

I problemi classici della Geometria

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

- 1 Costruzioni
- 2 Riga e compasso
- 3 Approfondimento
- 4 Riga e compasso
- 5 Duplicazione del cubo
- 6 La trisezione dell'angolo
- 7 La quadratura del cerchio
- 8 Solo compasso

Costruzioni

Risolvere un problema di Geometria in Grecia duemila anni fa non significava quello che significa oggi.

Costruzioni

Risolvere un problema di Geometria in Grecia duemila anni fa non significava quello che significa oggi.
Ciò è vero per due motivi:

Costruzioni

Risolvere un problema di Geometria in Grecia duemila anni fa non significava quello che significa oggi.

Ciò è vero per due motivi:

- i Greci non conoscevano l'Algebra;

Costruzioni

Risolvere un problema di Geometria in Grecia duemila anni fa non significava quello che significa oggi.

Ciò è vero per due motivi:

- i Greci non conoscevano l'Algebra;
- i Greci non amavano nemmeno rappresentare con numeri le lunghezze dei segmenti e degli angoli.

Costruzioni

Risolvere un problema di Geometria in Grecia duemila anni fa non significava quello che significa oggi.

Ciò è vero per due motivi:

- i Greci non conoscevano l'Algebra;
- i Greci non amavano nemmeno rappresentare con numeri le lunghezze dei segmenti e degli angoli.

Di fatto, ogni problema di Geometria ha dei *dati*, e noi, a partire da essi, in generale dobbiamo *trovare* delle quantità (lunghezze di segmenti o misure di angoli) *in modo che* sia verificata una certa *richiesta*.

Costruzioni

Risolvere un problema di Geometria in Grecia duemila anni fa non significava quello che significa oggi.

Ciò è vero per due motivi:

- i Greci non conoscevano l'Algebra;
- i Greci non amavano nemmeno rappresentare con numeri le lunghezze dei segmenti e degli angoli.

Di fatto, ogni problema di Geometria ha dei *dati*, e noi, a partire da essi, in generale dobbiamo *trovare* delle quantità (lunghezze di segmenti o misure di angoli) *in modo che* sia verificata una certa *richiesta*.

Vediamo un semplicissimo esempio.

Problema (facile)

Problema (facile)

Dato un quadrato di lato $\overline{AB} = l$, trovare un punto P sul prolungamento di un lato in modo che l'area del quadrato di lato AP sia doppia dell'area del quadrato.

Problema (facile)

Dato un quadrato di lato $\overline{AB} = l$, trovare un punto P sul prolungamento di un lato in modo che l'area del quadrato di lato AP sia doppia dell'area del quadrato.

Come risolveremmo noi questo problema?

Problema (facile)

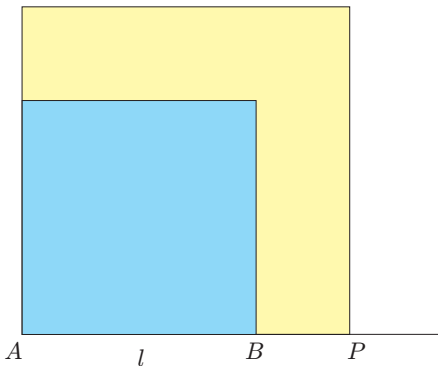
Dato un quadrato di lato $\overline{AB} = l$, trovare un punto P sul prolungamento di un lato in modo che l'area del quadrato di lato AP sia doppia dell'area del quadrato.

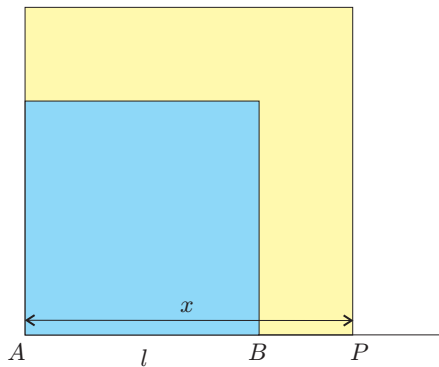
Come risolveremmo noi questo problema? Vediamo la figura:

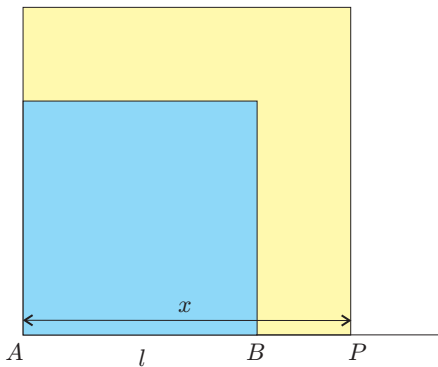
Problema (facile)

Dato un quadrato di lato $\overline{AB} = l$, trovare un punto P sul prolungamento di un lato in modo che l'area del quadrato di lato AP sia doppia dell'area del quadrato.

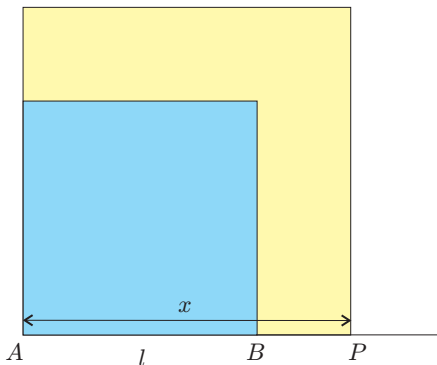
Come risolveremmo noi questo problema? Vediamo la figura:



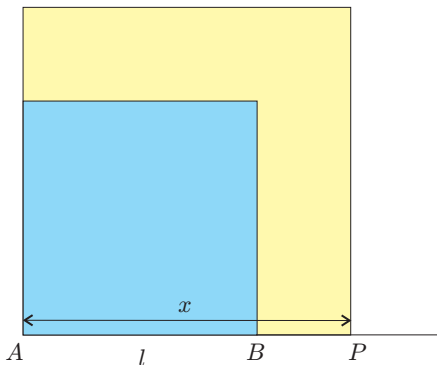




Un modo semplice di risolvere questo problema è porre $\overline{AP} = x$,



Un modo semplice di risolvere questo problema è porre $\overline{AP} = x$, cosicché, siccome l'area del quadrato azzurro è l^2 , dobbiamo risolvere l'equazione



Un modo semplice di risolvere questo problema è porre $\overline{AP} = x$, cosicché, siccome l'area del quadrato azzurro è l^2 , dobbiamo risolvere l'equazione

$$x^2 = 2l^2$$

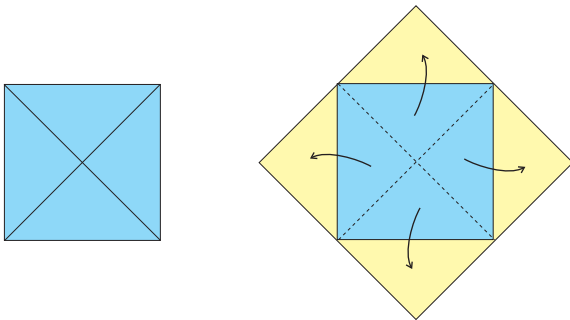
Pertanto $x = l\sqrt{2}$, e quindi “abbiamo risolto il problema”.

Pertanto $x = l\sqrt{2}$, e quindi “abbiamo risolto il problema”.

Un Greco antico (ovviamente forse non uno studente di liceo) avrebbe invece, forse, ragionato così:

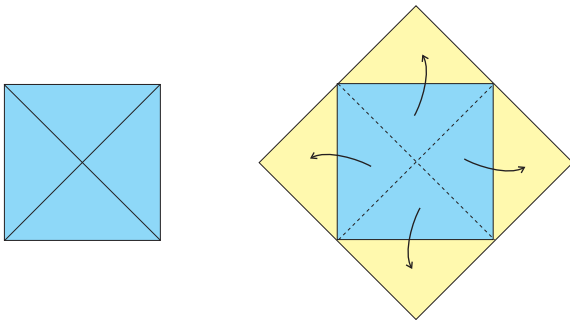
Pertanto $x = l\sqrt{2}$, e quindi “abbiamo risolto il problema”.

Un Greco antico (ovviamente forse non uno studente di liceo) avrebbe invece, forse, ragionato così:

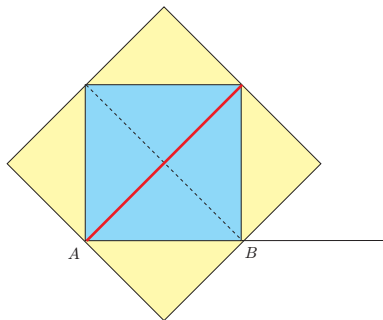


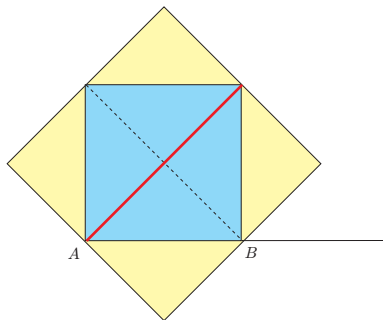
Pertanto $x = l\sqrt{2}$, e quindi “abbiamo risolto il problema”.

Un Greco antico (ovviamente forse non uno studente di liceo) avrebbe invece, forse, ragionato così:

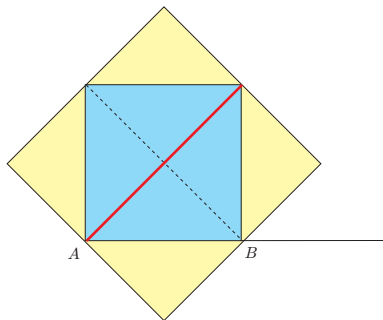


Il quadrato giallo si ottiene aggiungendo quattro quarti del quadrato di partenza...

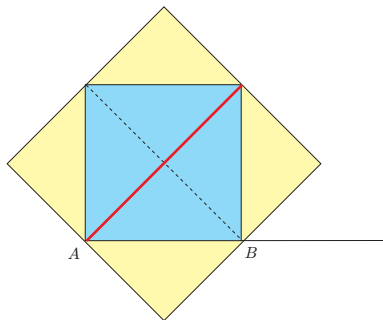




Però, siccome bisogna trovare il punto P ,

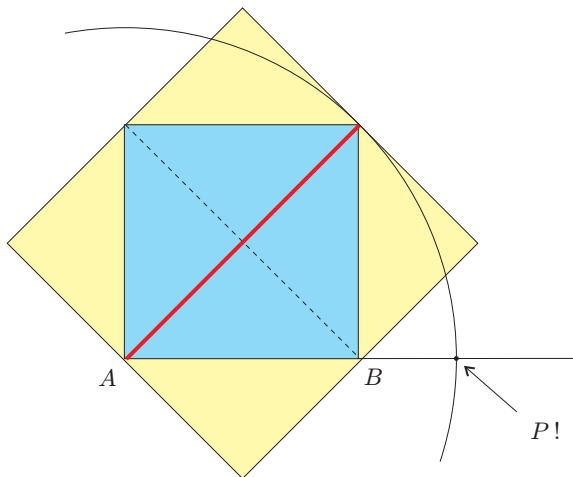


Però, siccome bisogna trovare il punto P , di fatto dobbiamo riportare sul prolungamento di AB il lato del quadrato giallo...

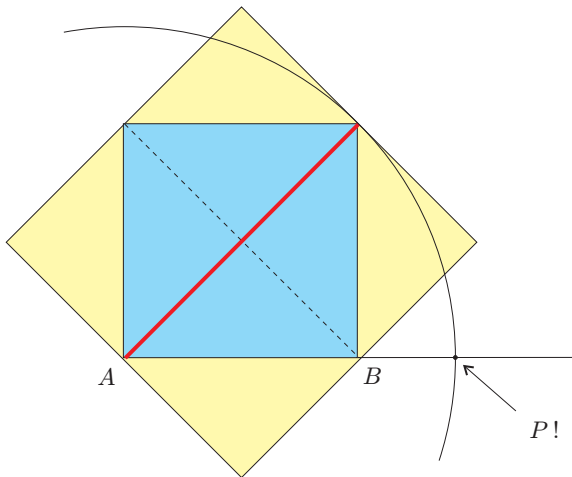


Però, siccome bisogna trovare il punto P , di fatto dobbiamo riportare sul prolungamento di AB il lato del quadrato giallo...
... cioè il segmento rosso.

A questo punto è facile:



A questo punto è facile:



puntando un compasso in A con apertura fino a C , basta intersecare la circonferenza di raggio AC con il prolungamento del segmento:

Abbiamo trovato quindi alla fine una **costruzione geometrica**.

Abbiamo trovato quindi alla fine una **costruzione geometrica**.

In realtà, il ragionamento del nostro Greco antico è stato duplice:
dapprima ha *scomposto* il quadrato in parti che, aggiunte e ricomposte,
dessero la soluzione,

Abbiamo trovato quindi alla fine una **costruzione geometrica**.

In realtà, il ragionamento del nostro Greco antico è stato duplice:
dapprima ha *scomposto* il quadrato in parti che, aggiunte e ricomposte,
dessero la soluzione, e poi ne ha indicato una costruzione.

Abbiamo trovato quindi alla fine una **costruzione geometrica**.

In realtà, il ragionamento del nostro Greco antico è stato duplice: dapprima ha *scomposto* il quadrato in parti che, aggiunte e ricomposte, dessero la soluzione, e poi ne ha indicato una costruzione. In questa lezione cercheremo di risolvere alcuni problemi per mezzo di costruzioni.

Abbiamo trovato quindi alla fine una **costruzione geometrica**.

In realtà, il ragionamento del nostro Greco antico è stato duplice: dapprima ha *scomposto* il quadrato in parti che, aggiunte e ricomposte, dessero la soluzione, e poi ne ha indicato una costruzione.

In questa lezione cercheremo di risolvere alcuni problemi per mezzo di costruzioni.

Il problema che abbiamo appena risolto si chiama **duplicazione del quadrato**:

Abbiamo trovato quindi alla fine una **costruzione geometrica**.

In realtà, il ragionamento del nostro Greco antico è stato duplice: dapprima ha *scomposto* il quadrato in parti che, aggiunte e ricomposte, dessero la soluzione, e poi ne ha indicato una costruzione.

In questa lezione cercheremo di risolvere alcuni problemi per mezzo di costruzioni.

Il problema che abbiamo appena risolto si chiama **duplicazione del quadrato**:

Problema

Dato un quadrato, costruirne uno di area doppia.

Abbiamo trovato quindi alla fine una **costruzione geometrica**.

In realtà, il ragionamento del nostro Greco antico è stato duplice: dapprima ha *scomposto* il quadrato in parti che, aggiunte e ricomposte, dessero la soluzione, e poi ne ha indicato una costruzione.

In questa lezione cercheremo di risolvere alcuni problemi per mezzo di costruzioni.

Il problema che abbiamo appena risolto si chiama **duplicazione del quadrato**:

Problema

Dato un quadrato, costruirne uno di area doppia.

Prima di procedere, però, dobbiamo stabilire un po' di "regole del gioco".

Riga e compasso

Un punto fondamentale è: ma *quali* costruzioni sono ammesse?

Riga e compasso

Un punto fondamentale è: ma *quali* costruzioni sono ammesse?
La domanda è assolutamente non banale, come vedremo:

Riga e compasso

Un punto fondamentale è: ma *quali* costruzioni sono ammesse?

La domanda è assolutamente non banale, come vedremo: a seconda degli “strumenti” concessi certe costruzioni si possono realizzare o meno.

Riga e compasso

Un punto fondamentale è: ma *quali* costruzioni sono ammesse?

La domanda è assolutamente non banale, come vedremo: a seconda degli “strumenti” concessi certe costruzioni si possono realizzare o meno.

Nella Geometria classica si suppone che le costruzioni ammesse siano quelle **con riga e compasso**.

Riga e compasso

Un punto fondamentale è: ma *quali* costruzioni sono ammesse?

La domanda è assolutamente non banale, come vedremo: a seconda degli “strumenti” concessi certe costruzioni si possono realizzare o meno.

Nella Geometria classica si suppone che le costruzioni ammesse siano quelle **con riga e compasso**. Ma cosa vuol dire, esattamente?

Riga e compasso

Un punto fondamentale è: ma *quali* costruzioni sono ammesse?

