

Poligoni

Alfredo Marzocchi

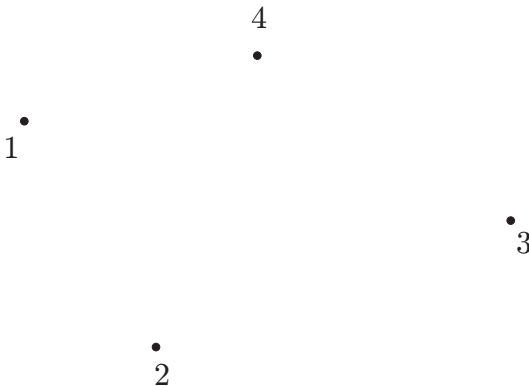
Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

- 1 Definizione
- 2 Angoli di un poligono
- 3 Area e perimetro di un poligono
- 4 Poligoni regolari
- 5 Area di un poligono regolare
- 6 Area di un poligono regolare
- 7 Area di un poligono regolare

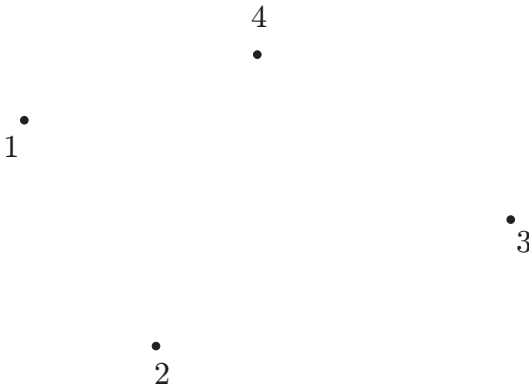
Immaginiamo di avere nel piano un numero finito di punti distinti e di averli *ordinati*,

Immaginiamo di avere nel piano un numero finito di punti distinti e di averli *ordinati*, per cui sapremo qual è il primo, il secondo, ecc., e l'ultimo:

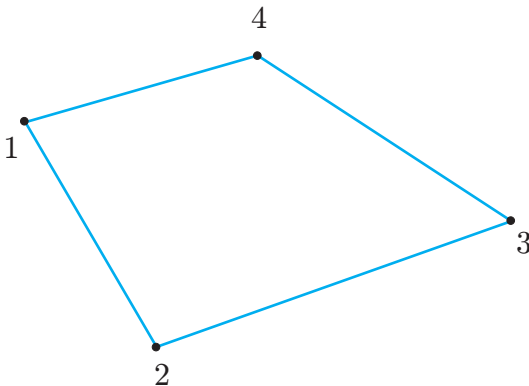
Immaginiamo di avere nel piano un numero finito di punti distinti e di averli *ordinati*, per cui sapremo qual è il primo, il secondo, ecc., e l'ultimo:



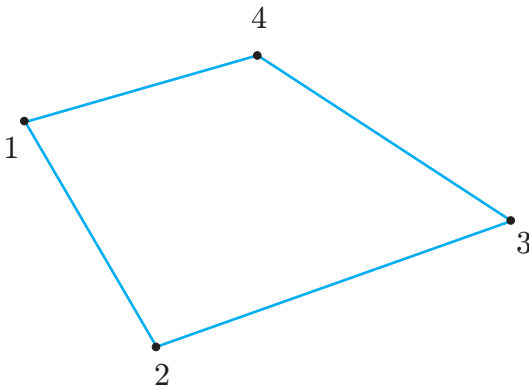
Adesso immaginiamo di congiungere i punti con dei segmenti rispettando l'ordine, e congiungendo anche l'ultimo col primo:



Adesso immaginiamo di congiungere i punti con dei segmenti rispettando l'ordine, e congiungendo anche l'ultimo col primo:



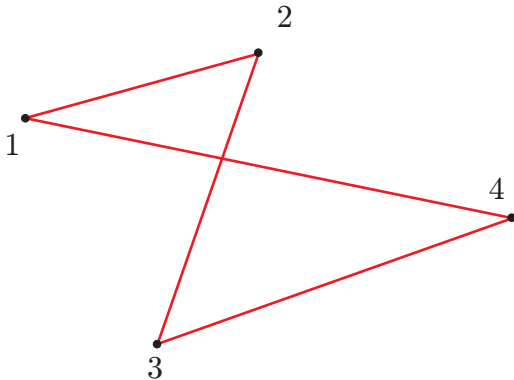
Abbiamo ottenuto un **poligono**:



L'ordine dei punti può essere fondamentale:

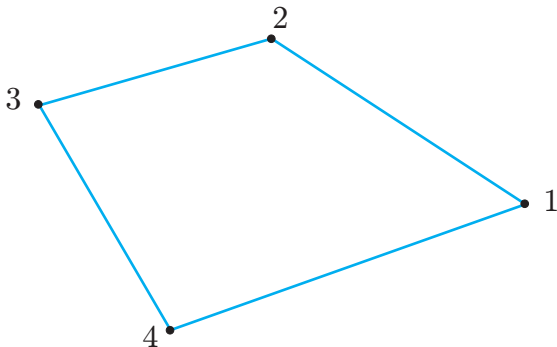
L'ordine dei punti può essere fondamentale: se si cambia l'ordine dei punti cambia completamente il poligono:

L'ordine dei punti può essere fondamentale: se si cambia l'ordine dei punti cambia completamente il poligono:

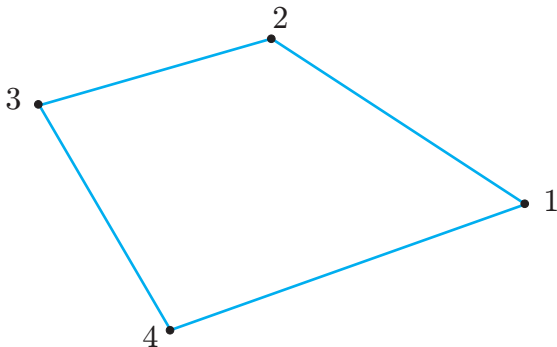


Altre volte, invece, se si cambia l'ordine dei punti, il poligono non cambia:

Altre volte, invece, se si cambia l'ordine dei punti, il poligono non cambia:

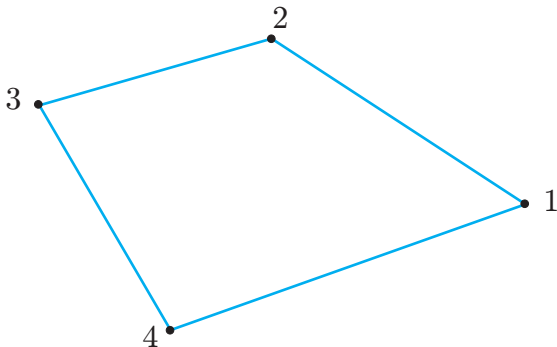


Altre volte, invece, se si cambia l'ordine dei punti, il poligono non cambia:



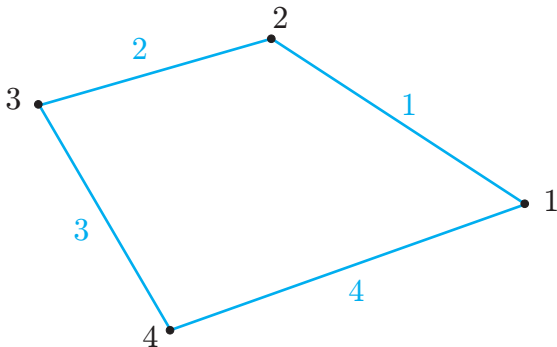
Osserviamo poi che i punti sono tanti quanti i segmenti, comunque si vogliano mettere in ordine i punti:

Altre volte, invece, se si cambia l'ordine dei punti, il poligono non cambia:



Osserviamo poi che i punti sono tanti quanti i segmenti, comunque si vogliano mettere in ordine i punti: nel nostro esempio sempre quattro.

Altre volte, invece, se si cambia l'ordine dei punti, il poligono non cambia:



Osserviamo poi che i punti sono tanti quanti i segmenti, comunque si vogliano mettere in ordine i punti: nel nostro esempio sempre quattro.

Possiamo allora dire che

Possiamo allora dire che

Definizione

Un poligono è individuato dai segmenti che congiungono, secondo l'ordine, un gruppo ordinato di punti.

Possiamo allora dire che

Definizione

Un poligono è individuato dai segmenti che congiungono, secondo l'ordine, un gruppo ordinato di punti.

