qualche osservazione sul teorema dei valori intermedi. Se supponiamo che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ non sia continua allora non è necessariamente vero che f assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$:

Facciamo anche in questo caso qualche osservazione sul teorema dei valori intermedi. Se supponiamo che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ non sia continua allora non è necessariamente vero che f assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$: infatti, vale lo stesso esempio mostrato per il teorema degli zeri, come nella figura seguente:

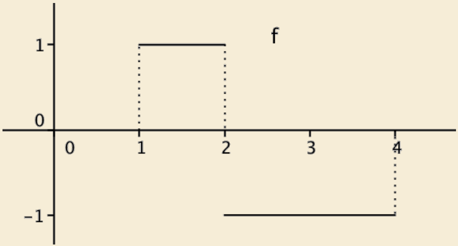


Figura : La funzione $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ non è continua e non assume tutti i valori tra $f(1) = 1$ e $f(4) = -1$: infatti, assume solo valori 1 e -1.

Il teorema di Weierstrass

Enunciato: *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora* f *assume massimo e minimo assoluti su* $[a, b]$.

Il teorema di Weierstrass

Enunciato: *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora* f *assume massimo e minimo assoluti su* $[a, b]$.

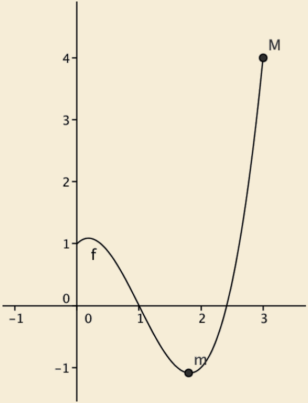


Figura : La funzione $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ ha massimo assoluto nel punto M e minimo assoluto nel punto m.

La dimostrazione del teorema di Weierstrass è abbastanza semplice ed è basata su un uso intelligente delle successioni.

La dimostrazione del teorema di Weierstrass è abbastanza semplice ed è basata su un uso intelligente delle successioni. Sia x_h una successione in $[a, b]$ tale che

$$\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \inf_{[a,b]} f.$$

La dimostrazione del teorema di Weierstrass è abbastanza semplice ed è basata su un uso intelligente delle successioni. Sia x_h una successione in $[a, b]$ tale che

$$\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \inf_{[a,b]} f.$$

(In effetti, si dovrebbe dimostrare che una tale successione, detta *minimizzante*, esiste sempre: si tratta di una proprietà dell'estremo inferiore che non approfondiamo in questa lezione).

La dimostrazione del teorema di Weierstrass è abbastanza semplice ed è basata su un uso intelligente delle successioni. Sia x_h una successione in $[a, b]$ tale che

$$\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \inf_{[a,b]} f.$$

(In effetti, si dovrebbe dimostrare che una tale successione, detta *minimizzante*, esiste sempre: si tratta di una proprietà dell'estremo inferiore che non approfondiamo in questa lezione). Essendo x_h una successione $[a, b]$ ed essendo $[a, b]$ chiuso e limitato, per il teorema di Bolzano-Weierstrass x_h ammette una sottosuccessione convergente:

La dimostrazione del teorema di Weierstrass è abbastanza semplice ed è basata su un uso intelligente delle successioni. Sia x_h una successione in $[a, b]$ tale che

$$\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \inf_{[a,b]} f.$$

(In effetti, si dovrebbe dimostrare che una tale successione, detta *minimizzante*, esiste sempre: si tratta di una proprietà dell'estremo inferiore che non approfondiamo in questa lezione). Essendo x_h una successione $[a, b]$ ed essendo $[a, b]$ chiuso e limitato, per il teorema di Bolzano-Weierstrass x_h ammette una sottosuccessione convergente: esistono cioè una successione crescente h_k e $x_m \in [a, b]$ tali che

$$\lim_{k \to +\infty} x_{h_k} = x_m.$$

La dimostrazione del teorema di Weierstrass è abbastanza semplice ed è basata su un uso intelligente delle successioni. Sia x_h una successione in $[a, b]$ tale che