La domanda è assolutamente non banale, come vedremo: a seconda degli “strumenti” concessi certe costruzioni si possono realizzare o meno.

Nella Geometria classica si suppone che le costruzioni ammesse siano quelle **con riga e compasso**. Ma cosa vuol dire, esattamente?

Di fatto, si tratta di cinque costruzioni:

Riga e compasso

Un punto fondamentale è: ma *quali* costruzioni sono ammesse?

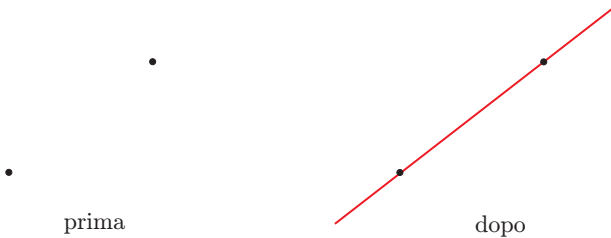
La domanda è assolutamente non banale, come vedremo: a seconda degli “strumenti” concessi certe costruzioni si possono realizzare o meno.

Nella Geometria classica si suppone che le costruzioni ammesse siano quelle **con riga e compasso**. Ma cosa vuol dire, esattamente?

Di fatto, si tratta di cinque costruzioni: vediamole.

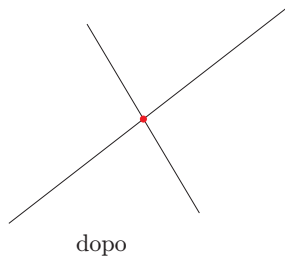
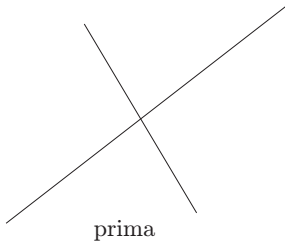
1) Retta passante per due punti sul foglio (in rosso l'elemento **nuovo**):

1) Retta passante per due punti sul foglio (in rosso l'elemento nuovo):



2) Intersezione di due rette sul foglio (in rosso l'elemento **nuovo**):

2) Intersezione di due rette sul foglio (in rosso l'elemento **nuovo**):

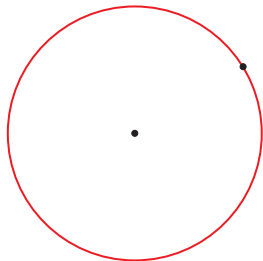


3) Costruzione della circonferenza di centro e un punto sul foglio (in rosso l'elemento **nuovo**):

3) Costruzione della circonferenza di centro e un punto sul foglio (in rosso l'elemento **nuovo**):



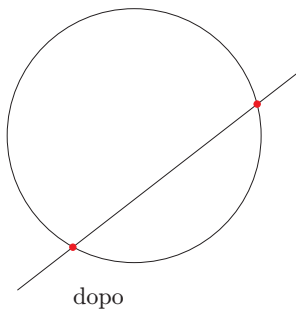
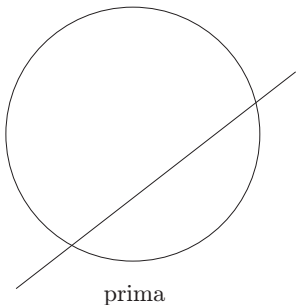
prima



dopo

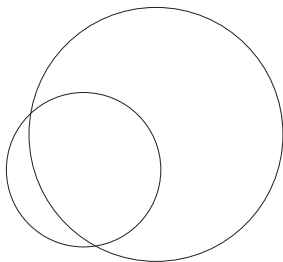
4) Costruzione degli eventuali punti di intersezione di una retta e una circonferenza sul foglio (in rosso gli elementi **nuovi**):

4) Costruzione degli eventuali punti di intersezione di una retta e una circonferenza sul foglio (in rosso gli elementi **nuovi**):

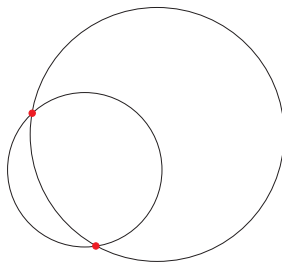


5) Costruzione degli eventuali punti di intersezione di due circonferenze sul foglio (in rosso gli elementi **nuovi**):

5) Costruzione degli eventuali punti di intersezione di due circonferenze sul foglio (in rosso gli elementi **nuovi**):



prima



dopo

C'è poi una regola aggiuntiva importante.

C'è poi una regola aggiuntiva importante.

Regola aggiuntiva

Di tutte le figure viste, poi, si sottintende che una volta trovata una retta o una circonferenza si possano prendere a piacimento alcuni suoi punti.

C'è poi una regola aggiuntiva importante.

Regola aggiuntiva

Di tutte le figure viste, poi, si sottintende che una volta trovata una retta o una circonferenza si possano prendere a piacimento alcuni suoi punti.

E vediamo ora i divieti.

C'è poi una regola aggiuntiva importante.

Regola aggiuntiva

Di tutte le figure viste, poi, si sottintende che una volta trovata una retta o una circonferenza si possano prendere a piacimento alcuni suoi punti.

E vediamo ora i divieti.

Quello che *non* si può fare (perlomeno non direttamente) è

C'è poi una regola aggiuntiva importante.

Regola aggiuntiva

Di tutte le figure viste, poi, si sottintende che una volta trovata una retta o una circonferenza si possano prendere a piacimento alcuni suoi punti.

E vediamo ora i divieti.

Quello che *non* si può fare (perlomeno non direttamente) è

- riportare una distanza col compasso;

C'è poi una regola aggiuntiva importante.

Regola aggiuntiva

Di tutte le figure viste, poi, si sottintende che una volta trovata una retta o una circonferenza si possano prendere a piacimento alcuni suoi punti.

E vediamo ora i divieti.

Quello che *non* si può fare (perlomeno non direttamente) è

- riportare una distanza col compasso; (dovete pensare che il compasso si richiuda quando lo staccate dal foglio;)

C'è poi una regola aggiuntiva importante.

Regola aggiuntiva

Di tutte le figure viste, poi, si sottintende che una volta trovata una retta o una circonferenza si possano prendere a piacimento alcuni suoi punti.

E vediamo ora i divieti.

Quello che *non* si può fare (perlomeno non direttamente) è

- riportare una distanza col compasso; (dovete pensare che il compasso si richiuda quando lo staccate dal foglio;)
- riportare una distanza usando la riga;

C'è poi una regola aggiuntiva importante.

Regola aggiuntiva

Di tutte le figure viste, poi, si sottintende che una volta trovata una retta o una circonferenza si possano prendere a piacimento alcuni suoi punti.

E vediamo ora i divieti.

Quello che *non* si può fare (perlomeno non direttamente) è

- riportare una distanza col compasso; (dovete pensare che il compasso si richiuda quando lo staccate dal foglio;)
- riportare una distanza usando la riga; (la riga non è graduata:

C'è poi una regola aggiuntiva importante.

Regola aggiuntiva

Di tutte le figure viste, poi, si sottintende che una volta trovata una retta o una circonferenza si possano prendere a piacimento alcuni suoi punti.

E vediamo ora i divieti.

Quello che *non* si può fare (perlomeno non direttamente) è

- riportare una distanza col compasso; (dovete pensare che il compasso si richiuda quando lo staccate dal foglio;)
- riportare una distanza usando la riga; (la riga non è graduata: può essere lunghissima (se i punti da congiungere sono lontani) ma non ha “tacche”)

C'è poi una regola aggiuntiva importante.

Regola aggiuntiva

Di tutte le figure viste, poi, si sottintende che una volta trovata una retta o una circonferenza si possano prendere a piacimento alcuni suoi punti.

E vediamo ora i divieti.

Quello che *non* si può fare (perlomeno non direttamente) è

- riportare una distanza col compasso; (dovete pensare che il compasso si richiuda quando lo staccate dal foglio;)
- riportare una distanza usando la riga; (la riga non è graduata: può essere lunghissima (se i punti da congiungere sono lontani) ma non ha "tacche")
- tracciare le tangenti da un punto esterno a una circonferenza, ecc.

C'è poi una regola aggiuntiva importante.

Regola aggiuntiva

Di tutte le figure viste, poi, si sottintende che una volta trovata una retta o una circonferenza si possano prendere a piacimento alcuni suoi punti.

E vediamo ora i divieti.

Quello che *non* si può fare (perlomeno non direttamente) è

- riportare una distanza col compasso; (dovete pensare che il compasso si richiuda quando lo staccate dal foglio;)
- riportare una distanza usando la riga; (la riga non è graduata: può essere lunghissima (se i punti da congiungere sono lontani) ma non ha "tacche")
- tracciare le tangenti da un punto esterno a una circonferenza, ecc.

Tutte queste cose di fatto *si possono fare*, ma solo con costruzioni appropriate.

C'è poi una regola aggiuntiva importante.

Regola aggiuntiva

Di tutte le figure viste, poi, si sottintende che una volta trovata una retta o una circonferenza si possano prendere a piacimento alcuni suoi punti.

E vediamo ora i divieti.

Quello che *non* si può fare (perlomeno non direttamente) è

- riportare una distanza col compasso; (dovete pensare che il compasso si richiuda quando lo staccate dal foglio;)
- riportare una distanza usando la riga; (la riga non è graduata: può essere lunghissima (se i punti da congiungere sono lontani) ma non ha "tacche")
- tracciare le tangenti da un punto esterno a una circonferenza, ecc.

Tutte queste cose di fatto *si possono fare*, ma solo con costruzioni appropriate.

Vedremo alcuni esempi fra poco.

Un punto importante è che *il poter risolvere problemi con costruzioni geometriche dipende dagli strumenti concessi.*

Un punto importante è che *il poter risolvere problemi con costruzioni geometriche dipende dagli strumenti concessi.*

Per esempio, si può dimostrare (v. approfondimento) che il problema della duplicazione del quadrato *non* è risolubile se si usa la sola riga.

Costruzioni impossibili con la sola riga

Costruzioni impossibili con la sola riga

Attenzione!

Per comprendere quanto segue gli studenti devono avere svolto, almeno teoricamente, la geometria analitica della retta.

Costruzioni impossibili con la sola riga

Attenzione!

Per comprendere quanto segue gli studenti devono avere svolto, almeno teoricamente, la geometria analitica della retta.

In questo approfondimento vediamo il seguente

Costruzioni impossibili con la sola riga

Attenzione!

Per comprendere quanto segue gli studenti devono avere svolto, almeno teoricamente, la geometria analitica della retta.

In questo approfondimento vediamo il seguente

Teorema

Il problema della duplicazione del quadrato è impossibile da risolvere con la sola riga (non graduata).

Costruzioni impossibili con la sola riga

Attenzione!

Per comprendere quanto segue gli studenti devono avere svolto, almeno teoricamente, la geometria analitica della retta.

In questo approfondimento vediamo il seguente

Teorema

Il problema della duplicazione del quadrato è impossibile da risolvere con la sola riga (non graduata).

Dimostrazione. Abbiamo visto dal problema di poco fa che il rapporto $\overline{AP}/\overline{AB}$ è uguale a $\sqrt{2}$, che *non* è un numero razionale.

Costruzioni impossibili con la sola riga

Attenzione!

Per comprendere quanto segue gli studenti devono avere svolto, almeno teoricamente, la geometria analitica della retta.

In questo approfondimento vediamo il seguente

Teorema

Il problema della duplicazione del quadrato è impossibile da risolvere con la sola riga (non graduata).

Dimostrazione. Abbiamo visto dal problema di poco fa che il rapporto $\overline{AP}/\overline{AB}$ è uguale a $\sqrt{2}$, che *non* è un numero razionale. Questo fatto è indipendente dall'unità di misura scelta per il lato del quadrato.

Costruzioni impossibili con la sola riga

Attenzione!

Per comprendere quanto segue gli studenti devono avere svolto, almeno teoricamente, la geometria analitica della retta.

In questo approfondimento vediamo il seguente

Teorema

Il problema della duplicazione del quadrato è impossibile da risolvere con la sola riga (non graduata).

Dimostrazione. Abbiamo visto dal problema di poco fa che il rapporto $\overline{AP}/\overline{AB}$ è uguale a $\sqrt{2}$, che *non* è un numero razionale. Questo fatto è indipendente dall'unità di misura scelta per il lato del quadrato. Questo significa che se i punti A e B hanno coordinate *razionali*, allora il punto P non può avere coordinate razionali, comunque sia orientato il segmento AB e dunque il quadrato.

Supponiamo allora intanto di piazzare il quadrato in modo che tutti i punti abbiano coordinate razionali.

Supponiamo allora intanto di piazzare il quadrato in modo che tutti i punti abbiano coordinate razionali.

Eseguire una costruzione con la sola riga significa che solo le regole 1) e 2) di poco fa sono possibili: congiungere due punti e intersecare due rette.

Supponiamo allora intanto di piazzare il quadrato in modo che tutti i punti abbiano coordinate razionali.

Eeguire una costruzione con la sola riga significa che solo le regole 1) e 2) di poco fa sono possibili: congiungere due punti e intersecare due rette. Ora, siccome abbiamo quattro punti razionali e non possiamo scegliere punti a distanza data

Supponiamo allora intanto di piazzare il quadrato in modo che tutti i punti abbiano coordinate razionali.

Eeguire una costruzione con la sola riga significa che solo le regole 1) e 2) di poco fa sono possibili: congiungere due punti e intersecare due rette.

Ora, siccome abbiamo quattro punti razionali e non possiamo scegliere punti a distanza data (altrimenti basterebbe un punto a distanza $1/\sqrt{2}$ da A!)

Supponiamo allora intanto di piazzare il quadrato in modo che tutti i punti abbiano coordinate razionali.

Eeguire una costruzione con la sola riga significa che solo le regole 1) e 2) di poco fa sono possibili: congiungere due punti e intersecare due rette. Ora, siccome abbiamo quattro punti razionali e non possiamo scegliere punti a distanza data (altrimenti basterebbe un punto a distanza $1/\sqrt{2}$ da A!) possiamo trovare solo rette con coefficienti razionali, perché la formula della retta per due punti

Supponiamo allora intanto di piazzare il quadrato in modo che tutti i punti abbiano coordinate razionali.

Eeguire una costruzione con la sola riga significa che solo le regole 1) e 2) di poco fa sono possibili: congiungere due punti e intersecare due rette. Ora, siccome abbiamo quattro punti razionali e non possiamo scegliere punti a distanza data (altrimenti basterebbe un punto a distanza $1/\sqrt{2}$ da A!) possiamo trovare solo rette con coefficienti razionali, perché la formula della retta per due punti

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Supponiamo allora intanto di piazzare il quadrato in modo che tutti i punti abbiano coordinate razionali.

Eeguire una costruzione con la sola riga significa che solo le regole 1) e 2) di poco fa sono possibili: congiungere due punti e intersecare due rette. Ora, siccome abbiamo quattro punti razionali e non possiamo scegliere punti a distanza data (altrimenti basterebbe un punto a distanza $1/\sqrt{2}$ da A!) possiamo trovare solo rette con coefficienti razionali, perché la formula della retta per due punti

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

non contiene radici quadrate.

Ma anche intersecare due rette con coefficienti razionali non comporta l'estrazione di radici quadrate:

Ma anche intersecare due rette con coefficienti razionali non comporta l'estrazione di radici quadrate: siccome si risolve un sistema lineare, bastano le quattro operazioni

Ma anche intersecare due rette con coefficienti razionali non comporta l'estrazione di radici quadrate: siccome si risolve un sistema lineare, bastano le quattro operazioni (come abbiamo visto in prima):

Ma anche intersecare due rette con coefficienti razionali non comporta l'estrazione di radici quadrate: siccome si risolve un sistema lineare, bastano le quattro operazioni (come abbiamo visto in prima):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ \end{cases}$$

Ma anche intersecare due rette con coefficienti razionali non comporta l'estrazione di radici quadrate: siccome si risolve un sistema lineare, bastano le quattro operazioni (come abbiamo visto in prima):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Ma anche intersecare due rette con coefficienti razionali non comporta l'estrazione di radici quadrate: siccome si risolve un sistema lineare, bastano le quattro operazioni (come abbiamo visto in prima):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Ma allora è impossibile che possa esistere una costruzione che porti ad intersecare due rette nel punto P perché le sue coordinate sono irrazionali.