In questo modo, se i punti cambiano l'ordine ma i segmenti non cambiano, il poligono è sempre lo stesso.

Possiamo allora dire che

Definizione

Un poligono è individuato dai segmenti che congiungono, secondo l'ordine, un gruppo ordinato di punti.

In questo modo, se i punti cambiano l'ordine ma i segmenti non cambiano, il poligono è sempre lo stesso.

I punti della definizione si chiamano *vertici*, mentre i segmenti si chiamano *lati*.

Possiamo allora dire che

Definizione

Un poligono è individuato dai segmenti che congiungono, secondo l'ordine, un gruppo ordinato di punti.

In questo modo, se i punti cambiano l'ordine ma i segmenti non cambiano, il poligono è sempre lo stesso.

I punti della definizione si chiamano *vertici*, mentre i segmenti si chiamano *lati*.

Dato poi un poligono, l'ordine dei punti individua sui lati un *orientamento*:

Possiamo allora dire che

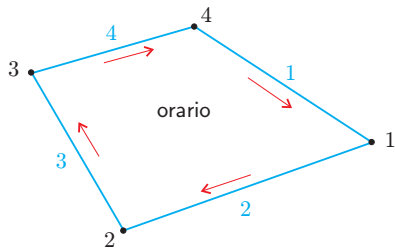
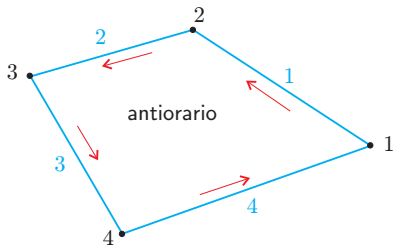
Definizione

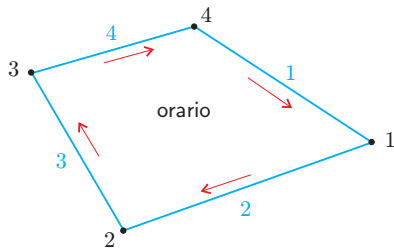
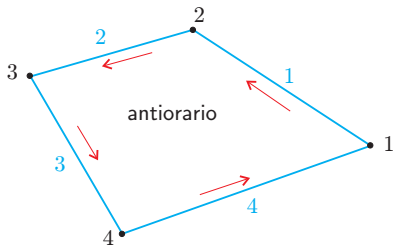
Un poligono è individuato dai segmenti che congiungono, secondo l'ordine, un gruppo ordinato di punti.

In questo modo, se i punti cambiano l'ordine ma i segmenti non cambiano, il poligono è sempre lo stesso.

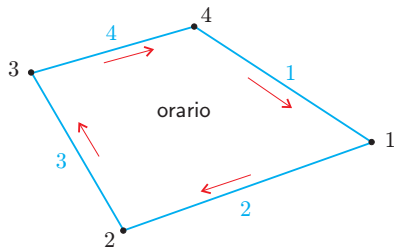
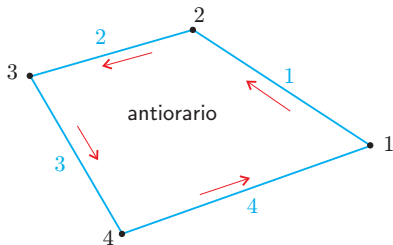
I punti della definizione si chiamano *vertici*, mentre i segmenti si chiamano *lati*.

Dato poi un poligono, l'ordine dei punti individua sui lati un *orientamento*: si può dimostrare che ve ne sono solo due, quello *orario* e quello *antiorario*.





In ogni caso, la nostra definizione non 'risente' dell'orientamento, ma in certi casi può essere interessante tenerne conto.

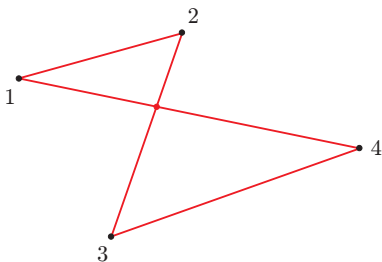


In ogni caso, la nostra definizione non 'risente' dell'orientamento, ma in certi casi può essere interessante tenerne conto.
Vediamo adesso di concentrarci ancora di più sul concetto che vogliamo.

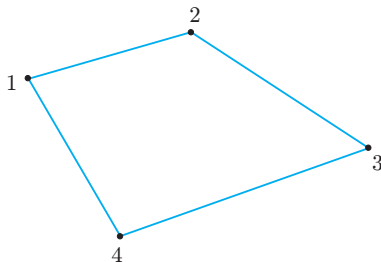
Se due lati di un poligono si intersecano, diremo che il poligono è *intrecciato*. (Con “intersecano” intendiamo che hanno un punto in comune diverso dagli estremi).

Se due lati di un poligono si intersecano, diremo che il poligono è *intrecciato*. (Con “intersecano” intendiamo che hanno un punto in comune diverso dagli estremi). Ecco due casi possibili con i nostri quattro punti:

Se due lati di un poligono si intersecano, diremo che il poligono è *intrecciato*. (Con “intersecano” intendiamo che hanno un punto in comune diverso dagli estremi). Ecco due casi possibili con i nostri quattro punti:



intrecciato



non intrecciato

Nel seguito escluderemo dal nostro studio tutti i poligoni intrecciati, e diremo semplicemente “poligono” intendendo “poligono non intrecciato”.

Nel seguito escluderemo dal nostro studio tutti i poligoni intrecciati, e diremo semplicemente “poligono” intendendo “poligono non intrecciato”. Osserviamo ora che

Nel seguito escluderemo dal nostro studio tutti i poligoni intrecciati, e diremo semplicemente “poligono” intendendo “poligono non intrecciato”. Osserviamo ora che

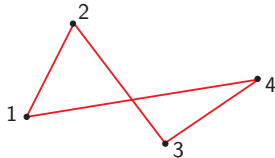
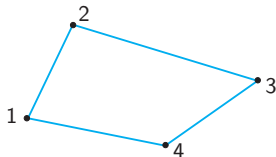
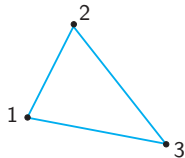
- 1 Due vertici individuano solo un poligono intrecciato (di fatto i due lati sono sovrapposti)

Nel seguito escluderemo dal nostro studio tutti i poligoni intrecciati, e diremo semplicemente “poligono” intendendo “poligono non intrecciato”. Osserviamo ora che

- 1 Due vertici individuano solo un poligono intrecciato (di fatto i due lati sono sovrapposti)
- 2 Tre vertici individuano solo un poligono non intrecciato: il **triangolo**.

Nel seguito escluderemo dal nostro studio tutti i poligoni intrecciati, e diremo semplicemente “poligono” intendendo “poligono non intrecciato”. Osserviamo ora che

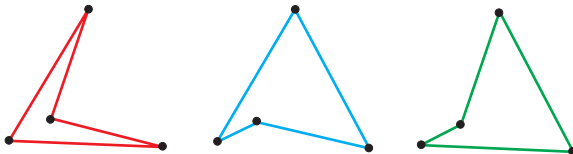
- 1 Due vertici individuano solo un poligono intrecciato (di fatto i due lati sono sovrapposti)
- 2 Tre vertici individuano solo un poligono non intrecciato: il **triangolo**.



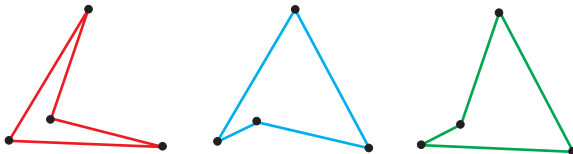
Già con quattro vertici compare la possibilità di poligoni intrecciati.

Già con quattro vertici compare la possibilità di poligoni intrecciati. Ma non solo: con quattro vertici si possono anche avere poligoni non intrecciati diversi, per cui la situazione si fa più difficile:

Già con quattro vertici compare la possibilità di poligoni intrecciati. Ma non solo: con quattro vertici si possono anche avere poligoni non intrecciati diversi, per cui la situazione si fa più difficile:



Già con quattro vertici compare la possibilità di poligoni intrecciati. Ma non solo: con quattro vertici si possono anche avere poligoni non intrecciati diversi, per cui la situazione si fa più difficile:



(Potete verificare che la posizione dei punti è sempre la stessa)

Prendiamo ora un poligono (non intrecciato, lo diciamo per l'ultima volta).