$$\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \inf_{[a,b]} f.$$

(In effetti, si dovrebbe dimostrare che una tale successione, detta *minimizzante*, esiste sempre: si tratta di una proprietà dell'estremo inferiore che non approfondiamo in questa lezione). Essendo x_h una successione $[a, b]$ ed essendo $[a, b]$ chiuso e limitato, per il teorema di Bolzano-Weierstrass x_h ammette una sottosuccessione convergente: esistono cioè una successione crescente h_k e $x_m \in [a, b]$ tali che

$$\lim_{k \to +\infty} x_{h_k} = x_m.$$

Dal momento che f è continua si ha

$$f(x_m) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{h_k}) = \lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \inf_{[a,b]} f$$

La dimostrazione del teorema di Weierstrass è abbastanza semplice ed è basata su un uso intelligente delle successioni. Sia x_h una successione in $[a, b]$ tale che

$$\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \inf_{[a,b]} f.$$

(In effetti, si dovrebbe dimostrare che una tale successione, detta *minimizzante*, esiste sempre: si tratta di una proprietà dell'estremo inferiore che non approfondiamo in questa lezione). Essendo x_h una successione $[a, b]$ ed essendo $[a, b]$ chiuso e limitato, per il teorema di Bolzano-Weierstrass x_h ammette una sottosuccessione convergente: esistono cioè una successione crescente h_k e $x_m \in [a, b]$ tali che

$$\lim_{k \to +\infty} x_{h_k} = x_m.$$

Dal momento che f è continua si ha

$$f(x_m) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{h_k}) = \lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \inf_{[a,b]} f$$

e dunque $f(x_m) = \min_{[a,b]} f$, cioè $m = (x_m, f(x_m))$.

La dimostrazione del teorema di Weierstrass è abbastanza semplice ed è basata su un uso intelligente delle successioni. Sia x_h una successione in $[a, b]$ tale che

$$\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \inf_{[a,b]} f.$$

(In effetti, si dovrebbe dimostrare che una tale successione, detta *minimizzante*, esiste sempre: si tratta di una proprietà dell'estremo inferiore che non approfondiamo in questa lezione). Essendo x_h una successione $[a, b]$ ed essendo $[a, b]$ chiuso e limitato, per il teorema di Bolzano-Weierstrass x_h ammette una sottosuccessione convergente: esistono cioè una successione crescente h_k e $x_m \in [a, b]$ tali che

$$\lim_{k \to +\infty} x_{h_k} = x_m.$$

Dal momento che f è continua si ha

$$f(x_m) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{h_k}) = \lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \inf_{[a,b]} f$$

e dunque $f(x_m) = \min_{[a,b]} f$, cioè $m = (x_m, f(x_m))$. La stessa dimostrazione si fa per il massimo M.

Facciamo anche per il teorema di Weierstrass qualche osservazione.

Facciamo anche per il teorema di Weierstrass qualche osservazione. Notiamo infatti che anche in questo caso la continuità è essenziale affinché il risultato sia vero.

Facciamo anche per il teorema di Weierstrass qualche osservazione. Notiamo infatti che anche in questo caso la continuità è essenziale affinché il risultato sia vero. Infatti, sia ad esempio $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 1$ per $x \in [1,2]$ e $f(x) = x - 3$ per $x \in (2,4]$:

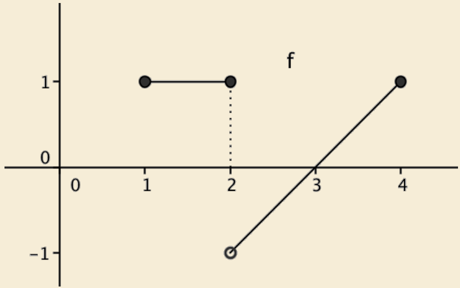


Figura : La funzione f non è continua e non assume minimo assoluto su $[1,4]$.