Ma anche intersecare due rette con coefficienti razionali non comporta l'estrazione di radici quadrate: siccome si risolve un sistema lineare, bastano le quattro operazioni (come abbiamo visto in prima):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Ma allora è impossibile che possa esistere una costruzione che porti ad intersecare due rette nel punto P perché le sue coordinate sono irrazionali.

Se infine le coordinate del quadrato fossero irrazionali e la costruzione in questo caso fosse possibile,

Ma anche intersecare due rette con coefficienti razionali non comporta l'estrazione di radici quadrate: siccome si risolve un sistema lineare, bastano le quattro operazioni (come abbiamo visto in prima):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Ma allora è impossibile che possa esistere una costruzione che porti ad intersecare due rette nel punto P perché le sue coordinate sono irrazionali.

Se infine le coordinate del quadrato fossero irrazionali e la costruzione in questo caso fosse possibile, basterebbe eseguire una traslazione o una dilatazione dell'intera costruzione in modo che i punti del quadrato diventino razionali

Ma anche intersecare due rette con coefficienti razionali non comporta l'estrazione di radici quadrate: siccome si risolve un sistema lineare, bastano le quattro operazioni (come abbiamo visto in prima):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Ma allora è impossibile che possa esistere una costruzione che porti ad intersecare due rette nel punto P perché le sue coordinate sono irrazionali.

Se infine le coordinate del quadrato fossero irrazionali e la costruzione in questo caso fosse possibile, basterebbe eseguire una traslazione o una dilatazione dell'intera costruzione in modo che i punti del quadrato diventino razionali (è sempre possibile),

Ma anche intersecare due rette con coefficienti razionali non comporta l'estrazione di radici quadrate: siccome si risolve un sistema lineare, bastano le quattro operazioni (come abbiamo visto in prima):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Ma allora è impossibile che possa esistere una costruzione che porti ad intersecare due rette nel punto P perché le sue coordinate sono irrazionali.

Se infine le coordinate del quadrato fossero irrazionali e la costruzione in questo caso fosse possibile, basterebbe eseguire una traslazione o una dilatazione dell'intera costruzione in modo che i punti del quadrato diventino razionali (è sempre possibile), e la costruzione funzionerebbe anche per coordinate razionali, il che, abbiamo appena visto, non può accadere. ■

Problemi con riga e compasso

Problemi con riga e compasso

I più importanti problemi della Geometria sono quindi quelli con riga e compasso (la riga è troppo “povera”, e sul solo compasso torneremo dopo).

Problemi con riga e compasso

I più importanti problemi della Geometria sono quindi quelli con riga e compasso (la riga è troppo “povera”, e sul solo compasso torneremo dopo).

Avevamo promesso degli esempi.

Problemi con riga e compasso

I più importanti problemi della Geometria sono quindi quelli con riga e compasso (la riga è troppo “povera”, e sul solo compasso torneremo dopo).

Avevamo promesso degli esempi. Eccone un po'.

Problemi con riga e compasso

I più importanti problemi della Geometria sono quindi quelli con riga e compasso (la riga è troppo “povera”, e sul solo compasso torneremo dopo).

Avevamo promesso degli esempi. Eccone un po'.

Esempio 1

Dati gli estremi di un segmento, costruirne il punto medio.

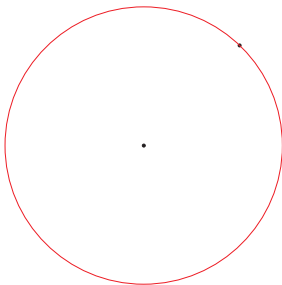
La costruzione è quella che conosciamo dal disegno tecnico:

La costruzione è quella che conosciamo dal disegno tecnico:



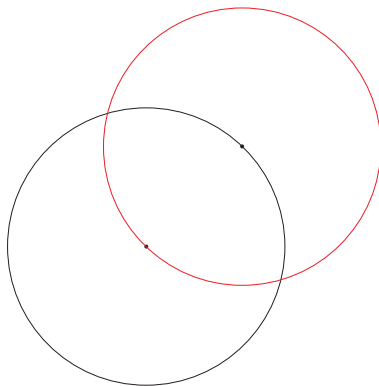
Situazione di partenza

La costruzione è quella che conosciamo dal disegno tecnico:



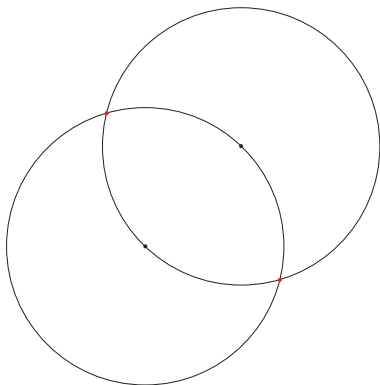
Tracciamo la circonferenza di centro uno dei punti e passante per l'altro (regola 3);

La costruzione è quella che conosciamo dal disegno tecnico:



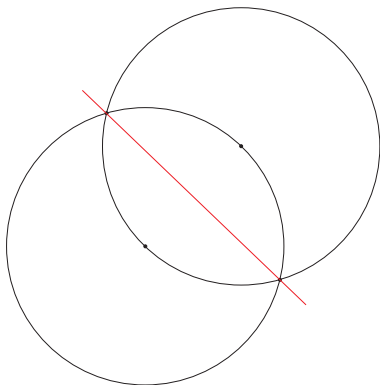
Tracciamo la circonferenza di centro l'altro punto e passante per il primo (regola 3);

La costruzione è quella che conosciamo dal disegno tecnico:



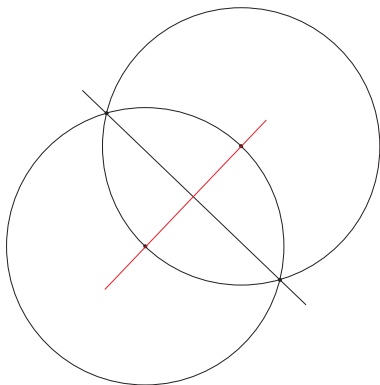
Intersechiamo le due circonferenze (regola 5);

La costruzione è quella che conosciamo dal disegno tecnico:



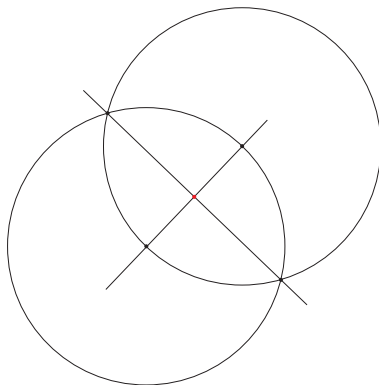
Congiungiamo i due punti trovati (regola 1);

La costruzione è quella che conosciamo dal disegno tecnico:



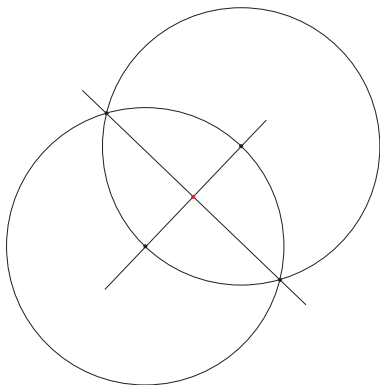
Congiungiamo i due punti dati all'inizio (regola 1);

La costruzione è quella che conosciamo dal disegno tecnico:



Intersechiamo le rette (regola 2),

La costruzione è quella che conosciamo dal disegno tecnico:



Intersechiamo le rette (regola 2), finito!

Esempio 2 (Bisezione dell'angolo)

Dato un angolo nel piano, costruire l'angolo pari alla sua metà.

Esempio 2 (Bisezione dell'angolo)

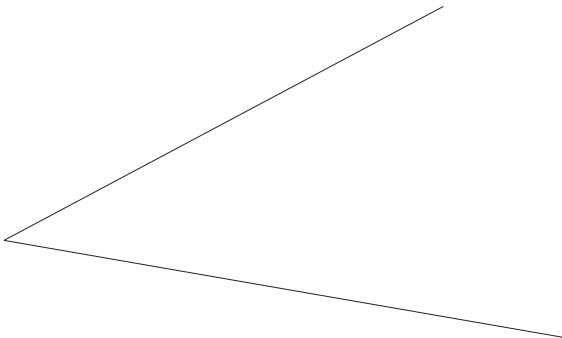
Dato un angolo nel piano, costruire l'angolo pari alla sua metà.

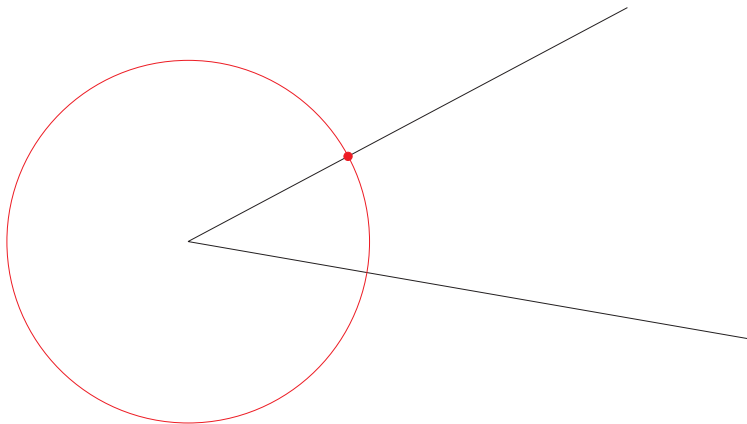
Supponiamo di avere l'angolo sotto forma di due sue semirette:

Esempio 2 (Bisezione dell'angolo)

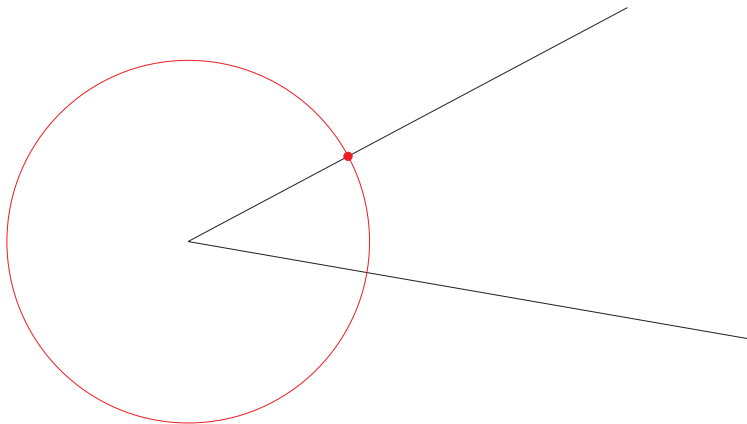
Dato un angolo nel piano, costruire l'angolo pari alla sua metà.

Supponiamo di avere l'angolo sotto forma di due sue semirette:

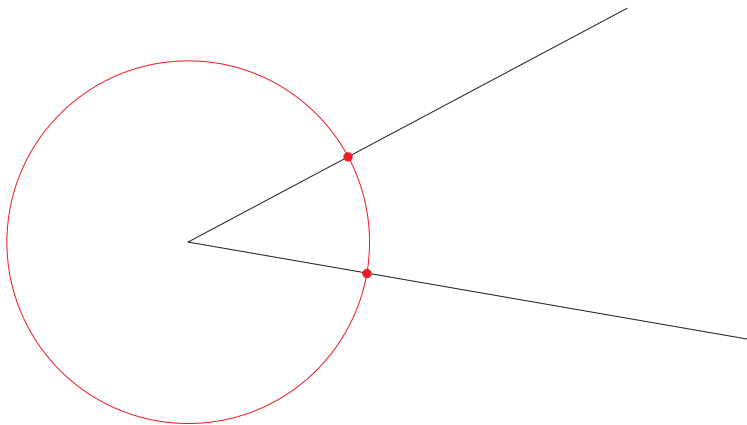




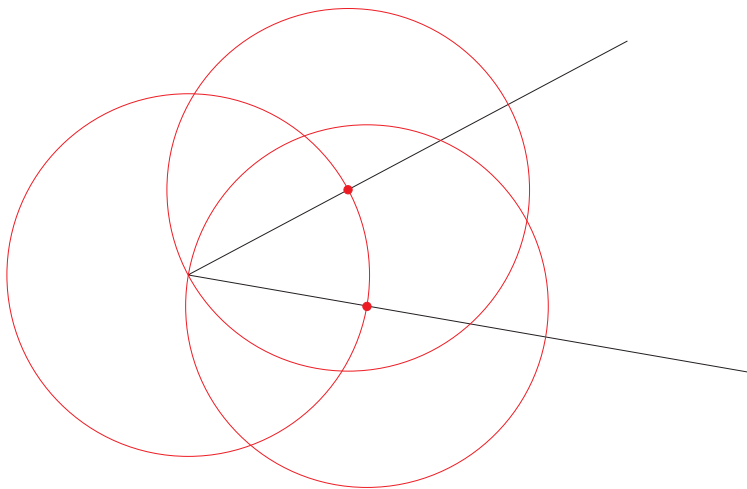
Prendiamo un punto su una delle due semirette (regola aggiuntiva)



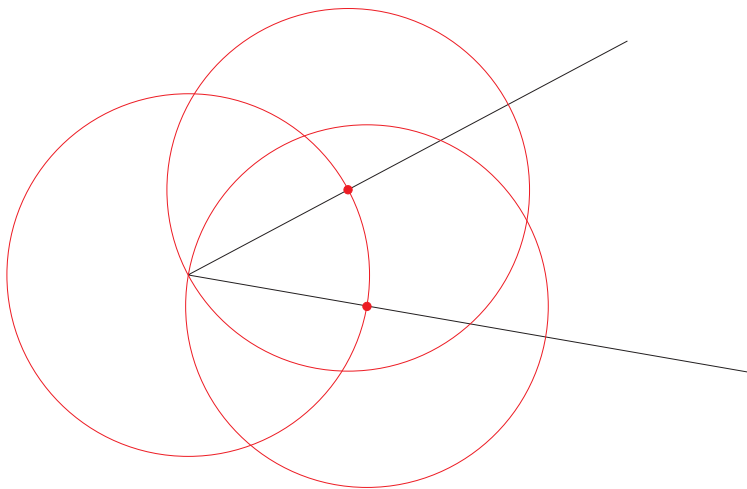
Prendiamo un punto su una delle due semirette (regola aggiuntiva) e tracciamo la circonferenza con centro il vertice e passante per questo punto (regola 3)



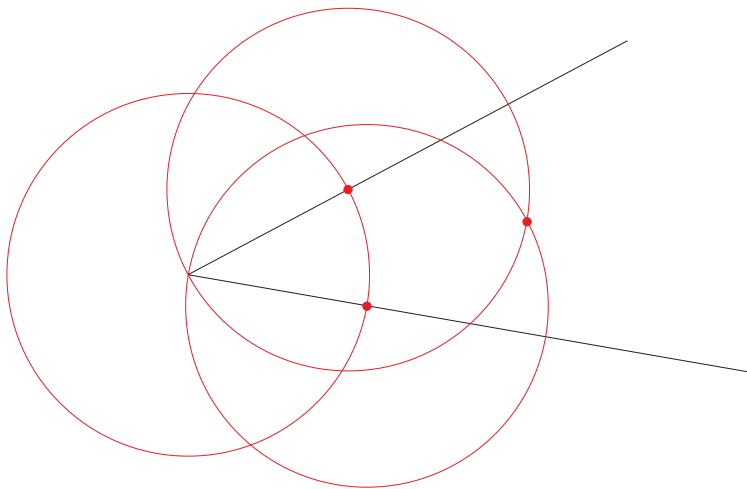
Troviamo il punto di intersezione con l'altra semiretta (regola 4)



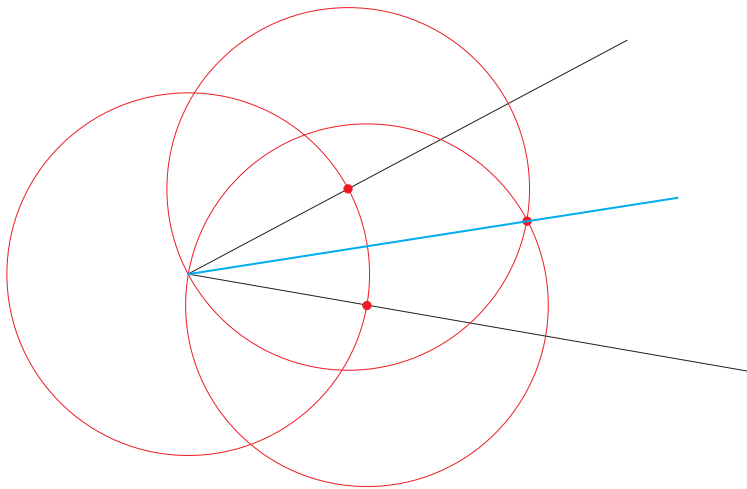
Tracciamo la circonferenza avente il centro nel punto preso prima a piacere e passante per il vertice (regola 3)



Tracciamo la circonferenza avente il centro nel punto preso prima a piacere e passante per il vertice (regola 3) e la circonferenza col centro nel punto appena trovato e passante per il vertice (regola 3)



Troviamo i due punti di intersezione delle circonferenze (regola 5; uno è il vertice)



Congiungiamo questi due punti e abbiamo la retta bisettrice dell'angolo.