Prendiamo ora un poligono (non intrecciato, lo diciamo per l'ultima volta). Come abbiamo detto, sui suoi lati sono possibili due orientamenti, quello *orario* e quello *antiorario*.

Prendiamo ora un poligono (non intrecciato, lo diciamo per l'ultima volta). Come abbiamo detto, sui suoi lati sono possibili due orientamenti, quello *orario* e quello *antiorario*.

Immaginiamo ora di percorrere i lati del poligono secondo l'orientamento dato, come se fossimo su un autodromo (con delle curve un po' "secche").

Prendiamo ora un poligono (non intrecciato, lo diciamo per l'ultima volta). Come abbiamo detto, sui suoi lati sono possibili due orientamenti, quello *orario* e quello *antiorario*.

Immaginiamo ora di percorrere i lati del poligono secondo l'orientamento dato, come se fossimo su un autodromo (con delle curve un po' "secche").

Se l'orientamento è *antiorario*, chiamiamo **punti interni** al poligono i punti che si trovano *a sinistra* di tutti i lati,

Prendiamo ora un poligono (non intrecciato, lo diciamo per l'ultima volta). Come abbiamo detto, sui suoi lati sono possibili due orientamenti, quello *orario* e quello *antiorario*.

Immaginiamo ora di percorrere i lati del poligono secondo l'orientamento dato, come se fossimo su un autodromo (con delle curve un po' "secche").

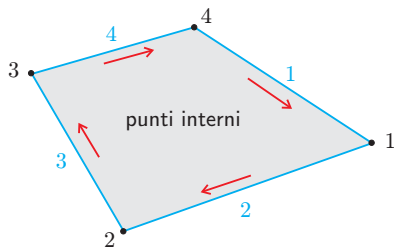
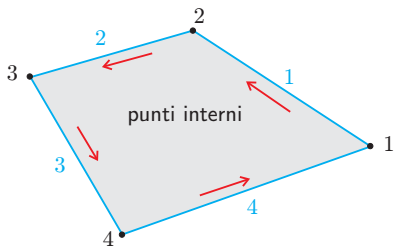
Se l'orientamento è *antiorario*, chiamiamo **punti interni** al poligono i punti che si trovano *a sinistra* di tutti i lati, mentre, se l'orientamento è orario, quelli che si trovano *a destra* di tutti i lati.

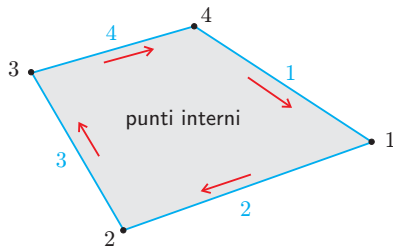
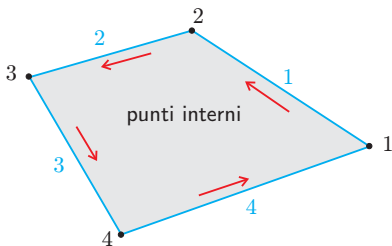
Prendiamo ora un poligono (non intrecciato, lo diciamo per l'ultima volta). Come abbiamo detto, sui suoi lati sono possibili due orientamenti, quello *orario* e quello *antiorario*.

Immaginiamo ora di percorrere i lati del poligono secondo l'orientamento dato, come se fossimo su un autodromo (con delle curve un po' "secche").

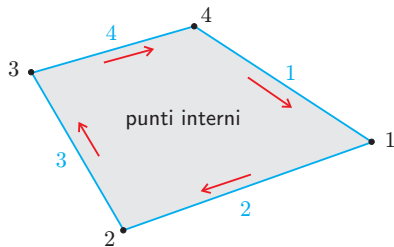
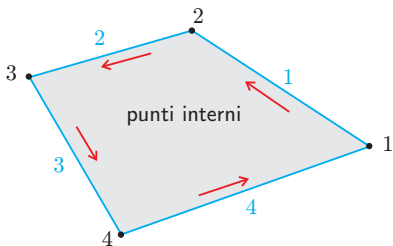
Se l'orientamento è *antiorario*, chiamiamo **punti interni** al poligono i punti che si trovano *a sinistra* di tutti i lati, mentre, se l'orientamento è orario, quelli che si trovano *a destra* di tutti i lati.

La figura seguente chiarirà forse meglio il concetto:



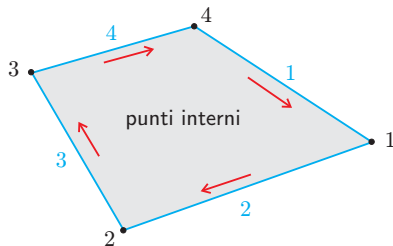
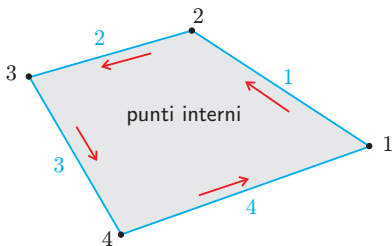


Come vedete, se si percorrono i lati in senso antiorario, i punti interni stanno alla sinistra, mentre se si percorrono in senso orario, i punti interni stanno a destra.



Come vedete, se si percorrono i lati in senso antiorario, i punti interni stanno alla sinistra, mentre se si percorrono in senso orario, i punti interni stanno a destra.

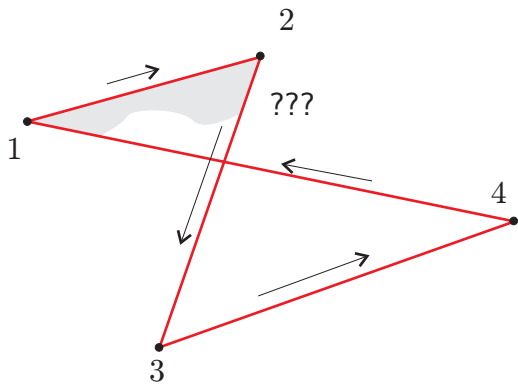
I punti che non sono interni, né dei lati, si dicono invece **esterni**.

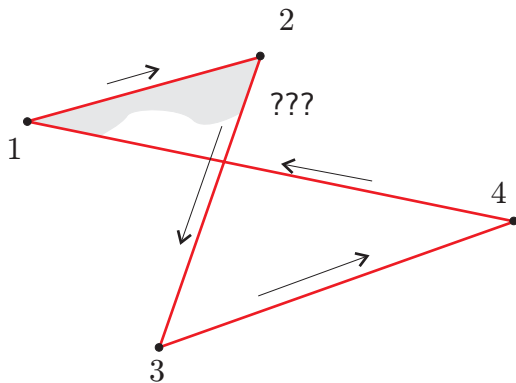


Come vedete, se si percorrono i lati in senso antiorario, i punti interni stanno alla sinistra, mentre se si percorrono in senso orario, i punti interni stanno a destra.

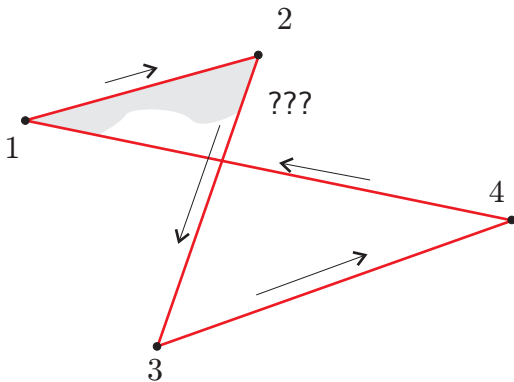
I punti che non sono interni, né dei lati, si dicono invece **esterni**.

Notiamo che non avremmo potuto definire “interno” ed “esterno” di un poligono intrecciato:





D'ora in poi, al posto dei numeri, per i vertici, torneremo ad usare le consuete lettere $A, B, C, \dots$, (oppure $P_1, P_2, P_3 \dots$),



D'ora in poi, al posto dei numeri, per i vertici, torneremo ad usare le consuete lettere $A, B, C, \dots$, (oppure $P_1, P_2, P_3 \dots$), e per i lati le solite notazioni AB, BC , ecc. che abbiamo visto già nelle Scuole Medie.

Adesso che abbiamo esaurito le definizioni fondamentali, vediamone adesso una molto importante.

Adesso che abbiamo esaurito le definizioni fondamentali, vediamone adesso una molto importante.