Un teorema di Weierstrass più generale

Il teorema di Weierstrass ammette diverse varianti; concludiamo questa lezione con una possibile generalizzazione:

Un teorema di Weierstrass più generale

Il teorema di Weierstrass ammette diverse varianti; concludiamo questa lezione con una possibile generalizzazione:
Teorema: *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua tale che*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ *tale che* $f(x_0) > 0$ *allora* f *assume massimo assoluto su* $\mathbb{R}$*;*
se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ *tale che* $f(x_0) < 0$ *allora* f *assume minimo assoluto su* $\mathbb{R}$

Un teorema di Weierstrass più generale

Il teorema di Weierstrass ammette diverse varianti; concludiamo questa lezione con una possibile generalizzazione:

Teorema: *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua tale che*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ *tale che* $f(x_0) > 0$ *allora* f *assume massimo assoluto su* $\mathbb{R}$*;*
se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ *tale che* $f(x_0) < 0$ *allora* f *assume minimo assoluto su* $\mathbb{R}$

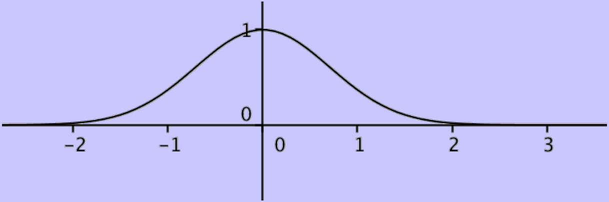


Figura : La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha massimo assoluto ed è infinitesima a $\pm\infty$.

Vediamo come si dimostra l'affermazione per il massimo assoluto; per il minimo assoluto la dimostrazione è del tutto analoga.

Vediamo come si dimostra l'affermazione per il massimo assoluto; per il minimo assoluto la dimostrazione è del tutto analoga. Poniamo

$$\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}.$$

Vediamo come si dimostra l'affermazione per il massimo assoluto; per il minimo assoluto la dimostrazione è del tutto analoga. Poniamo

$$\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}.$$

Usiamo ora la definizione di limite sapendo che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Vediamo come si dimostra l'affermazione per il massimo assoluto; per il minimo assoluto la dimostrazione è del tutto analoga. Poniamo

$$\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}.$$

Usiamo ora la definizione di limite sapendo che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Esiste $R > 0$ tale per cui per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > R$ si ha

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Vediamo come si dimostra l'affermazione per il massimo assoluto; per il minimo assoluto la dimostrazione è del tutto analoga. Poniamo

$$\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}.$$

Usiamo ora la definizione di limite sapendo che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Esiste $R > 0$ tale per cui per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > R$ si ha

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Ne segue che

$$\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq [-R, R].$$

Per il teorema di Weierstrass f ha massimo assoluto su $[-R, R]$: sia $f(x_0) = \max_{[-R,R]} f$.

Per il teorema di Weierstrass f ha massimo assoluto su $[-R, R]$: sia $f(x_0) = \max_{[-R,R]} f$. Osserviamo che per costruzione si ha

$$\sup_{|x|>R} f \leq \varepsilon < f(x_0) \leq \max_{[-R,R]} f.$$

Per il teorema di Weierstrass f ha massimo assoluto su $[-R, R]$: sia $f(x_0) = \max_{[-R,R]} f$. Osserviamo che per costruzione si ha

$$\sup_{|x|>R} f \leq \varepsilon < f(x_0) \leq \max_{[-R,R]} f.$$

Allora,

$$\sup_{\mathbb{R}} f = \max\{\sup_{|x|>R} f, \max_{[-R,R]} f\} = \max_{[-R,R]} f = f(x_0)$$

Per il teorema di Weierstrass f ha massimo assoluto su $[-R, R]$: sia $f(x_0) = \max_{[-R,R]} f$. Osserviamo che per costruzione si ha

$$\sup_{|x|>R} f \leq \varepsilon < f(x_0) \leq \max_{[-R,R]} f.$$

Allora,

$$\sup_{\mathbb{R}} f = \max\{\sup_{|x|>R} f, \max_{[-R,R]} f\} = \max_{[-R,R]} f = f(x_0)$$

e dunque

$$f(x_0) = \max_{\mathbb{R}} f$$

che conclude la dimostrazione.