Esempio 3

Dato un segmento, costruire la perpendicolare in un suo estremo.

Esempio 3

Dato un segmento, costruire la perpendicolare in un suo estremo.

Anche qui il disegno tecnico aiuta.

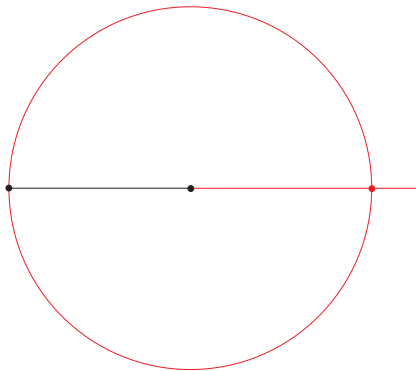
Ecco la situazione di partenza:

Ecco la situazione di partenza:

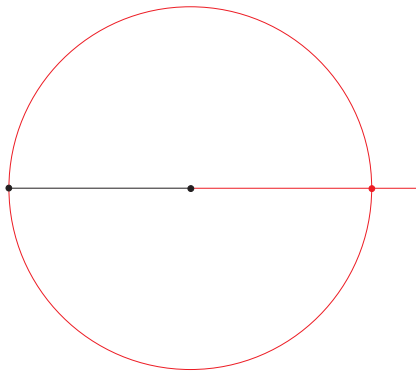


Dato il segmento, prolunghiamolo (regola 1), poi tracciamo la circonferenza avente il centro nell'estremo sul quale vogliamo costruire la perpendicolare (regola 3).

Dato il segmento, prolunghiamolo (regola 1), poi tracciamo la circonferenza avente il centro nell'estremo sul quale vogliamo costruire la perpendicolare (regola 3).



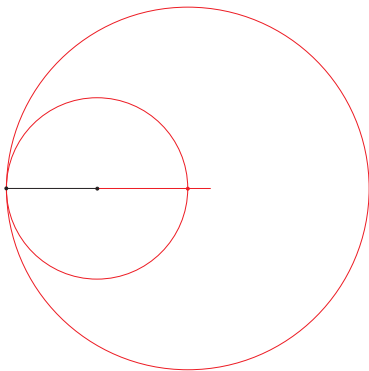
Dato il segmento, prolunghiamolo (regola 1), poi tracciamo la circonferenza avente il centro nell'estremo sul quale vogliamo costruire la perpendicolare (regola 3).



Otteniamo così il punto rosso (regola 4).

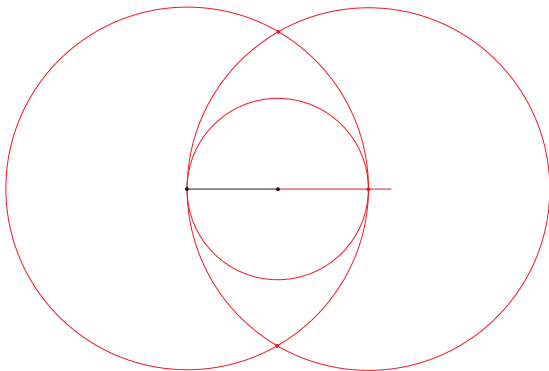
Ora puntiamo il compasso con centro nel punto rosso e apertura fino al primo estremo e tracciamo la circonferenza (regola 3):

Ora puntiamo il compasso con centro nel punto rosso e apertura fino al primo estremo e tracciamo la circonferenza (regola 3):

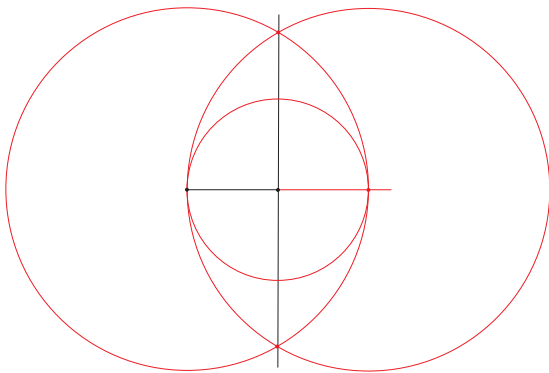


Adesso puntiamo sul primo estremo con apertura fino al punto rosso e tracciamo la circonferenza (regola 3) e intersechiamo le ultime due circonferenze (regola 5):

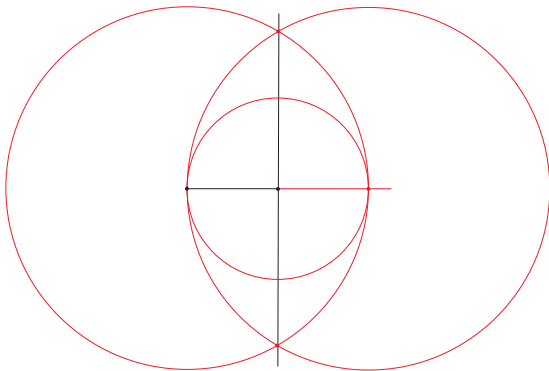
Adesso puntiamo sul primo estremo con apertura fino al punto rosso e tracciamo la circonferenza (regola 3) e intersechiamo le ultime due circonferenze (regola 5):



Infine congiungiamo i due punti trovati e abbiamo la perpendicolare:



Infine congiungiamo i due punti trovati e abbiamo la perpendicolare:

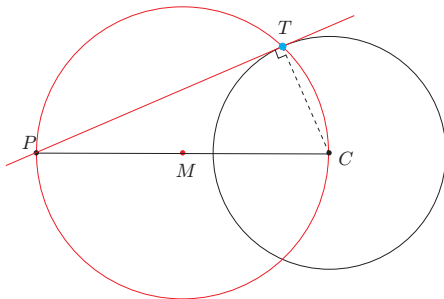


Se poi il punto non è un estremo, si procede in modo perfettamente analogo (sarà l'estremo di un altro segmento).

Esempio 4

Dato un punto esterno P a una circonferenza di centro C , tracciarne le tangenti.

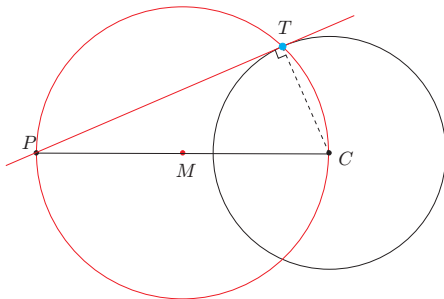
In base a un teorema di Geometria piana, se si costruisce il punto medio M del segmento CP e si traccia il cerchio di centro M passante per P ,



Esempio 4

Dato un punto esterno P a una circonferenza di centro C , tracciarne le tangenti.

In base a un teorema di Geometria piana, se si costruisce il punto medio M del segmento CP e si traccia il cerchio di centro M passante per P ,



risulta che PT è perpendicolare a CT . Quindi PT è una tangente.

Pertanto la costruzione si ottiene da quella precedente, per il calcolo del punto medio M , e successivamente tracciando il cerchio di centro M passante per C e trovando i punti di tangenza,

Pertanto la costruzione si ottiene da quella precedente, per il calcolo del punto medio M , e successivamente tracciando il cerchio di centro M passante per C e trovando i punti di tangenza, dopodiché basterà tracciare le tangenti.

Pertanto la costruzione si ottiene da quella precedente, per il calcolo del punto medio M , e successivamente tracciando il cerchio di centro M passante per C e trovando i punti di tangenza, dopodiché basterà tracciare le tangenti.

Questo esempio mostra che in una costruzione si può rinviare a costruzioni precedenti già acquisite, senza dover necessariamente rifare tutto daccapo.

Pertanto la costruzione si ottiene da quella precedente, per il calcolo del punto medio M , e successivamente tracciando il cerchio di centro M passante per C e trovando i punti di tangenza, dopodiché basterà tracciare le tangenti.

Questo esempio mostra che in una costruzione si può rinviare a costruzioni precedenti già acquisite, senza dover necessariamente rifare tutto daccapo.

Siamo ora in grado di realizzare una costruzione abbastanza importante.

Pertanto la costruzione si ottiene da quella precedente, per il calcolo del punto medio M , e successivamente tracciando il cerchio di centro M passante per C e trovando i punti di tangenza, dopodiché basterà tracciare le tangenti.

Questo esempio mostra che in una costruzione si può rinviare a costruzioni precedenti già acquisite, senza dover necessariamente rifare tutto daccapo.

Siamo ora in grado di realizzare una costruzione abbastanza importante.

Esempio 5

Dato un rettangolo, costruire un quadrato avente la stessa area.

Pertanto la costruzione si ottiene da quella precedente, per il calcolo del punto medio M , e successivamente tracciando il cerchio di centro M passante per C e trovando i punti di tangenza, dopodiché basterà tracciare le tangenti.

Questo esempio mostra che in una costruzione si può rinviare a costruzioni precedenti già acquisite, senza dover necessariamente rifare tutto daccapo.

Siamo ora in grado di realizzare una costruzione abbastanza importante.

Esempio 5

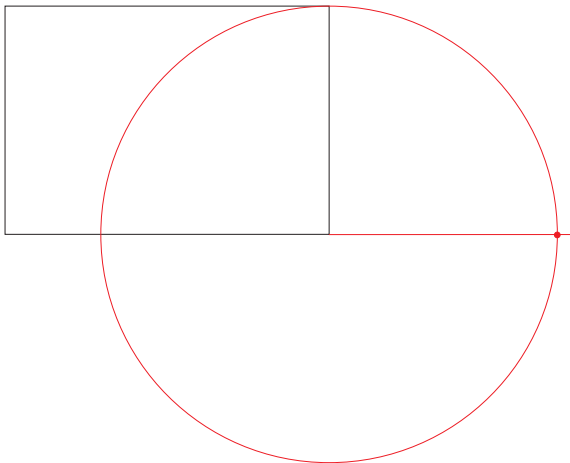
Dato un rettangolo, costruire un quadrato avente la stessa area.

Ci serviremo per questo del secondo teorema di Euclide, come vedremo.

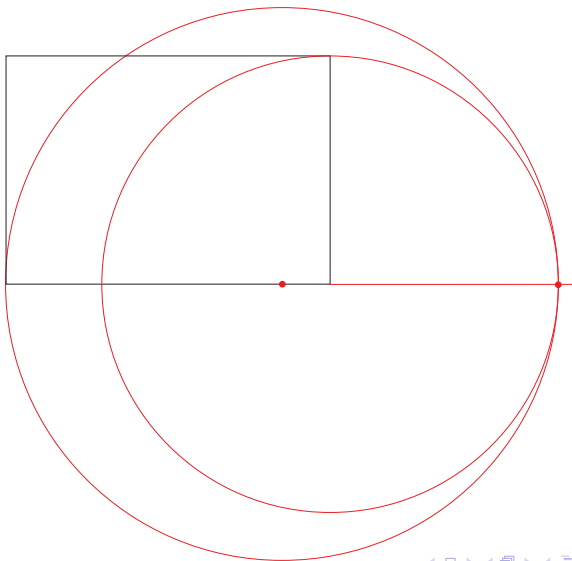
Per prima cosa prolunghiamo la base del rettangolo e prendiamo su di essa un segmento lungo quanto l'altezza.

Per prima cosa prolunghiamo la base del rettangolo e prendiamo su di essa un segmento lungo quanto l'altezza. Questo è facile:

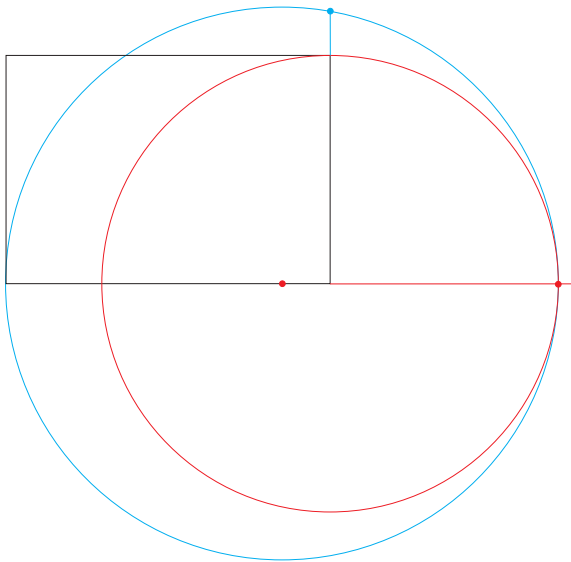
Per prima cosa prolunghiamo la base del rettangolo e prendiamo su di essa un segmento lungo quanto l'altezza. Questo è facile:



Poi costruiamo il punto medio del segmento orizzontale e tracciamo la circonferenza avente per diametro il segmento orizzontale (base più altezza):

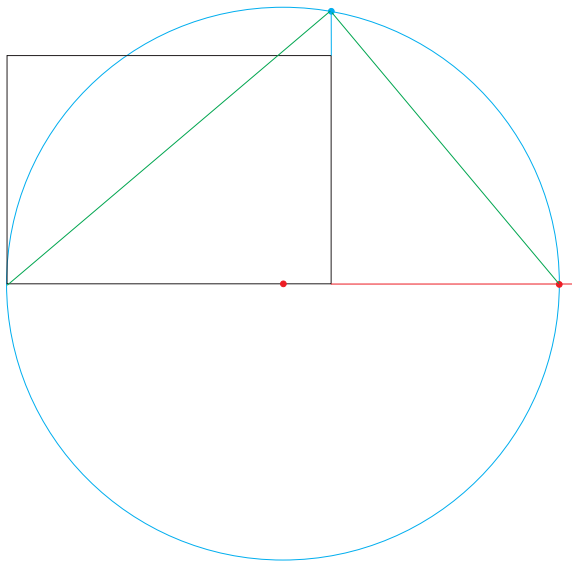


Ora congiungiamo il prolungamento dell'altezza con la circonferenza appena ottenuta e prendiamo uno dei due punti ottenuti:



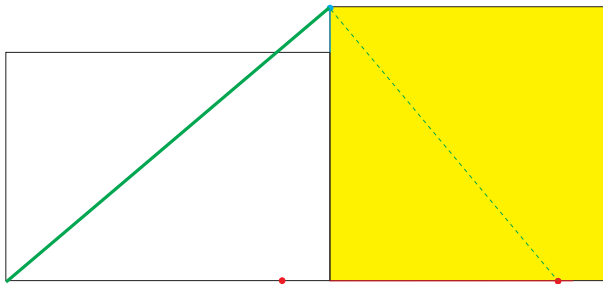
Il triangolo con i lati verdi e la base orizzontale è ora rettangolo:

Il triangolo con i lati verdi e la base orizzontale è ora rettangolo:

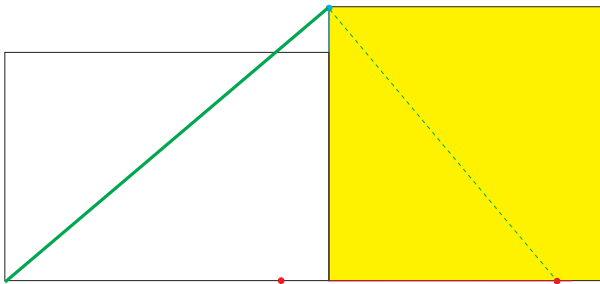


e quindi per il secondo teorema di Euclide l'altezza relativa di questo triangolo è il lato del quadrato cercato:

e quindi per il secondo teorema di Euclide l'altezza relativa di questo triangolo è il lato del quadrato cercato:

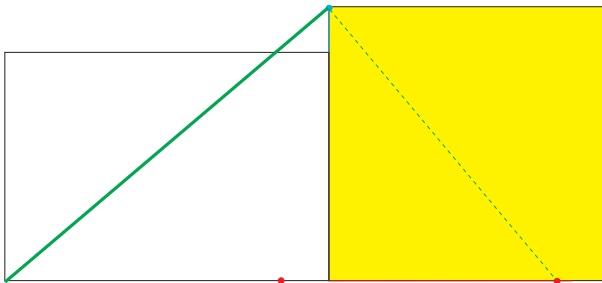


e quindi per il secondo teorema di Euclide l'altezza relativa di questo triangolo è il lato del quadrato cercato:



Naturalmente ora noi abbiamo solo due vertici del quadrato cercato, ma con la costruzione della perpendicolare a un segmento si ottengono con poca fatica gli altri due.

e quindi per il secondo teorema di Euclide l'altezza relativa di questo triangolo è il lato del quadrato cercato:



Naturalmente ora noi abbiamo solo due vertici del quadrato cercato, ma con la costruzione della perpendicolare a un segmento si ottengono con poca fatica gli altri due.