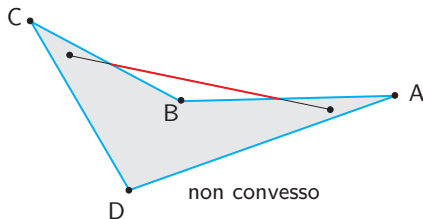
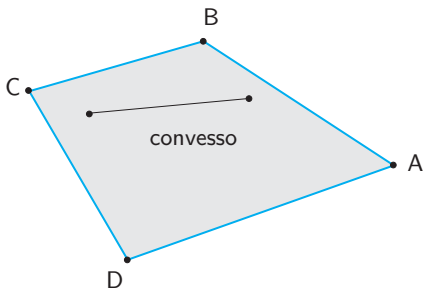
Definizione

Un poligono si dice **convesso** se il segmento che congiunge due suoi punti interni è tutto costituito da punti interni al poligono.

Adesso che abbiamo esaurito le definizioni fondamentali, vediamo ora una molto importante.

Definizione

Un poligono si dice **convesso** se il segmento che congiunge due suoi punti interni è tutto costituito da punti interni al poligono.



Abbiamo già incontrato questa definizione a proposito degli angoli:

Abbiamo già incontrato questa definizione a proposito degli angoli: qui le parole sono diverse (“punti interni” anziché “contenuti”) ma la sostanza è la stessa. Osserviamo anche che perché un poligono sia convesso deve succedere che *ogni* coppia di punti sia congiungibile con un segmento tutto interno,

Abbiamo già incontrato questa definizione a proposito degli angoli: qui le parole sono diverse (“punti interni” anziché “contenuti”) ma la sostanza è la stessa. Osserviamo anche che perché un poligono sia convesso deve succedere che *ogni* coppia di punti sia congiungibile con un segmento tutto interno, mentre per stabilire che *non* lo sia basta un segmento che “esca” dal poligono.

Abbiamo già incontrato questa definizione a proposito degli angoli: qui le parole sono diverse (“punti interni” anziché “contenuti”) ma la sostanza è la stessa. Osserviamo anche che perché un poligono sia convesso deve succedere che *ogni* coppia di punti sia congiungibile con un segmento tutto interno, mentre per stabilire che *non* lo sia basta un segmento che “esca” dal poligono.

Quando si parla di poligoni convessi la situazione descritta prima si semplifica.

Abbiamo già incontrato questa definizione a proposito degli angoli: qui le parole sono diverse (“punti interni” anziché “contenuti”) ma la sostanza è la stessa. Osserviamo anche che perché un poligono sia convesso deve succedere che *ogni* coppia di punti sia congiungibile con un segmento tutto interno, mentre per stabilire che *non* lo sia basta un segmento che “esca” dal poligono.

Quando si parla di poligoni convessi la situazione descritta prima si semplifica. Infatti, dati dei punti nel piano, se esiste un modo di ordinarli in modo da dare un poligono convesso, questo è unico, a parte l'orientamento dei lati (orario o antiorario).

Abbiamo già incontrato questa definizione a proposito degli angoli: qui le parole sono diverse (“punti interni” anziché “contenuti”) ma la sostanza è la stessa. Osserviamo anche che perché un poligono sia convesso deve succedere che *ogni* coppia di punti sia congiungibile con un segmento tutto interno, mentre per stabilire che *non* lo sia basta un segmento che “esca” dal poligono.

Quando si parla di poligoni convessi la situazione descritta prima si semplifica. Infatti, dati dei punti nel piano, se esiste un modo di ordinarli in modo da dare un poligono convesso, questo è unico, a parte l'orientamento dei lati (orario o antiorario). Invece, se i punti non consentono poligoni convessi, sono possibili scelte diverse, come abbiamo visto prima.

Abbiamo già incontrato questa definizione a proposito degli angoli: qui le parole sono diverse (“punti interni” anziché “contenuti”) ma la sostanza è la stessa. Osserviamo anche che perché un poligono sia convesso deve succedere che *ogni* coppia di punti sia congiungibile con un segmento tutto interno, mentre per stabilire che *non* lo sia basta un segmento che “esca” dal poligono.

Quando si parla di poligoni convessi la situazione descritta prima si semplifica. Infatti, dati dei punti nel piano, se esiste un modo di ordinarli in modo da dare un poligono convesso, questo è unico, a parte l'orientamento dei lati (orario o antiorario). Invece, se i punti non consentono poligoni convessi, sono possibili scelte diverse, come abbiamo visto prima.

Inoltre, i poligoni convessi hanno una interessante proprietà.

Approfondimento

Teorema

Tutti e soli punti interni a un poligono convesso sono dati dall'intersezione di semipiani individuati dai lati, a sinistra dei lati se l'orientamento è antiorario e alla loro destra se l'orientamento è orario.

Approfondimento

Teorema

Tutti e soli punti interni a un poligono convesso sono dati dall'intersezione di semipiani individuati dai lati, a sinistra dei lati se l'orientamento è antiorario e alla loro destra se l'orientamento è orario.

Dimostrazione.

Approfondimento

Teorema

Tutti e soli punti interni a un poligono convesso sono dati dall'intersezione di semipiani individuati dai lati, a sinistra dei lati se l'orientamento è antiorario e alla loro destra se l'orientamento è orario.

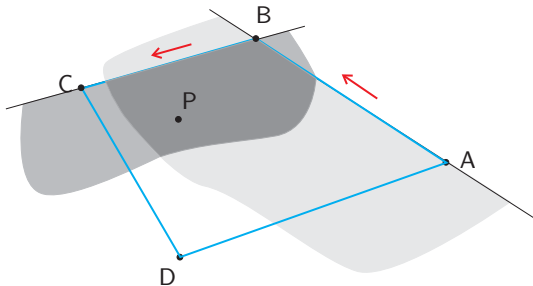
Dimostrazione. Prendiamo un punto interno P .

Approfondimento

Teorema

Tutti e soli punti interni a un poligono convesso sono dati dall'intersezione di semipiani individuati dai lati, a sinistra dei lati se l'orientamento è antiorario e alla loro destra se l'orientamento è orario.

Dimostrazione. Prendiamo un punto interno P .

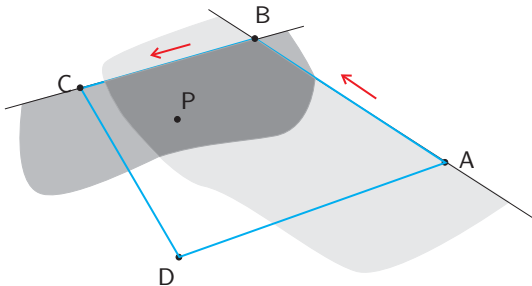


Approfondimento

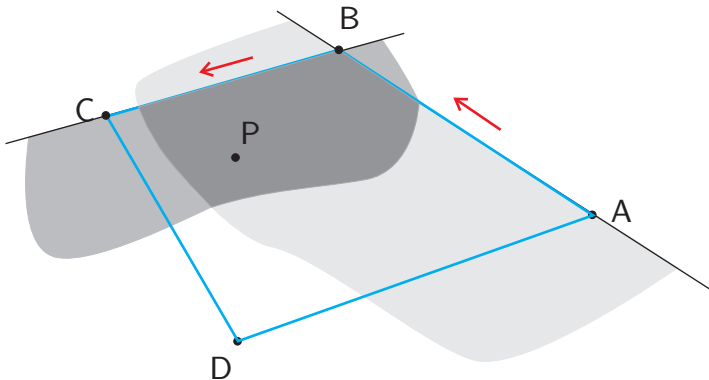
Teorema

Tutti e soli punti interni a un poligono convesso sono dati dall'intersezione di semipiani individuati dai lati, a sinistra dei lati se l'orientamento è antiorario e alla loro destra se l'orientamento è orario.

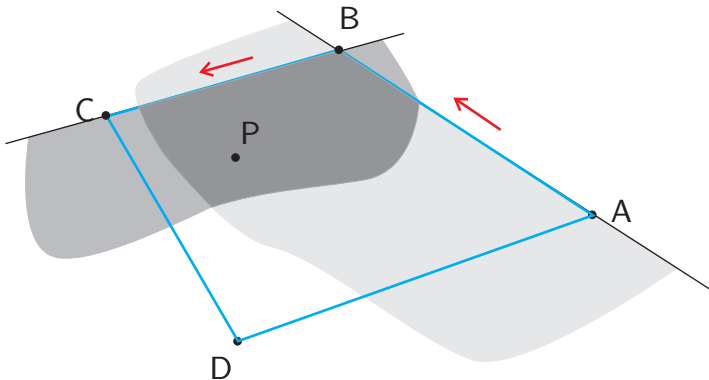
Dimostrazione. Prendiamo un punto interno P .