Questa costruzione si chiama **quadratura del rettangolo**, perché trasforma un rettangolo dato in un rettangolo equivalente.

Le costruzioni con riga e compasso sono dunque *molto* più produttive di quelle con la sola riga.

Le costruzioni con riga e compasso sono dunque *molto* più produttive di quelle con la sola riga. I Greci però si sono arenati su tre costruzioni molto semplici da enunciare, che vengono chiamati **Problemi classici della Geometria**.

Le costruzioni con riga e compasso sono dunque *molto* più produttive di quelle con la sola riga. I Greci però si sono arenati su tre costruzioni molto semplici da enunciare, che vengono chiamati **Problemi classici della Geometria**. Essi sono:

- 1 La *duplicazione del cubo*;

Le costruzioni con riga e compasso sono dunque *molto* più produttive di quelle con la sola riga. I Greci però si sono arenati su tre costruzioni molto semplici da enunciare, che vengono chiamati **Problemi classici della Geometria**. Essi sono:

- 1 La *duplicazione del cubo*;
- 2 La *trisezione dell'angolo*;

Le costruzioni con riga e compasso sono dunque *molto* più produttive di quelle con la sola riga. I Greci però si sono arenati su tre costruzioni molto semplici da enunciare, che vengono chiamati **Problemi classici della Geometria**. Essi sono:

- 1 La *duplicazione del cubo*;
- 2 La *trisezione dell'angolo*;
- 3 La *quadratura del cerchio*.

Le costruzioni con riga e compasso sono dunque *molto* più produttive di quelle con la sola riga. I Greci però si sono arenati su tre costruzioni molto semplici da enunciare, che vengono chiamati **Problemi classici della Geometria**. Essi sono:

- 1 La *duplicazione del cubo*;
- 2 La *trisezione dell'angolo*;
- 3 La *quadratura del cerchio*.

Nessuno di questi tre problemi è risolubile con riga e compasso.

Le costruzioni con riga e compasso sono dunque *molto* più produttive di quelle con la sola riga. I Greci però si sono arenati su tre costruzioni molto semplici da enunciare, che vengono chiamati **Problemi classici della Geometria**. Essi sono:

- 1 La *duplicazione del cubo*;
- 2 La *trisezione dell'angolo*;
- 3 La *quadratura del cerchio*.

Nessuno di questi tre problemi è risolubile con riga e compasso. Però, come molti problemi “impossibili”, tutti e tre sono diventati molto famosi.

La duplicazione del cubo

La duplicazione del cubo

Il problema della duplicazione del cubo è l'esatto corrispettivo nello spazio del problema, che abbiamo risolto con riga e compasso, della duplicazione del quadrato.

La duplicazione del cubo

Il problema della duplicazione del cubo è l'esatto corrispettivo nello spazio del problema, che abbiamo risolto con riga e compasso, della duplicazione del quadrato.

Problema (duplicazione del cubo)

Dato un cubo, costruirne uno di volume doppio con riga e compasso.

La duplicazione del cubo

Il problema della duplicazione del cubo è l'esatto corrispettivo nello spazio del problema, che abbiamo risolto con riga e compasso, della duplicazione del quadrato.

Problema (duplicazione del cubo)

Dato un cubo, costruirne uno di volume doppio con riga e compasso.

La leggenda narra che gli abitanti di Delo, volendo obbedire al suggerimento di un oracolo per liberarsi dalla peste, volessero erigere un altare cubico di volume doppio rispetto a quello esistente.

La duplicazione del cubo

Il problema della duplicazione del cubo è l'esatto corrispettivo nello spazio del problema, che abbiamo risolto con riga e compasso, della duplicazione del quadrato.

Problema (duplicazione del cubo)

Dato un cubo, costruirne uno di volume doppio con riga e compasso.

La leggenda narra che gli abitanti di Delo, volendo obbedire al suggerimento di un oracolo per liberarsi dalla peste, volessero erigere un altare cubico di volume doppio rispetto a quello esistente. Chiaramente, il cubo richiesto *non* ha gli spigoli di lunghezza doppia di quelli del cubo di partenza:

La duplicazione del cubo

Il problema della duplicazione del cubo è l'esatto corrispettivo nello spazio del problema, che abbiamo risolto con riga e compasso, della duplicazione del quadrato.

Problema (duplicazione del cubo)

Dato un cubo, costruirne uno di volume doppio con riga e compasso.

La leggenda narra che gli abitanti di Delo, volendo obbedire al suggerimento di un oracolo per liberarsi dalla peste, volessero erigere un altare cubico di volume doppio rispetto a quello esistente.

Chiaramente, il cubo richiesto *non* ha gli spigoli di lunghezza doppia di quelli del cubo di partenza: in questo caso, il suo volume sarebbe otto volte il volume originario, e non il suo doppio.

Possiamo risolvere algebricamente il problema come abbiamo fatto con la duplicazione del quadrato:

Possiamo risolvere algebricamente il problema come abbiamo fatto con la duplicazione del quadrato: detta l la lunghezza dello spigolo del cubo dato, e detto x lo spigolo incognito del cubo da trovare, la condizione data dall'oracolo diventa

Possiamo risolvere algebricamente il problema come abbiamo fatto con la duplicazione del quadrato: detta l la lunghezza dello spigolo del cubo dato, e detto x lo spigolo incognito del cubo da trovare, la condizione data dall'oracolo diventa

$$x^3 = 2l^3$$

Possiamo risolvere algebricamente il problema come abbiamo fatto con la duplicazione del quadrato: detta l la lunghezza dello spigolo del cubo dato, e detto x lo spigolo incognito del cubo da trovare, la condizione data dall'oracolo diventa

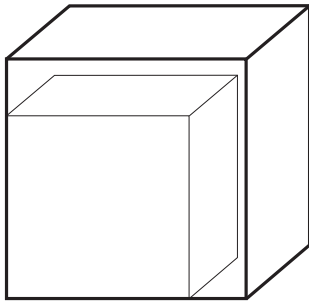
$$x^3 = 2l^3$$

e quindi $x = l\sqrt[3]{2}$.

Possiamo risolvere algebricamente il problema come abbiamo fatto con la duplicazione del quadrato: detta l la lunghezza dello spigolo del cubo dato, e detto x lo spigolo incognito del cubo da trovare, la condizione data dall'oracolo diventa

$$x^3 = 2l^3$$

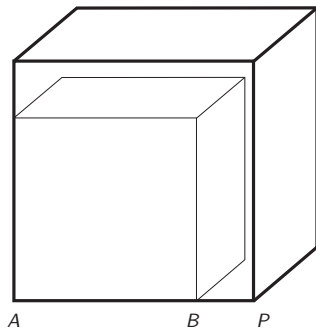
e quindi $x = l\sqrt[3]{2}$.



Fin qui l'algebra (che sarà inventata quasi duemila anni dopo).

Fin qui l'algebra (che sarà inventata quasi duemila anni dopo). Ma il problema è la costruzione del punto P , che equivale alla costruzione di un segmento che sia $\sqrt[3]{2}$ volte un altro con riga e compasso.

Fin qui l'algebra (che sarà inventata quasi duemila anni dopo). Ma il problema è la costruzione del punto P , che equivale alla costruzione di un segmento che sia $\sqrt[3]{2}$ volte un altro con riga e compasso.



Non siamo in grado di dimostrare che questo problema è *impossibile con riga e compasso* , ma possiamo lo stesso dare un'idea intuitiva.

Non siamo in grado di dimostrare che questo problema è *impossibile con riga e compasso*, ma possiamo lo stesso dare un'idea intuitiva.

Il punto cruciale è che intersecare una retta e una circonferenza, oppure due circonferenze, porta sempre al massimo alla soluzione di un'equazione di *secondo* grado.

Non siamo in grado di dimostrare che questo problema è *impossibile con riga e compasso*, ma possiamo lo stesso dare un'idea intuitiva.

Il punto cruciale è che intersecare una retta e una circonferenza, oppure due circonferenze, porta sempre al massimo alla soluzione di un'equazione di *secondo* grado. Questo si potrà vedere quando studieremo la Geometria Analitica.

Non siamo in grado di dimostrare che questo problema è *impossibile con riga e compasso*, ma possiamo lo stesso dare un'idea intuitiva.

Il punto cruciale è che intersecare una retta e una circonferenza, oppure due circonferenze, porta sempre al massimo alla soluzione di un'equazione di *secondo* grado. Questo si potrà vedere quando studieremo la Geometria Analitica.

Dunque, siccome nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado non vi sono radici cubiche, non può esistere una costruzione che dia per risultato un segmento che sia $\sqrt[3]{2}$ volte un altro.

Non siamo in grado di dimostrare che questo problema è *impossibile con riga e compasso*, ma possiamo lo stesso dare un'idea intuitiva.

Il punto cruciale è che intersecare una retta e una circonferenza, oppure due circonferenze, porta sempre al massimo alla soluzione di un'equazione di *secondo* grado. Questo si potrà vedere quando studieremo la Geometria Analitica.

Dunque, siccome nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado non vi sono radici cubiche, non può esistere una costruzione che dia per risultato un segmento che sia $\sqrt[3]{2}$ volte un altro.

Il bello è che, con l'aiuto di strumenti *diversi*, anche molto semplici, si può risolvere il problema.

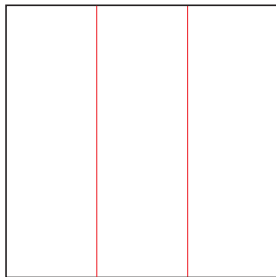
Risolviamo il problema di trovare due segmenti con rapporto $\sqrt[3]{2}$ con l'*origami*.

Risolviamo il problema di trovare due segmenti con rapporto $\sqrt[3]{2}$ con l'*origami*.

Dato un foglio quadrato, tracciamo due linee verticali che lo dividono in tre parti uguali:

Risolvi il problema di trovare due segmenti con rapporto $\sqrt[3]{2}$ con l'*origami*.

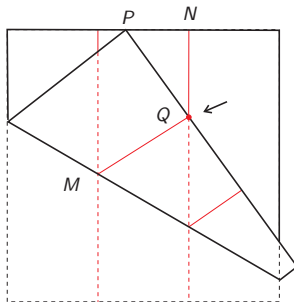
Dato un foglio quadrato, tracciamo due linee verticali che lo dividono in tre parti uguali:



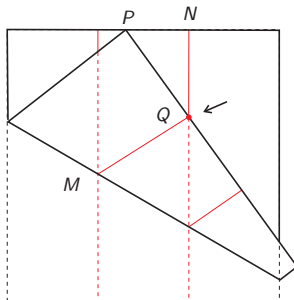
Adesso pieghiamo il foglio in modo che le linee indicate a un terzo e due terzi si incontrino (nel punto rosso indicato in figura)

Adesso pieghiamo il foglio in modo che le linee indicate a un terzo e due terzi si incontrino (nel punto rosso indicato in figura) e in modo che l'angolo in basso a sinistra vada a toccare il lato superiore:

Adesso pieghiamo il foglio in modo che le linee indicate a un terzo e due terzi si incontrino (nel punto rosso indicato in figura) e in modo che l'angolo in basso a sinistra vada a toccare il lato superiore:



Adesso pieghiamo il foglio in modo che le linee indicate a un terzo e due terzi si incontrino (nel punto rosso indicato in figura) e in modo che l'angolo in basso a sinistra vada a toccare il lato superiore:



(in pratica non è facile: bisogna far “scorrere” il punto P sul bordo superiore del foglio finché i segmenti MQ e NQ si incontrano, e questa è un’operazione illecita dal punto di vista della riga e del compasso).

Si può dimostrare che $\overline{AP}/\overline{PB} = \sqrt[3]{2}$.

I Greci hanno affrontato il problema della duplicazione del cubo trasformando il problema in un problema piano.

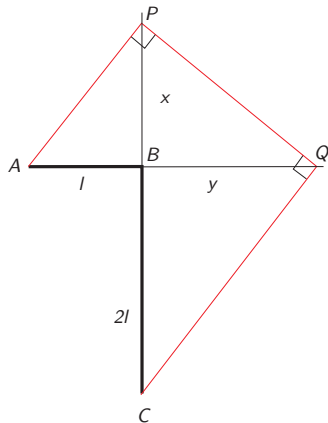
I Greci hanno affrontato il problema della duplicazione del cubo trasformando il problema in un problema piano.
Vediamo come, perché è facile.

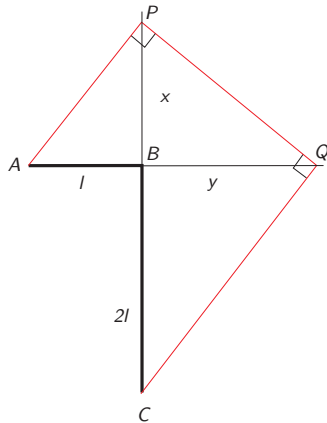
I Greci hanno affrontato il problema della duplicazione del cubo trasformando il problema in un problema piano.
Vediamo come, perché è facile. Prendiamo due segmenti perpendicolari di lunghezza l e $2l$:

I Greci hanno affrontato il problema della duplicazione del cubo trasformando il problema in un problema piano. Vediamo come, perché è facile. Prendiamo due segmenti perpendicolari di lunghezza l e $2l$:

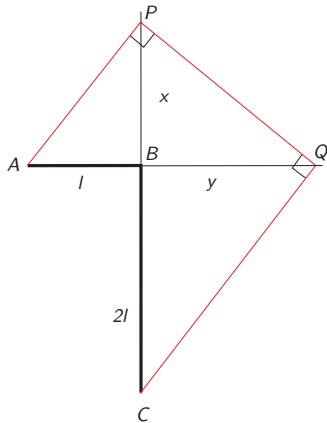


Supponiamo ora di essere in grado di trovare due punti P, Q come in figura, in modo che gli angoli $\widehat{APQ}$ e $\widehat{PQB}$ siano retti e P stia sul prolungamento di BC e Q su quello di AB , come in figura:



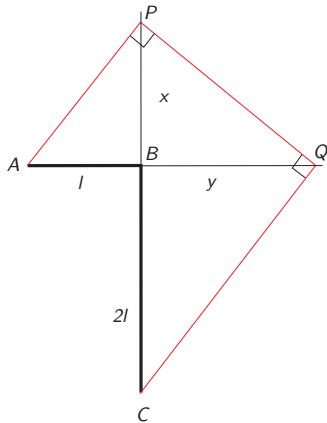


Allora per il secondo teorema di Euclide nel triangolo APQ



Allora per il secondo teorema di Euclide nel triangolo APQ

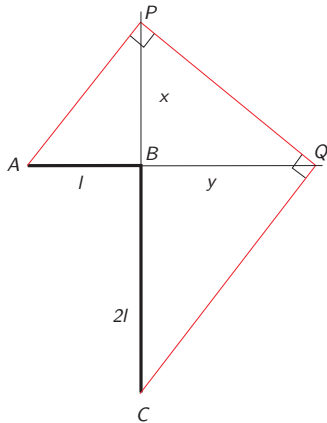
$$l : x = x : y \quad \text{cioè} \quad x^2 = ly$$



Allora per il secondo teorema di Euclide nel triangolo APQ

$$l : x = x : y \quad \text{cioè} \quad x^2 = ly$$

e per lo stesso motivo nel triangolo PQC ,



Allora per il secondo teorema di Euclide nel triangolo APQ

$$l : x = x : y \quad \text{cioè} \quad x^2 = ly$$

e per lo stesso motivo nel triangolo PQC ,

$$x : y = y : 2l \quad \text{cioè} \quad y^2 = 2lx$$

Quindi $y = x^2/l$ e sostituendo viene

Quindi $y = x^2/l$ e sostituendo viene

$$\frac{x^4}{l^2} = 2lx$$

Quindi $y = x^2/l$ e sostituendo viene

$$\frac{x^4}{l^2} = 2lx$$

da cui

Quindi $y = x^2/l$ e sostituendo viene

$$\frac{x^4}{l^2} = 2lx$$

da cui

$$x^4 = 2l^3x.$$

Quindi $y = x^2/l$ e sostituendo viene

$$\frac{x^4}{l^2} = 2lx$$

da cui

$$x^4 = 2l^3x.$$

Poiché $x \neq 0$, possiamo dividere per x e trovare

Quindi $y = x^2/l$ e sostituendo viene

$$\frac{x^4}{l^2} = 2lx$$

da cui

$$x^4 = 2l^3x.$$

Poiché $x \neq 0$, possiamo dividere per x e trovare

$$x^3 = 2l^3$$

Quindi $y = x^2/l$ e sostituendo viene

$$\frac{x^4}{l^2} = 2lx$$

da cui

$$x^4 = 2l^3x.$$

Poiché $x \neq 0$, possiamo dividere per x e trovare

$$x^3 = 2l^3$$

da cui $x = \sqrt[3]{2l}$.

Quindi $y = x^2/l$ e sostituendo viene

$$\frac{x^4}{l^2} = 2lx$$

da cui

$$x^4 = 2l^3x.$$

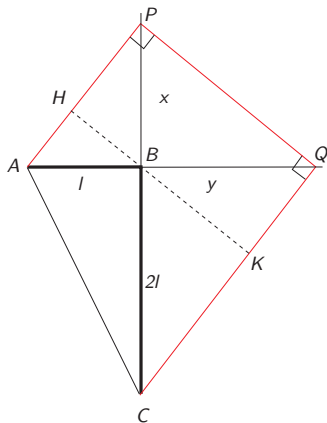
Poiché $x \neq 0$, possiamo dividere per x e trovare

$$x^3 = 2l^3$$

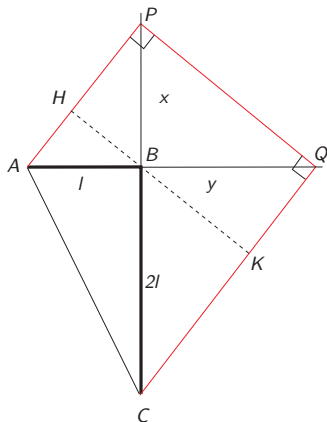
da cui $x = \sqrt[3]{2l}$. x è quindi il lato del cubo cercato.

Notate la somiglianza di questa costruzione con quella dell'origami:

Notate la somiglianza di questa costruzione con quella dell'origami:

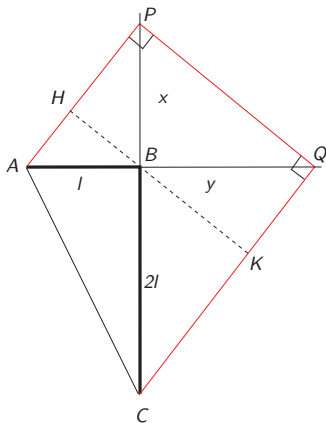


Notate la somiglianza di questa costruzione con quella dell'origami:



I triangoli ABP , PBQ , QBC sono tutti simili, per cui

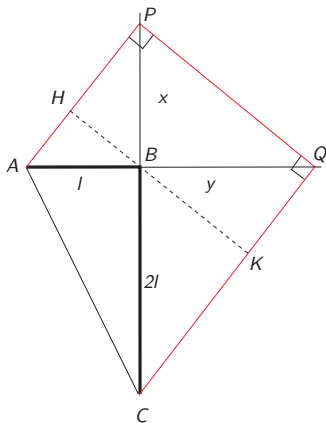
Notate la somiglianza di questa costruzione con quella dell'origami:



I triangoli ABP , PBQ , QBC sono tutti simili, per cui

$$\overline{BK} : \overline{BH} = \overline{BQ} : \overline{BP} = y : x.$$

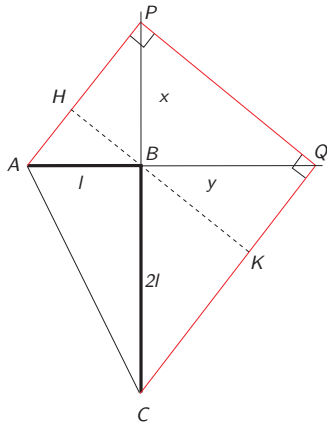
Notate la somiglianza di questa costruzione con quella dell'origami:



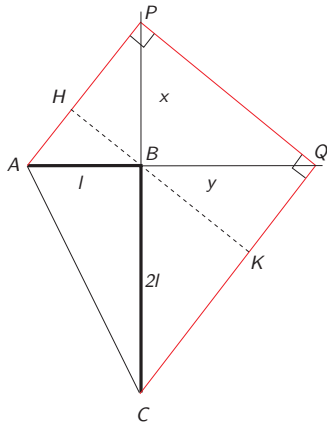
I triangoli ABP , PBQ , QBC sono tutti simili, per cui

$$\overline{BK} : \overline{BH} = \overline{BQ} : \overline{BP} = y : x.$$

Siccome, da quanto visto sopra, $x^2 = ly$, troviamo

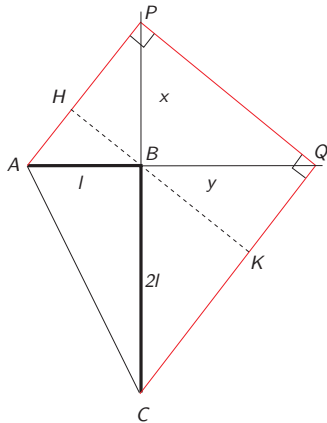


$$\frac{y}{x} = \frac{x}{l} = \sqrt[3]{2}$$



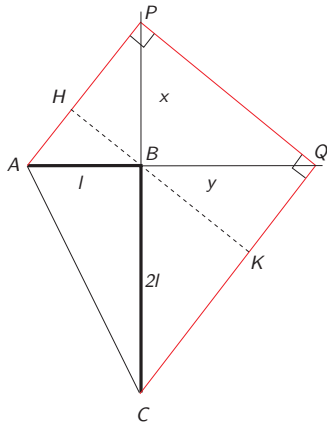
$$\frac{y}{x} = \frac{x}{l} = \sqrt[3]{2}$$

e quindi i due segmenti BK e BH hanno lo stesso rapporto che nella costruzione con l'origami.



$$\frac{y}{x} = \frac{x}{l} = \sqrt[3]{2}$$

e quindi i due segmenti BK e BH hanno lo stesso rapporto che nella costruzione con l'origami. Potete constatare per esercizio che $AB + AH = HK$,



$$\frac{y}{x} = \frac{x}{l} = \sqrt[3]{2}$$

e quindi i due segmenti BK e BH hanno lo stesso rapporto che nella costruzione con l'origami. Potete constatare per esercizio che $AB + AH = HK$, e cioè che la figura piegata $BCKH$ è effettivamente un quadrato.

La trisezione dell'angolo

Il problema della trisezione di un angolo è il successivo problema classico della Geometria.

La trisezione dell'angolo

Il problema della trisezione di un angolo è il successivo problema classico della Geometria.

Problema (trisezione dell'angolo)

Dato un angolo nel piano, costruirne uno di ampiezza pari a un terzo con riga e compasso.

La trisezione dell'angolo

Il problema della trisezione di un angolo è il successivo problema classico della Geometria.

Problema (trisezione dell'angolo)

Dato un angolo nel piano, costruirne uno di ampiezza pari a un terzo con riga e compasso.

Anche questo problema è impossibile.

La trisezione dell'angolo

Il problema della trisezione di un angolo è il successivo problema classico della Geometria.

Problema (trisezione dell'angolo)

Dato un angolo nel piano, costruirne uno di ampiezza pari a un terzo con riga e compasso.

Anche questo problema è impossibile. Si può dimostrare (ma per questo servono nozioni che studierete in Trigonometria) che questo problema conduce inevitabilmente all'equazione di terzo grado

La trisezione dell'angolo

Il problema della trisezione di un angolo è il successivo problema classico della Geometria.

Problema (trisezione dell'angolo)

Dato un angolo nel piano, costruirne uno di ampiezza pari a un terzo con riga e compasso.

Anche questo problema è impossibile. Si può dimostrare (ma per questo servono nozioni che studierete in Trigonometria) che questo problema conduce inevitabilmente all'equazione di terzo grado

$$4x^3 - 3x = k$$

La trisezione dell'angolo

Il problema della trisezione di un angolo è il successivo problema classico della Geometria.

Problema (trisezione dell'angolo)

Dato un angolo nel piano, costruirne uno di ampiezza pari a un terzo con riga e compasso.

Anche questo problema è impossibile. Si può dimostrare (ma per questo servono nozioni che studierete in Trigonometria) che questo problema conduce inevitabilmente all'equazione di terzo grado

$$4x^3 - 3x = k$$

dove k è legato all'angolo dato.

La trisezione dell'angolo

Il problema della trisezione di un angolo è il successivo problema classico della Geometria.

Problema (trisezione dell'angolo)

Dato un angolo nel piano, costruirne uno di ampiezza pari a un terzo con riga e compasso.

Anche questo problema è impossibile. Si può dimostrare (ma per questo servono nozioni che studierete in Trigonometria) che questo problema conduce inevitabilmente all'equazione di terzo grado

$$4x^3 - 3x = k$$

dove k è legato all'angolo dato.

Qui la situazione è un po' più complicata che nella duplicazione del cubo perché abbiamo una *famiglia* di equazioni,

Qui la situazione è un po' più complicata che nella duplicazione del cubo perché abbiamo una *famiglia* di equazioni, e alcune di esse di fatto sono risolubili senza l'aiuto di radici cubiche, il che (ma questo andrebbe dimostrato) permetterebbe di risolvere il problema con riga e compasso.

Qui la situazione è un po' più complicata che nella duplicazione del cubo perché abbiamo una *famiglia* di equazioni, e alcune di esse di fatto sono risolubili senza l'aiuto di radici cubiche, il che (ma questo andrebbe dimostrato) permetterebbe di risolvere il problema con riga e compasso. In effetti, certi angoli, come l'angolo retto e l'angolo piatto, sono "trisecabili" con riga e compasso, però in generale ciò non è possibile (per la maggior parte dei casi, anzi).

Qui la situazione è un po' più complicata che nella duplicazione del cubo perché abbiamo una *famiglia* di equazioni, e alcune di esse di fatto sono risolubili senza l'aiuto di radici cubiche, il che (ma questo andrebbe dimostrato) permetterebbe di risolvere il problema con riga e compasso. In effetti, certi angoli, come l'angolo retto e l'angolo piatto, sono "trisecabili" con riga e compasso, però in generale ciò non è possibile (per la maggior parte dei casi, anzi).

Anche in questo caso con l'origami è possibile risolvere il problema, anche se è un po' più difficile della costruzione della radice cubica di 2.

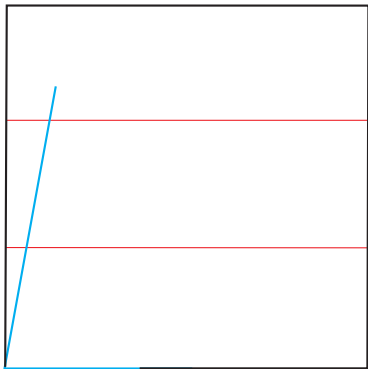
All'inizio abbiamo l'angolo da trisecare:

All'inizio abbiamo l'angolo da trisecare:



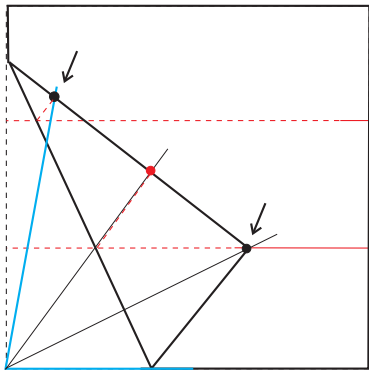
Adesso sovrapponiamo il quadrato con le tre linee (o pieghe, se vogliamo essere origamisti “ortodossi”)

Adesso sovrapponiamo il quadrato con le tre linee (o pieghe, se vogliamo essere origamisti “ortodossi”)



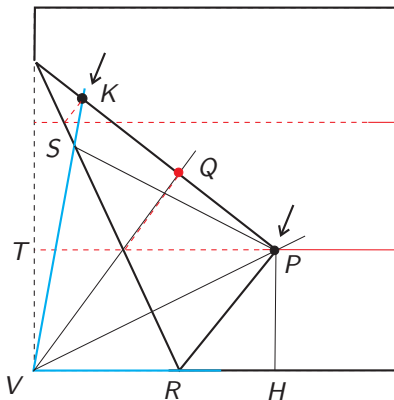
Adesso arriva il difficile: dobbiamo piegare in modo che uno degli estremi delle pieghe cada sul lato dell'angolo e il vertice del quadrato cada sull'altra piega...

Adesso arriva il difficile: dobbiamo piegare in modo che uno degli estremi delle pieghe cada sul lato dell'angolo e il vertice del quadrato cada sull'altra piega...



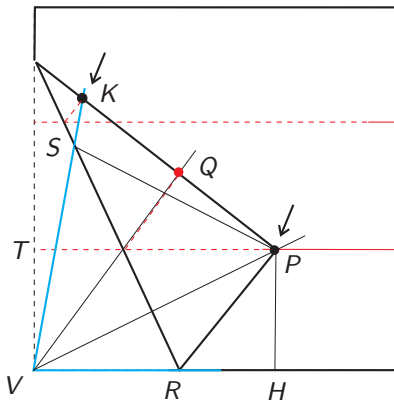
Vediamo ora che ce l'abbiamo fatta.

I tre angoli $\widehat{PVH}$, $\widehat{QVP}$, $\widehat{KVQ}$ sono congruenti.



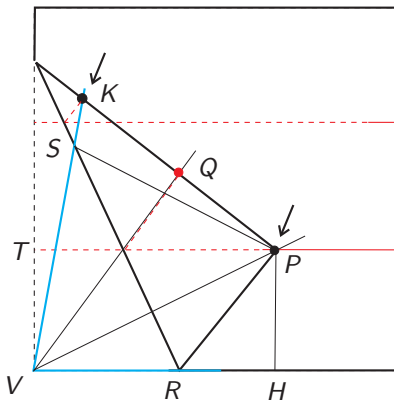
Infatti $VR \cong RP$ e $VS \cong PS$ quindi $\widehat{SVP} = \widehat{SPV}$.

I tre angoli $\widehat{PVH}$, $\widehat{QVP}$, $\widehat{KVQ}$ sono congruenti.



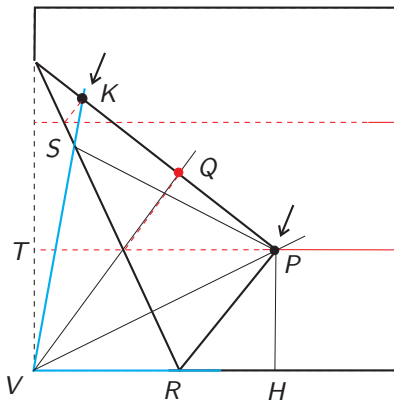
Però $\widehat{PVH} = \widehat{VPT} = \widehat{QVP} \dots$

I tre angoli $\widehat{PVH}$, $\widehat{QVP}$, $\widehat{KVQ}$ sono congruenti.