Supponiamo di percorrere i lati del poligono in senso antiorario, come in figura.

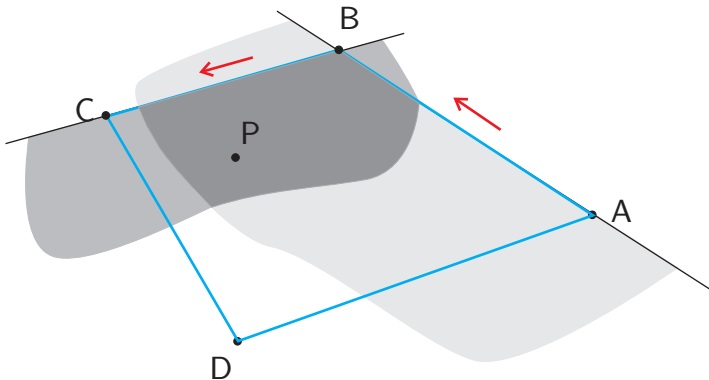


Il punto P , che è un punto interno, starà a sinistra di tutti i lati, e quindi apparterrà a tutti i semipiani che si trovano a sinistra dei lati, e quindi alla loro intersezione.



Il punto P , che è un punto interno, starà a sinistra di tutti i lati, e quindi apparterrà a tutti i semipiani che si trovano a sinistra dei lati, e quindi alla loro intersezione.

Viceversa, se un punto sta nell'intersezione di tutti i semipiani a sinistra, si troverà a sinistra di tutti i lati e quindi sarà un punto interno.



Il punto P , che è un punto interno, starà a sinistra di tutti i lati, e quindi apparterrà a tutti i semipiani che si trovano a sinistra dei lati, e quindi alla loro intersezione.

Viceversa, se un punto sta nell'intersezione di tutti i semipiani a sinistra, si troverà a sinistra di tutti i lati e quindi sarà un punto interno.

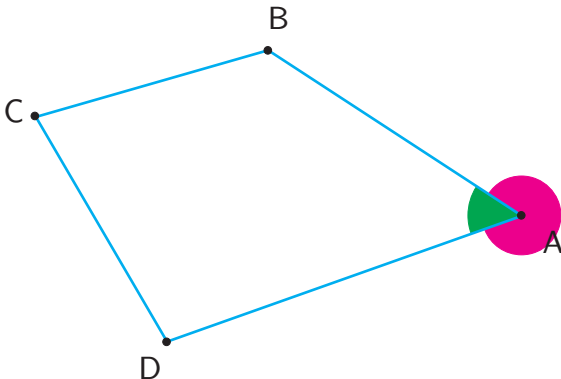
In modo analogo si ragiona se i lati vengono percorsi in senso orario. ■

Consideriamo un poligono, anche non convesso.

Consideriamo un poligono, anche non convesso.

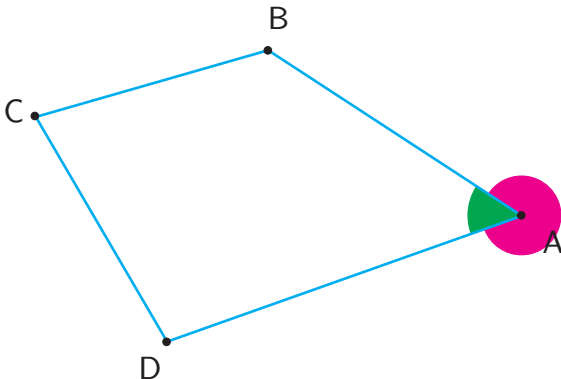
Siccome i suoi lati sono segmenti consecutivi, essi individuano due angoli per ogni vertice del poligono.

Consideriamo un poligono, anche non convesso.
Siccome i suoi lati sono segmenti consecutivi, essi individuano due angoli per ogni vertice del poligono.



Consideriamo un poligono, anche non convesso.

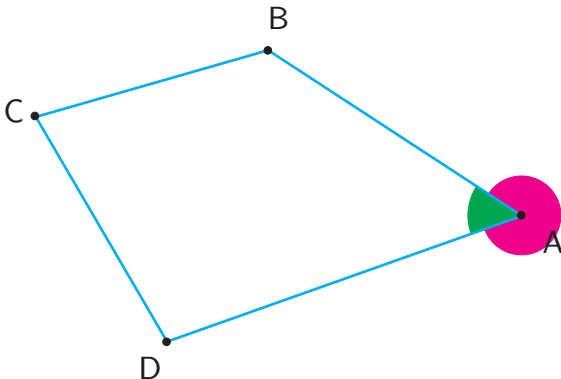
Siccome i suoi lati sono segmenti consecutivi, essi individuano due angoli per ogni vertice del poligono.



Chiameremo **angolo interno** quello che contiene punti interni del poligono,

Consideriamo un poligono, anche non convesso.

Siccome i suoi lati sono segmenti consecutivi, essi individuano due angoli per ogni vertice del poligono.



Chiameremo **angolo interno** quello che contiene punti interni del poligono, quindi quello verde nella figura.

Approfondimento

Per i poligoni *convessi*, vale un primo teorema sugli angoli interni.

Approfondimento

Per i poligoni *convessi*, vale un primo teorema sugli angoli interni.

Teorema

Un poligono è convesso se e solo se ha tutti gli angoli interni minori o uguali di un angolo piatto.

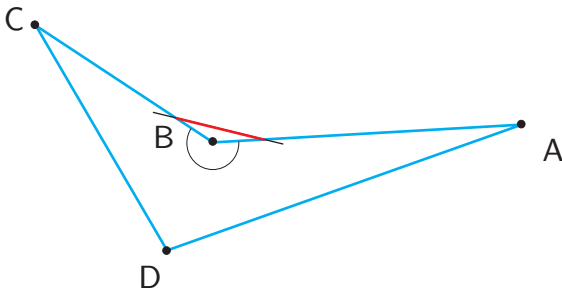
Approfondimento

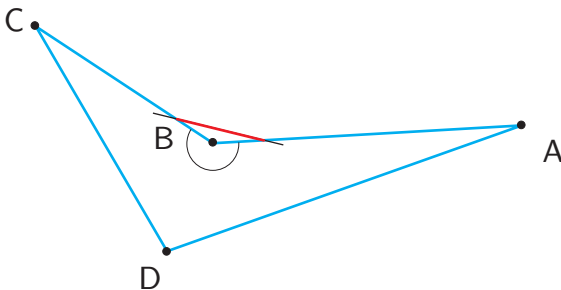
Per i poligoni *convessi*, vale un primo teorema sugli angoli interni.

Teorema

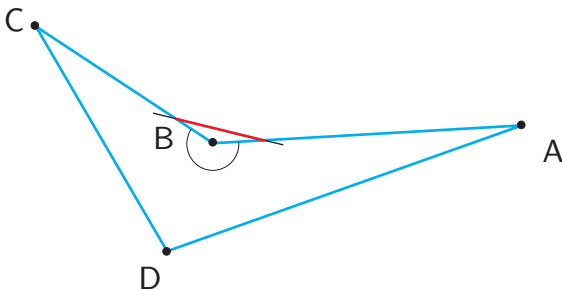
Un poligono è convesso se e solo se ha tutti gli angoli interni minori o uguali di un angolo piatto.

Dimostrazione. Supponiamo che il poligono sia convesso e supponiamo per assurdo che esista un angolo interno superiore a un angolo piatto, come in figura.





Intuitivamente, abbastanza vicino al vertice di quell'angolo, si potrà prendere un segmento con estremi interni e che non appartiene al poligono, in quanto l'angolo superiore a un angolo piatto non è convesso,



Intuitivamente, abbastanza vicino al vertice di quell'angolo, si potrà prendere un segmento con estremi interni e che non appartiene al poligono, in quanto l'angolo superiore a un angolo piatto non è convesso, e quindi neanche il poligono sarà convesso.

Viceversa, supponiamo che tutti gli angoli interni siano inferiori a un angolo piatto.

Viceversa, supponiamo che tutti gli angoli interni siano inferiori a un angolo piatto.

Noi sappiamo, da quanto abbiamo detto sugli angoli, che gli angoli inferiori a un angolo piatto sono convessi.

Viceversa, supponiamo che tutti gli angoli interni siano inferiori a un angolo piatto.