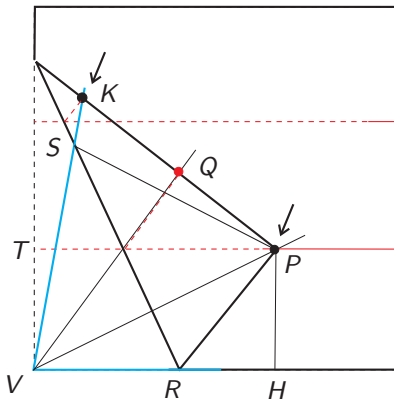
e siccome $KQ \cong QP$, il triangolo VKP è isoscele, e quindi $\widehat{SVQ} = \widehat{PVQ}$,

I tre angoli $\widehat{PVH}$, $\widehat{QVP}$, $\widehat{KVQ}$ sono congruenti.

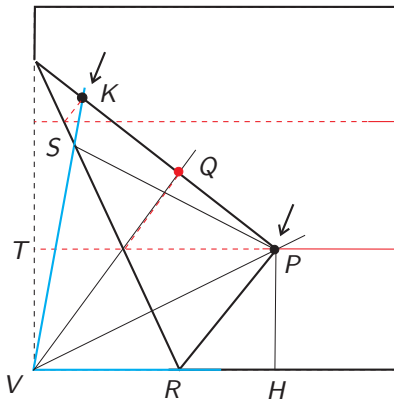


e quindi i tre angoli sono congruenti e $\widehat{PVH}$ è un terzo dell'angolo dato.

I tre angoli $\widehat{PVH}$, $\widehat{QVP}$, $\widehat{KVQ}$ sono congruenti.



I tre angoli $\widehat{PVH}$, $\widehat{QVP}$, $\widehat{KVQ}$ sono congruenti.



Per inciso, anche i triangoli VKQ , VQP , VPH sono rettangoli e congruenti.

La quadratura del cerchio

La quadratura del cerchio

Questo è l'ultimo e il più difficile dei problemi classici della Geometria.

La quadratura del cerchio

Questo è l'ultimo e il più difficile dei problemi classici della Geometria.

Problema (Quadratura del cerchio)

Dato un cerchio, costruire un quadrato equivalente con riga e compasso.

La quadratura del cerchio

Questo è l'ultimo e il più difficile dei problemi classici della Geometria.

Problema (Quadratura del cerchio)

Dato un cerchio, costruire un quadrato equivalente con riga e compasso.

Abbiamo risolto poco fa il problema della quadratura del rettangolo, ma questo problema è *molto* più difficile.

La quadratura del cerchio

Questo è l'ultimo e il più difficile dei problemi classici della Geometria.

Problema (Quadratura del cerchio)

Dato un cerchio, costruire un quadrato equivalente con riga e compasso.

Abbiamo risolto poco fa il problema della quadratura del rettangolo, ma questo problema è *molto* più difficile.

Vediamo cosa dice l'algebra.

La quadratura del cerchio

Questo è l'ultimo e il più difficile dei problemi classici della Geometria.

Problema (Quadratura del cerchio)

Dato un cerchio, costruire un quadrato equivalente con riga e compasso.

Abbiamo risolto poco fa il problema della quadratura del rettangolo, ma questo problema è *molto* più difficile.

Vediamo cosa dice l'algebra.

Siccome l'area del cerchio di raggio r è πr^2 , se indichiamo con x il lato incognito del quadrato risulta

La quadratura del cerchio

Questo è l'ultimo e il più difficile dei problemi classici della Geometria.

Problema (Quadratura del cerchio)

Dato un cerchio, costruire un quadrato equivalente con riga e compasso.

Abbiamo risolto poco fa il problema della quadratura del rettangolo, ma questo problema è *molto* più difficile.

Vediamo cosa dice l'algebra.

Siccome l'area del cerchio di raggio r è πr^2 , se indichiamo con x il lato incognito del quadrato risulta

$$x^2 = \pi r^2$$

La quadratura del cerchio

Questo è l'ultimo e il più difficile dei problemi classici della Geometria.

Problema (Quadratura del cerchio)

Dato un cerchio, costruire un quadrato equivalente con riga e compasso.

Abbiamo risolto poco fa il problema della quadratura del rettangolo, ma questo problema è *molto* più difficile.

Vediamo cosa dice l'algebra.

Siccome l'area del cerchio di raggio r è πr^2 , se indichiamo con x il lato incognito del quadrato risulta

$$x^2 = \pi r^2$$

e dunque $x = r\sqrt{\pi}$.

La quadratura del cerchio

Questo è l'ultimo e il più difficile dei problemi classici della Geometria.

Problema (Quadratura del cerchio)

Dato un cerchio, costruire un quadrato equivalente con riga e compasso.

Abbiamo risolto poco fa il problema della quadratura del rettangolo, ma questo problema è *molto* più difficile.

Vediamo cosa dice l'algebra.

Siccome l'area del cerchio di raggio r è πr^2 , se indichiamo con x il lato incognito del quadrato risulta

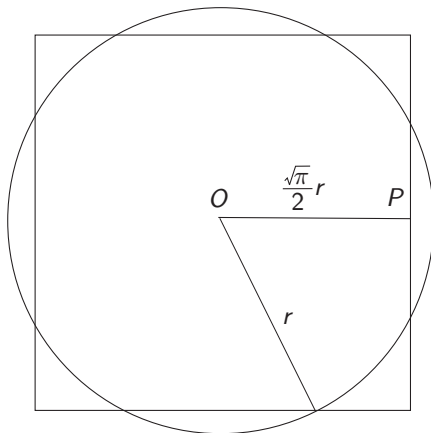
$$x^2 = \pi r^2$$

e dunque $x = r\sqrt{\pi}$.

Il problema della quadratura del cerchio ha una lunga storia, che potrebbe riempire un'intera lezione. Qui ci limiteremo ai cenni più importanti.

Naturalmente, anche qui il problema è costruire il punto x distante $r\sqrt{\pi}/2$ dal centro, ovviamente con riga e compasso:

Naturalmente, anche qui il problema è costruire il punto x distante $r\sqrt{\pi}/2$ dal centro, ovviamente con riga e compasso:



Anche questo problema è impossibile.

Anche questo problema è impossibile. Ma qui la situazione è ben diversa dai due casi precedenti, perché il valore $\sqrt{\pi}$ (o la sua metà) non è nemmeno soluzione di un'equazione di terzo, quarto o quinto grado.

Anche questo problema è impossibile. Ma qui la situazione è ben diversa dai due casi precedenti, perché il valore $\sqrt{\pi}$ (o la sua metà) non è nemmeno soluzione di un'equazione di terzo, quarto o quinto grado. Nel 1768 Lambert dimostrò che π è irrazionale.

Anche questo problema è impossibile. Ma qui la situazione è ben diversa dai due casi precedenti, perché il valore $\sqrt{\pi}$ (o la sua metà) non è nemmeno soluzione di un'equazione di terzo, quarto o quinto grado. Nel 1768 Lambert dimostrò che π è irrazionale. Vediamo allora che anche $\sqrt{\pi}$ è irrazionale.

Anche questo problema è impossibile. Ma qui la situazione è ben diversa dai due casi precedenti, perché il valore $\sqrt{\pi}$ (o la sua metà) non è nemmeno soluzione di un'equazione di terzo, quarto o quinto grado. Nel 1768 Lambert dimostrò che π è irrazionale. Vediamo allora che anche $\sqrt{\pi}$ è irrazionale. Se per assurdo avessimo

Anche questo problema è impossibile. Ma qui la situazione è ben diversa dai due casi precedenti, perché il valore $\sqrt{\pi}$ (o la sua metà) non è nemmeno soluzione di un'equazione di terzo, quarto o quinto grado. Nel 1768 Lambert dimostrò che π è irrazionale. Vediamo allora che anche $\sqrt{\pi}$ è irrazionale. Se per assurdo avessimo

$$\sqrt{\pi} = \frac{m}{n}$$

Anche questo problema è impossibile. Ma qui la situazione è ben diversa dai due casi precedenti, perché il valore $\sqrt{\pi}$ (o la sua metà) non è nemmeno soluzione di un'equazione di terzo, quarto o quinto grado. Nel 1768 Lambert dimostrò che π è irrazionale. Vediamo allora che anche $\sqrt{\pi}$ è irrazionale. Se per assurdo avessimo

$$\sqrt{\pi} = \frac{m}{n}$$

con m, n interi primi tra loro, allora

Anche questo problema è impossibile. Ma qui la situazione è ben diversa dai due casi precedenti, perché il valore $\sqrt{\pi}$ (o la sua metà) non è nemmeno soluzione di un'equazione di terzo, quarto o quinto grado. Nel 1768 Lambert dimostrò che π è irrazionale. Vediamo allora che anche $\sqrt{\pi}$ è irrazionale. Se per assurdo avessimo

$$\sqrt{\pi} = \frac{m}{n}$$

con m, n interi primi tra loro, allora

$$\pi = \frac{m^2}{n^2}$$

Anche questo problema è impossibile. Ma qui la situazione è ben diversa dai due casi precedenti, perché il valore $\sqrt{\pi}$ (o la sua metà) non è nemmeno soluzione di un'equazione di terzo, quarto o quinto grado. Nel 1768 Lambert dimostrò che π è irrazionale. Vediamo allora che anche $\sqrt{\pi}$ è irrazionale. Se per assurdo avessimo

$$\sqrt{\pi} = \frac{m}{n}$$

con m, n interi primi tra loro, allora

$$\pi = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi π sarebbe razionale, contro quanto dimostrato da Lambert.

Ma questo non era sufficiente:

Ma questo non era sufficiente: $\sqrt{2}$ è irrazionale,

Ma questo non era sufficiente: $\sqrt{2}$ è irrazionale, però è costruibile con riga e compasso (l'abbiamo fatto con la duplicazione del quadrato).

Ma questo non era sufficiente: $\sqrt{2}$ è irrazionale, però è costruibile con riga e compasso (l'abbiamo fatto con la duplicazione del quadrato). Allora si pensò che π fosse soluzione di un'equazione cubica, come per $\sqrt[3]{2}$, ma non si riuscì a provarlo (e infatti è falso).

Ma questo non era sufficiente: $\sqrt{2}$ è irrazionale, però è costruibile con riga e compasso (l'abbiamo fatto con la duplicazione del quadrato). Allora si pensò che π fosse soluzione di un'equazione cubica, come per $\sqrt[3]{2}$, ma non si riuscì a provarlo (e infatti è falso). Infatti, solo nel 1882 Von Lindemann dimostrò che *non esiste nessuna equazione a coefficienti interi della quale π sia soluzione.*

Ma questo non era sufficiente: $\sqrt{2}$ è irrazionale, però è costruibile con riga e compasso (l'abbiamo fatto con la duplicazione del quadrato). Allora si pensò che π fosse soluzione di un'equazione cubica, come per $\sqrt[3]{2}$, ma non si riuscì a provarlo (e infatti è falso). Infatti, solo nel 1882 Von Lindemann dimostrò che *non esiste nessuna equazione a coefficienti interi della quale π sia soluzione*. Questo si esprime dicendo che π è **trascendente**.

Ma questo non era sufficiente: $\sqrt{2}$ è irrazionale, però è costruibile con riga e compasso (l'abbiamo fatto con la duplicazione del quadrato).

Allora si pensò che π fosse soluzione di un'equazione cubica, come per $\sqrt[3]{2}$, ma non si riuscì a provarlo (e infatti è falso).

Infatti, solo nel 1882 Von Lindemann dimostrò che *non esiste nessuna equazione a coefficienti interi della quale π sia soluzione*. Questo si esprime dicendo che π è **trascendente**.

Contestualmente, siccome le costruzioni con riga e compasso risolvevano solo equazioni di primo e secondo grado, era dimostrato che non si poteva quadrare il cerchio con riga e compasso.

Naturalmente i Greci avevano ovviato al problema usando altri strumenti, come ad esempio particolari curve.

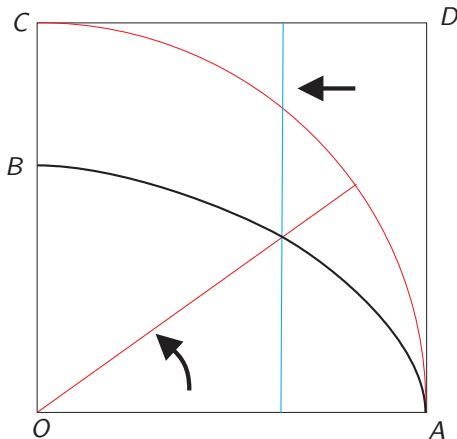
Naturalmente i Greci avevano ovviato al problema usando altri strumenti, come ad esempio particolari curve. Una di queste, la *quadratrice di Ippia*, è diventata abbastanza famosa.

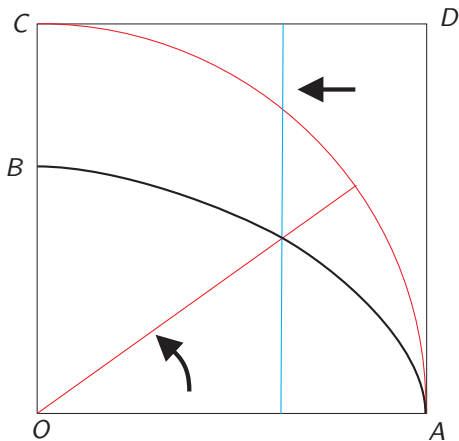
Naturalmente i Greci avevano ovviato al problema usando altri strumenti, come ad esempio particolari curve. Una di queste, la *quadratrice di Ippia*, è diventata abbastanza famosa.

Per costruirla, bisogna immaginare un raggio di un quarto di circonferenza che si muove assieme a un lato verticale del quadrato nel quale è inscritta:

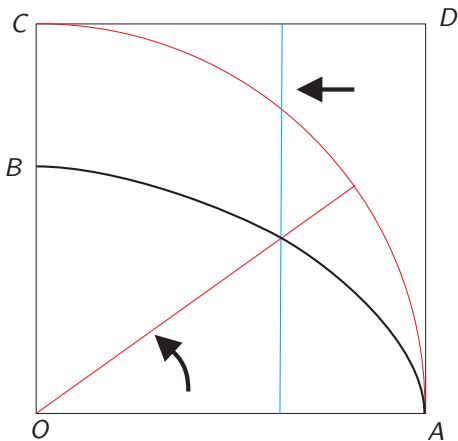
Naturalmente i Greci avevano ovviato al problema usando altri strumenti, come ad esempio particolari curve. Una di queste, la *quadratrice di Ippia*, è diventata abbastanza famosa.

Per costruirla, bisogna immaginare un raggio di un quarto di circonferenza che si muove assieme a un lato verticale del quadrato nel quale è inscritta:



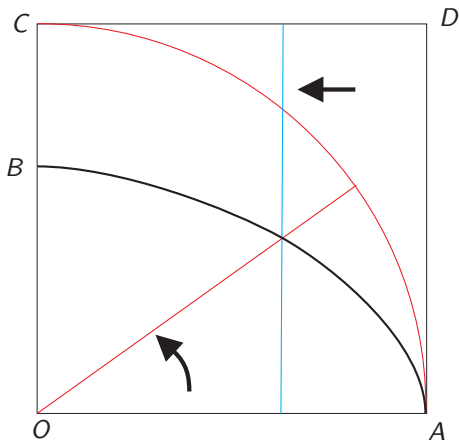


Il segmento blu parte dalla posizione AD e il raggio rosso dalla posizione OA .



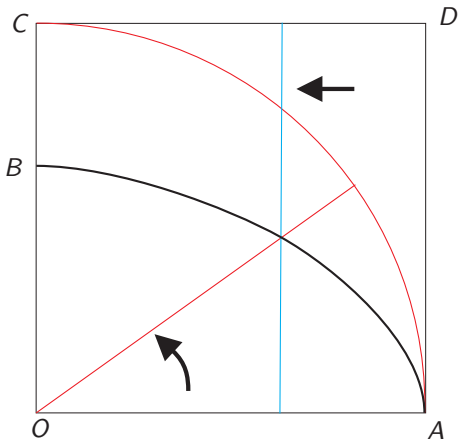
Il segmento blu parte dalla posizione AD e il raggio rosso dalla posizione OA .