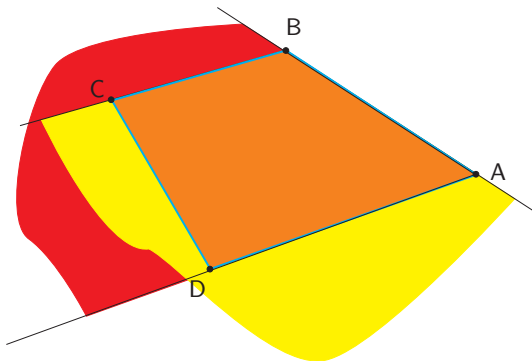
Noi sappiamo, da quanto abbiamo detto sugli angoli, che gli angoli inferiori a un angolo piatto sono convessi.

Ora, dalla figura è evidente che i punti interni al poligono sono anche i punti comuni a tutti gli angoli interni:

Viceversa, supponiamo che tutti gli angoli interni siano inferiori a un angolo piatto.

Noi sappiamo, da quanto abbiamo detto sugli angoli, che gli angoli inferiori a un angolo piatto sono convessi.

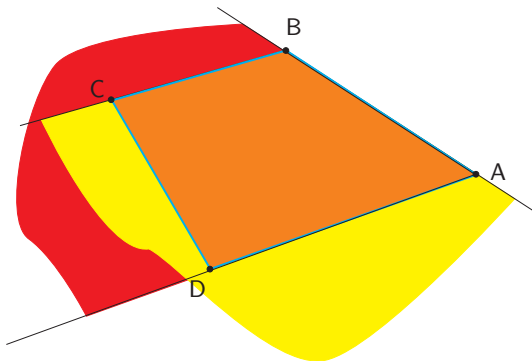
Ora, dalla figura è evidente che i punti interni al poligono sono anche i punti comuni a tutti gli angoli interni:



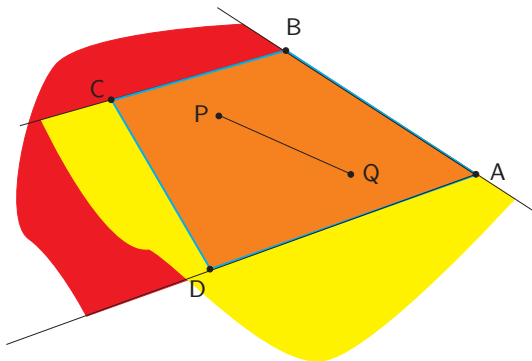
Viceversa, supponiamo che tutti gli angoli interni siano inferiori a un angolo piatto.

Noi sappiamo, da quanto abbiamo detto sugli angoli, che gli angoli inferiori a un angolo piatto sono convessi.

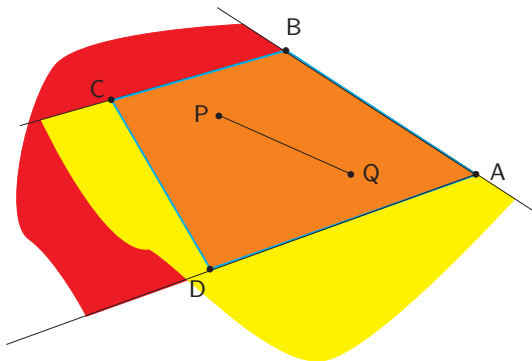
Ora, dalla figura è evidente che i punti interni al poligono sono anche i punti comuni a tutti gli angoli interni:



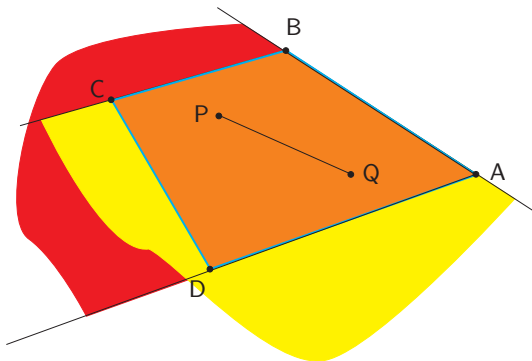
Vediamo allora che il poligono è convesso.



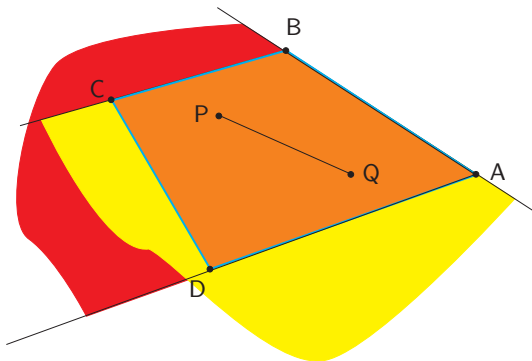
Prendiamo due punti P e Q interni al poligono.



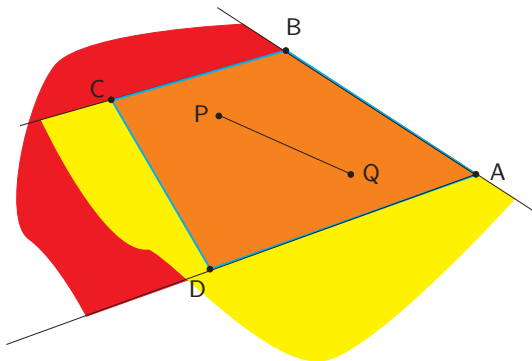
Prendiamo due punti P e Q interni al poligono. Allora essi appartengono a tutti gli angoli interni.



Prendiamo due punti P e Q interni al poligono. Allora essi appartengono a tutti gli angoli interni. Siccome ciascuno di essi è convesso, il segmento che li congiunge è tutto contenuto in ciascun angolo interno.



Prendiamo due punti P e Q interni al poligono. Allora essi appartengono a tutti gli angoli interni. Siccome ciascuno di essi è convesso, il segmento che li congiunge è tutto contenuto in ciascun angolo interno. Ma allora il segmento PQ è contenuto in ogni angolo interno, cioè è tutto fatto da punti interni.



Prendiamo due punti P e Q interni al poligono. Allora essi appartengono a tutti gli angoli interni. Siccome ciascuno di essi è convesso, il segmento che li congiunge è tutto contenuto in ciascun angolo interno. Ma allora il segmento PQ è contenuto in ogni angolo interno, cioè è tutto fatto da punti interni. Dunque il poligono è convesso. ■

Approfondimento

Sin qui non abbiamo escluso che un angolo interno sia *uguale* a un angolo piatto.

Approfondimento

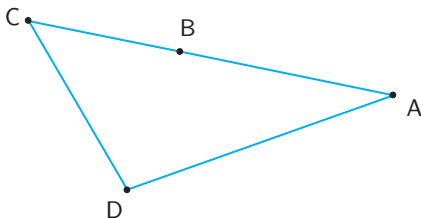
Sin qui non abbiamo escluso che un angolo interno sia *uguale* a un angolo piatto.

Chiaramente, per un poligono come in figura,

Approfondimento

Sin qui non abbiamo escluso che un angolo interno sia *uguale* a un angolo piatto.

Chiaramente, per un poligono come in figura,

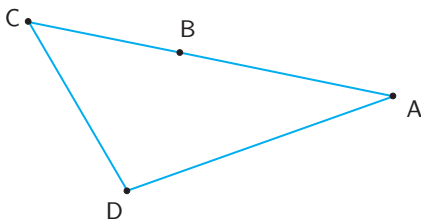


potremmo sempre pensare di togliere il vertice B senza alterare il poligono, anzi semplificandolo.

Approfondimento

Sin qui non abbiamo escluso che un angolo interno sia *uguale* a un angolo piatto.

Chiaramente, per un poligono come in figura,



potremmo sempre pensare di togliere il vertice B senza alterare il poligono, anzi semplificandolo. Per questo, nel seguito, supporremo sempre che gli angoli interni di un poligono siano diversi da un angolo piatto.

Vediamo ora un teorema semplice e molto utile.

Vediamo ora un teorema semplice e molto utile.

Teorema

Un poligono convesso si può sempre suddividere in triangoli, tanti quanti sono i lati del poligono.

Vediamo ora un teorema semplice e molto utile.

Teorema

Un poligono convesso si può sempre suddividere in triangoli, tanti quanti sono i lati del poligono.

Dimostrazione. Prendiamo un punto P interno al poligono.

Vediamo ora un teorema semplice e molto utile.

Teorema

Un poligono convesso si può sempre suddividere in triangoli, tanti quanti sono i lati del poligono.

Dimostrazione. Prendiamo un punto P interno al poligono.
Congiungiamo questo punto con i vertici del poligono:

Vediamo ora un teorema semplice e molto utile.

Teorema

Un poligono convesso si può sempre suddividere in triangoli, tanti quanti sono i lati del poligono.

Dimostrazione. Prendiamo un punto P interno al poligono.

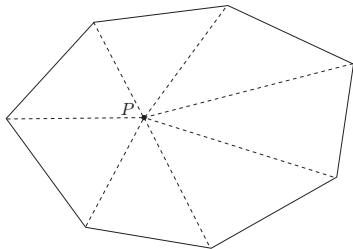
Congiungiamo questo punto con i vertici del poligono: questi segmenti sono tutti contenuti nel poligono.

Vediamo ora un teorema semplice e molto utile.

Teorema

Un poligono convesso si può sempre suddividere in triangoli, tanti quanti sono i lati del poligono.

Dimostrazione. Prendiamo un punto P interno al poligono. Congiungiamo questo punto con i vertici del poligono: questi segmenti sono tutti contenuti nel poligono.



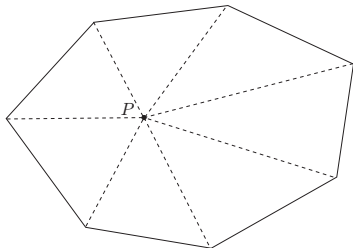
Vediamo ora un teorema semplice e molto utile.

Teorema

Un poligono convesso si può sempre suddividere in triangoli, tanti quanti sono i lati del poligono.

Dimostrazione. Prendiamo un punto P interno al poligono.

Congiungiamo questo punto con i vertici del poligono: questi segmenti sono tutti contenuti nel poligono.



Dalla figura si intuisce che questi segmenti hanno in comune solo il punto P , e che suddividono il poligono in triangoli. ■

In effetti anche un poligono *non* convesso si può suddividere in triangoli, ma la dimostrazione è più complicata.

In effetti anche un poligono *non* convesso si può suddividere in triangoli, ma la dimostrazione è più complicata.

Vediamo adesso un importante teorema sulla somma degli angoli interni di un poligono convesso.

Teorema

In un poligono convesso di n lati, la somma degli angoli interni è uguale a $n - 2$ angoli piatti.

Teorema

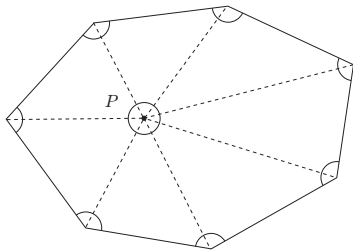
In un poligono convesso di n lati, la somma degli angoli interni è uguale a $n - 2$ angoli piatti.

Dimostrazione. Dal teorema precedente, abbiamo che il poligono è diviso in tanti triangoli quanti sono i lati del poligono.

Teorema

In un poligono convesso di n lati, la somma degli angoli interni è uguale a $n - 2$ angoli piatti.

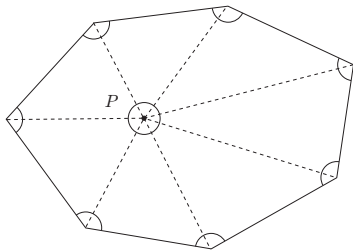
Dimostrazione. Dal teorema precedente, abbiamo che il poligono è diviso in tanti triangoli quanti sono i lati del poligono.



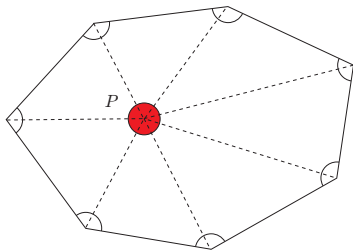
Teorema

In un poligono convesso di n lati, la somma degli angoli interni è uguale a $n - 2$ angoli piatti.

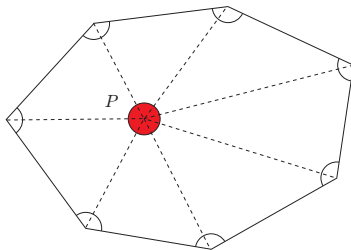
Dimostrazione. Dal teorema precedente, abbiamo che il poligono è diviso in tanti triangoli quanti sono i lati del poligono.



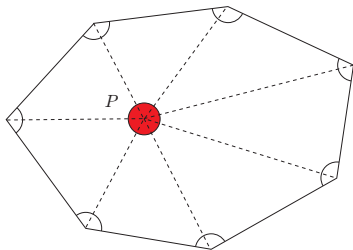
Ognuno di questi triangoli ha somma degli angoli interni pari a un angolo piatto, quindi in tutto fanno n angoli piatti.



Ci accorgiamo però che abbiamo sommato *troppi* angoli: abbiamo anche sommato tutti quelli con vertice in P .



Ci accorgiamo però che abbiamo sommato *troppi* angoli: abbiamo anche sommato tutti quelli con vertice in P . Ma dalla figura vediamo che la loro somma è un angolo giro, cioè due angoli piatti, che dobbiamo quindi togliere dal conto.



Ci accorgiamo però che abbiamo sommato *troppi* angoli: abbiamo anche sommato tutti quelli con vertice in P . Ma dalla figura vediamo che la loro somma è un angolo giro, cioè due angoli piatti, che dobbiamo quindi togliere dal conto. In tutto quindi fanno $n - 2$ angoli piatti. ■

Quindi, per esempio, un quadrilatero convesso ha somma degli angoli interni pari a 360° , un esagono convesso a $6 - 2 = 4$ angoli piatti, ossia 720° , e così via.

Adesso possiamo anche dare un senso alla nozione di *area* e *perimetro* di un poligono.

Adesso possiamo anche dare un senso alla nozione di *area* e *perimetro* di un poligono.

Definizione

L'area di un poligono convesso è la somma delle aree dei triangoli nei quali viene suddiviso da un suo punto.

Adesso possiamo anche dare un senso alla nozione di *area* e *perimetro* di un poligono.

Definizione

L'area di un poligono convesso è la somma delle aree dei triangoli nei quali viene suddiviso da un suo punto.

Questa definizione ha un difetto:

Adesso possiamo anche dare un senso alla nozione di *area* e *perimetro* di un poligono.

Definizione

L'area di un poligono convesso è la somma delle aree dei triangoli nei quali viene suddiviso da un suo punto.

Questa definizione ha un difetto: essa *dipende* dal punto P scelto!

Adesso possiamo anche dare un senso alla nozione di *area* e *perimetro* di un poligono.

Definizione

L'area di un poligono convesso è la somma delle aree dei triangoli nei quali viene suddiviso da un suo punto.

Questa definizione ha un difetto: essa *dipende* dal punto P scelto! Siamo proprio sicuri che se cambiamo il punto P l'area non cambia?

La risposta è affermativa, ma la sua dimostrazione è ben al di là delle nostre possibilità.

La risposta è affermativa, ma la sua dimostrazione è ben al di là delle nostre possibilità.

Se il poligono non è convesso, siccome abbiamo detto che si può suddividere in triangoli, definiremo area del poligono la somma delle aree dei triangoli. Anche qui si può dimostrare che l'area non dipende dal modo in cui costruiamo i triangoli.

La risposta è affermativa, ma la sua dimostrazione è ben al di là delle nostre possibilità.

Se il poligono non è convesso, siccome abbiamo detto che si può suddividere in triangoli, definiremo area del poligono la somma delle aree dei triangoli. Anche qui si può dimostrare che l'area non dipende dal modo in cui costruiamo i triangoli.

Meno problematica è invece la definizione di perimetro di un poligono.

La risposta è affermativa, ma la sua dimostrazione è ben al di là delle nostre possibilità.

Se il poligono non è convesso, siccome abbiamo detto che si può suddividere in triangoli, definiremo area del poligono la somma delle aree dei triangoli. Anche qui si può dimostrare che l'area non dipende dal modo in cui costruiamo i triangoli.

Meno problematica è invece la definizione di perimetro di un poligono.

Definizione

Il perimetro di un poligono è la somma delle lunghezze dei suoi lati.

Vediamo infine una classe molto particolare di poligoni: i **poligoni regolari**.

Vediamo infine una classe molto particolare di poligoni: i **poligoni regolari**.

Definizione

Un **poligono regolare** è un poligono con tutti i lati e gli angoli interni uguali.

Vediamo infine una classe molto particolare di poligoni: i **poligoni regolari**.