Entrambi si muovono in modo uniforme, arrivando assieme alla posizione comune OC .

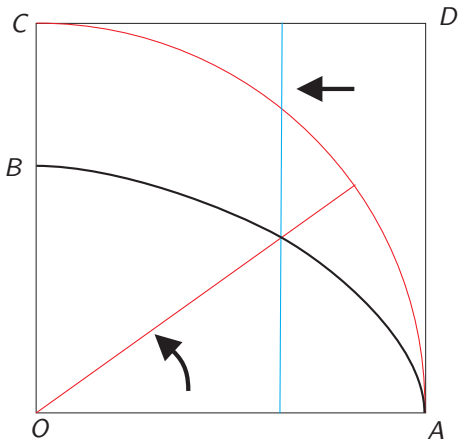


Il segmento blu parte dalla posizione AD e il raggio rosso dalla posizione OA .

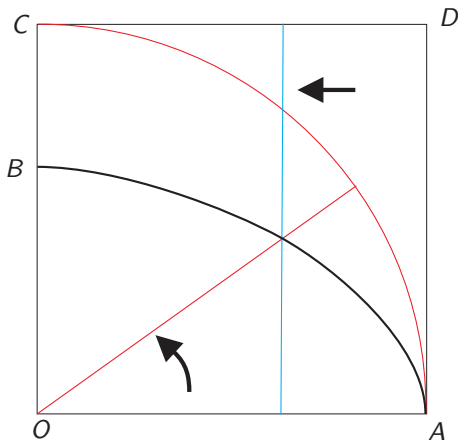
Entrambi si muovono in modo uniforme, arrivando assieme alla posizione comune OC . I punti della quadratrice sono quelli di intersezione fra il raggio e il segmento durante il loro movimento.



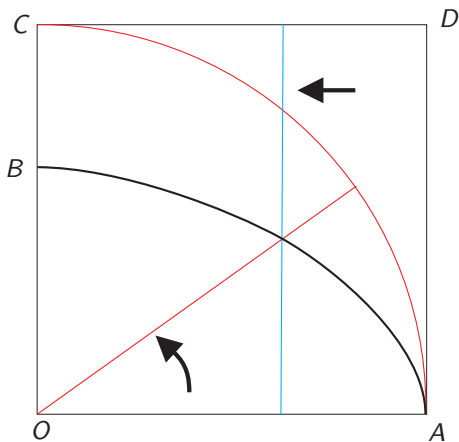
Il matematico Ippia di Elide scoprì questa curva nel 420 a.C. circa, mentre circa 100 anni dopo, nel 335 a.C. un altro matematico greco, Dinostrato, dimostrò che



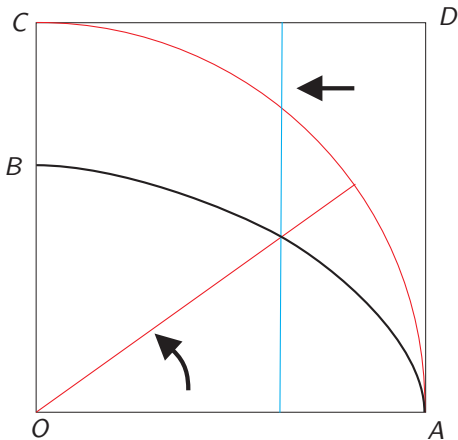
Il matematico Ippia di Elide scoprì questa curva nel 420 a.C. circa, mentre circa 100 anni dopo, nel 335 a.C. un altro matematico greco, Dinostrato, dimostrò che $\overline{OB} : \overline{OA} = \overline{OA} : \widehat{AC}$



Il matematico Ippia di Elide scoprì questa curva nel 420 a.C. circa, mentre circa 100 anni dopo, nel 335 a.C. un altro matematico greco, Dinostrato, dimostrò che $\overline{OB} : \overline{OA} = \overline{OA} : \widehat{AC}$ dove $\widehat{AC}$ indica la lunghezza dell'arco AC.

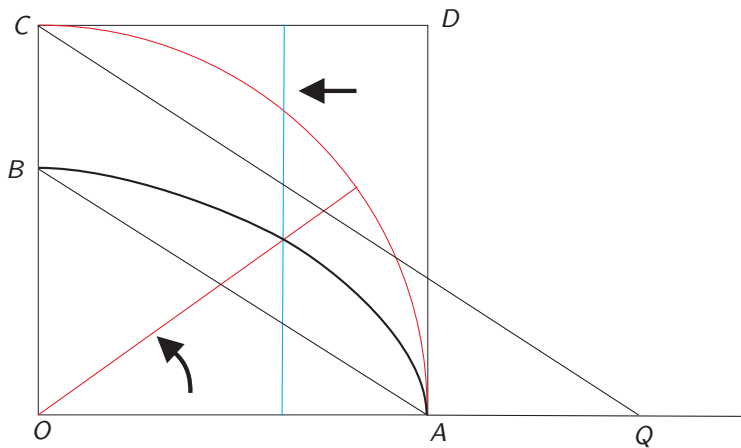


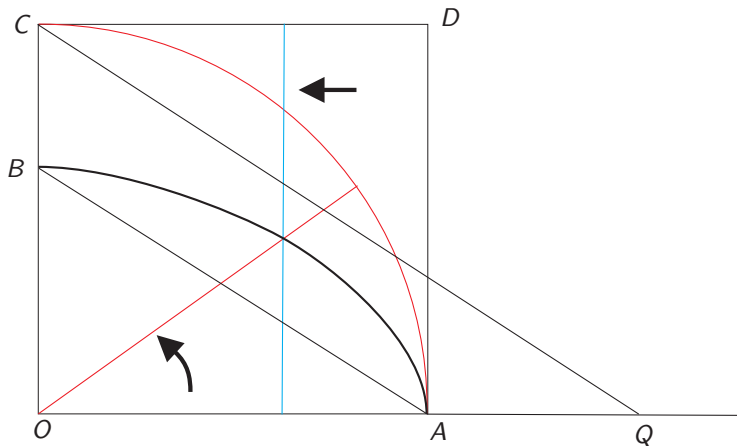
$$\overline{OB} : \overline{OA} = \overline{OA} : \widehat{AC}$$



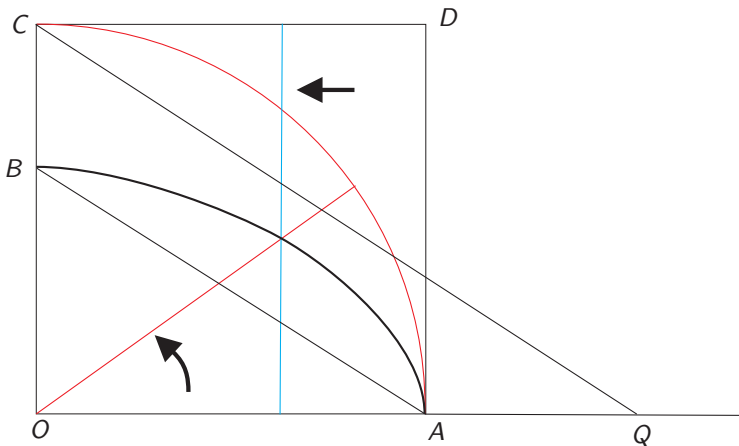
$$\overline{OB} : \overline{OA} = \overline{OA} : \widehat{AC}$$

Da qui segue che, supponendo $\overline{OA} = 1$, che $\overline{OB} = 2/\pi$.



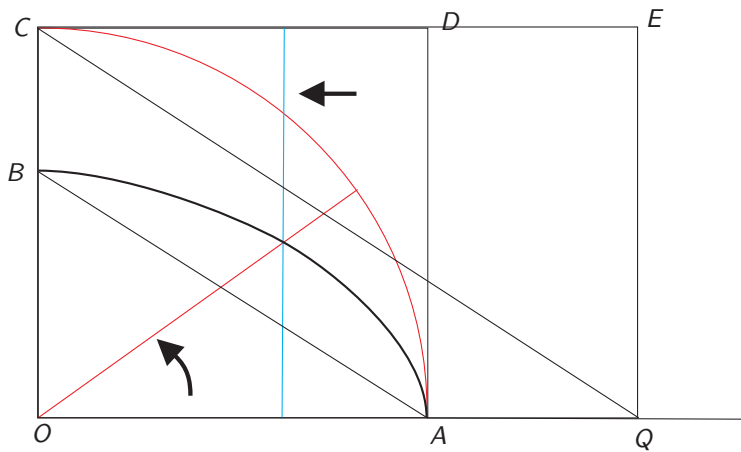


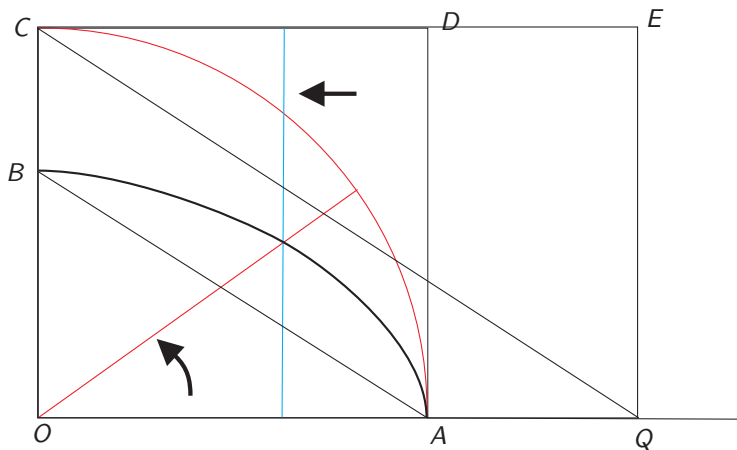
Se ora tracciamo il segmento AB e la sua parallela da C fino a incontrare in Q il prolungamento di OA , avremo che



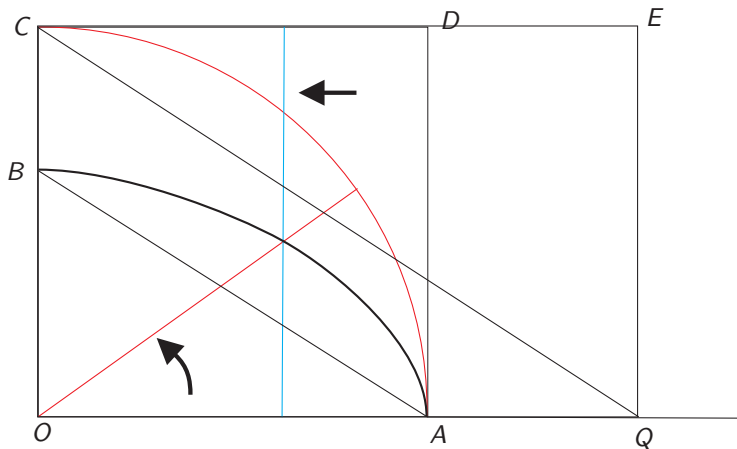
Se ora tracciamo il segmento AB e la sua parallela da C fino a incontrare in Q il prolungamento di OA , avremo che

$$\overline{OB} : \overline{OA} = \overline{OC} : \overline{OQ}.$$

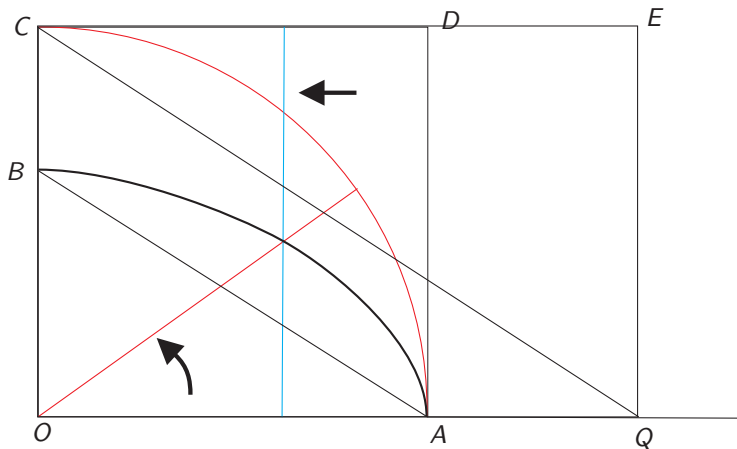




Quindi, siccome $\overline{OB} = 2/\pi$, $\overline{OA} = \overline{OC} = 1$, abbiamo $\overline{OQ} = \pi/2$.



Quindi, siccome $\overline{OB} = 2/\pi$, $\overline{OA} = \overline{OC} = 1$, abbiamo $\overline{OQ} = \pi/2$. Quindi il rettangolo $OQEC$ ha area $\pi/2$, cioè la metà dell'area del cerchio di centro O e raggio OA .



A questo punto basta raddoppiare il rettangolo e usando la quadratura del rettangolo si trova un quadrato equivalente al cerchio di centro O e raggio OA .

Naturalmente l'inghippo sta nel fatto che la quadratrice di Ippia, e in particolare il punto B , *non* è costruibile con riga e compasso.

Naturalmente l'inghippo sta nel fatto che la quadratrice di Ippia, e in particolare il punto B , *non* è costruibile con riga e compasso.

È stato anche dimostrato che nemmeno con l'origami si riesce a quadrare il cerchio (infatti si possono risolvere equazioni di terzo e quarto grado ma non più).

Costruzioni con il solo compasso

Costruzioni con il solo compasso

Anche se con riga e compasso non si può fare tutto, certamente si può fare molto.

Costruzioni con il solo compasso

Anche se con riga e compasso non si può fare tutto, certamente si può fare molto.

Una domanda che sorge spontanea è allora: *cosa si può fare col solo compasso?*

Costruzioni con il solo compasso

Anche se con riga e compasso non si può fare tutto, certamente si può fare molto.

Una domanda che sorge spontanea è allora: *cosa si può fare col solo compasso?*

La risposta a questa domanda è stata data.

Costruzioni con il solo compasso

Anche se con riga e compasso non si può fare tutto, certamente si può fare molto.

Una domanda che sorge spontanea è allora: *cosa si può fare col solo compasso?*

La risposta a questa domanda è stata data.

Teorema (di Mohr-Mascheroni)

Se una costruzione è possibile con riga e compasso, allora è anche possibile con il solo compasso.

Costruzioni con il solo compasso

Anche se con riga e compasso non si può fare tutto, certamente si può fare molto.

Una domanda che sorge spontanea è allora: *cosa si può fare col solo compasso?*

La risposta a questa domanda è stata data.

Teorema (di Mohr-Mascheroni)

Se una costruzione è possibile con riga e compasso, allora è anche possibile con il solo compasso.

Naturalmente la costruzione sarà diversa, e in generale *molto* più complicata, ma è possibile.

Pensate che anche con la sola riga si può fare tutto, a patto di avere *una* circonferenza tracciata con il suo centro. È il teorema di Steiner-Poncelet:

Pensate che anche con la sola riga si può fare tutto, a patto di avere *una* circonferenza tracciata con il suo centro. È il teorema di Steiner-Poncelet:

Teorema (di Steiner-Poncelet)

Se in un piano è data una circonferenza con il suo centro, allora se una costruzione è possibile con riga e compasso, allora è anche possibile con la sola riga.

Pensate che anche con la sola riga si può fare tutto, a patto di avere *una* circonferenza tracciata con il suo centro. È il teorema di Steiner-Poncelet:

Teorema (di Steiner-Poncelet)

Se in un piano è data una circonferenza con il suo centro, allora se una costruzione è possibile con riga e compasso, allora è anche possibile con la sola riga.

Connessi ai problemi classici della Geometria vi è il problema della costruzione dei poligoni regolari.

Pensate che anche con la sola riga si può fare tutto, a patto di avere *una* circonferenza tracciata con il suo centro. È il teorema di Steiner-Poncelet:

Teorema (di Steiner-Poncelet)

Se in un piano è data una circonferenza con il suo centro, allora se una costruzione è possibile con riga e compasso, allora è anche possibile con la sola riga.

Connessi ai problemi classici della Geometria vi è il problema della costruzione dei poligoni regolari. Ma questo sarà l'argomento di un'altra lezione.