Definizione

Un **poligono regolare** è un poligono con tutti i lati e gli angoli interni uguali.

Teorema (approfondimento)

Un poligono regolare è sempre convesso.

Vediamo infine una classe molto particolare di poligoni: i **poligoni regolari**.

Definizione

Un **poligono regolare** è un poligono con tutti i lati e gli angoli interni uguali.

Teorema (approfondimento)

Un poligono regolare è sempre convesso.

Dimostrazione. Siccome gli angoli interni sono tutti uguali, ognuno di essi misura

$$\frac{n-2}{n} \quad \text{angoli piatti.}$$

Vediamo infine una classe molto particolare di poligoni: i **poligoni regolari**.

Definizione

Un **poligono regolare** è un poligono con tutti i lati e gli angoli interni uguali.

Teorema (approfondimento)

Un poligono regolare è sempre convesso.

Dimostrazione. Siccome gli angoli interni sono tutti uguali, ognuno di essi misura

$$\frac{n-2}{n} \quad \text{angoli piatti.}$$

Siccome $(n-2)/n$ è minore di 1, ogni angolo interno è inferiore a un angolo piatto.

Vediamo infine una classe molto particolare di poligoni: i **poligoni regolari**.

Definizione

Un **poligono regolare** è un poligono con tutti i lati e gli angoli interni uguali.

Teorema (approfondimento)

Un poligono regolare è sempre convesso.

Dimostrazione. Siccome gli angoli interni sono tutti uguali, ognuno di essi misura

$$\frac{n-2}{n} \quad \text{angoli piatti.}$$

Siccome $(n-2)/n$ è minore di 1, ogni angolo interno è inferiore a un angolo piatto. Noi abbiamo dimostrato però che ogni poligono in cui gli angoli interni sono minori di un angolo piatto è convesso, per cui i poligoni regolari sono convessi. ■

Osservazione

Se lasciamo cadere una delle due richieste della definizione di poligono regolare, non otteniamo più necessariamente un poligono regolare.

Osservazione

Se lasciamo cadere una delle due richieste della definizione di poligono regolare, non otteniamo più necessariamente un poligono regolare.
Se chiedessimo solo che i lati siano uguali, anche il rombo sarebbe un poligono regolare, cosa che non vogliamo.

Osservazione

Se lasciamo cadere una delle due richieste della definizione di poligono regolare, non otteniamo più necessariamente un poligono regolare.

Se chiedessimo solo che i lati siano uguali, anche il rombo sarebbe un poligono regolare, cosa che non vogliamo.

Se chiedessimo solo che gli angoli interni siano uguali, il rettangolo sarebbe un poligono regolare, cosa che non vogliamo.

Osservazione

Se lasciamo cadere una delle due richieste della definizione di poligono regolare, non otteniamo più necessariamente un poligono regolare.

Se chiedessimo solo che i lati siano uguali, anche il rombo sarebbe un poligono regolare, cosa che non vogliamo.

Se chiedessimo solo che gli angoli interni siano uguali, il rettangolo sarebbe un poligono regolare, cosa che non vogliamo.

I nomi dei poligoni regolari più noti sono quadrato, pentagono, esagono, ettagono, ottagono, ennagono, decagono.

Teorema

Un poligono regolare è sempre inscrittibile e circoscrittibile a una circonferenza, e le due hanno lo stesso centro.

Teorema

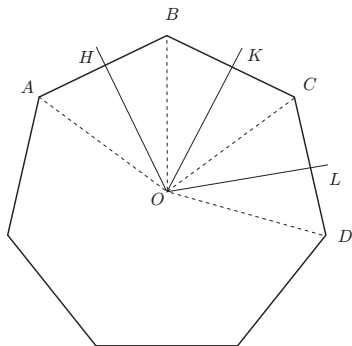
Un poligono regolare è sempre inscrittibile e circoscrivibile a una circonferenza, e le due hanno lo stesso centro.

Dimostrazione (Approfondimento). Prendiamo un lato AB del poligono e tracciamone l'asse, poi intersechiamolo con l'asse del segmento successivo BC :

Teorema

Un poligono regolare è sempre inscrittibile e circoscrittibile a una circonferenza, e le due hanno lo stesso centro.

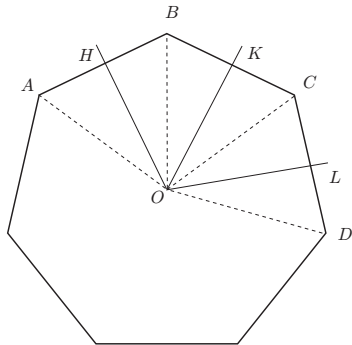
Dimostrazione (Approfondimento). Prendiamo un lato AB del poligono e tracciamone l'asse, poi intersechiamolo con l'asse del segmento successivo BC :



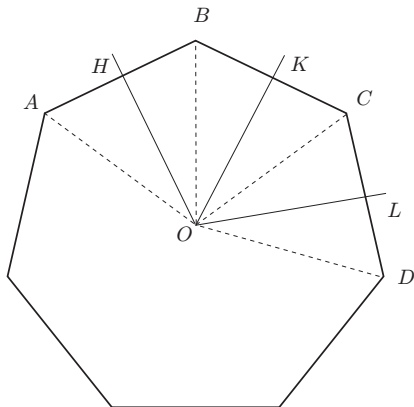
Teorema

Un poligono regolare è sempre inscritto e circoscritto a una circonferenza, e le due hanno lo stesso centro.

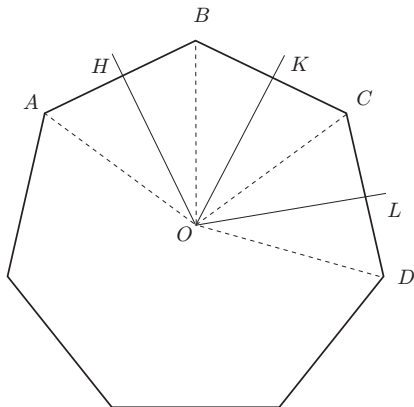
Dimostrazione (Approfondimento). Prendiamo un lato AB del poligono e tracciamone l'asse, poi intersechiamolo con l'asse del segmento successivo BC :



I due assi non sono paralleli perché l'angolo $\widehat{ABC}$ non è piatto, dunque si intersecano in un punto O .

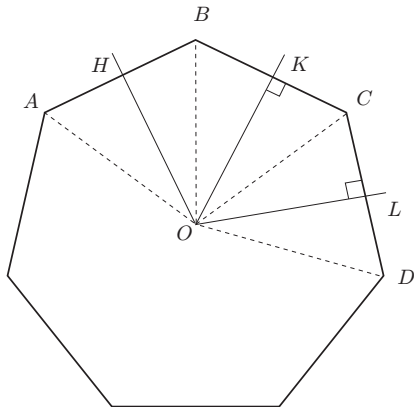


Per le proprietà dell'asse del segmento, abbiamo $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ e quindi, dato che $\overline{AB} = \overline{BC}$, i due triangoli AOB e BOC sono congruenti per il terzo criterio.

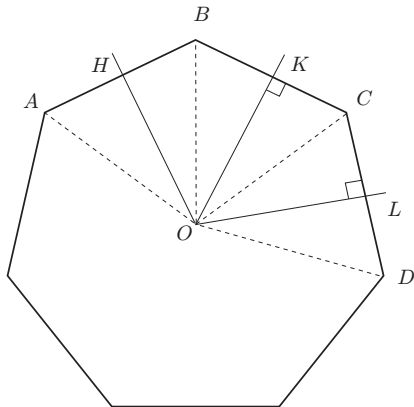


Per le proprietà dell'asse del segmento, abbiamo $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ e quindi, dato che $\overline{AB} = \overline{BC}$, i due triangoli AOB e BOC sono congruenti per il terzo criterio.

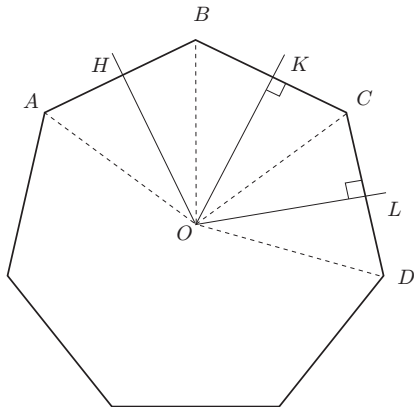
Siccome i triangoli detti sono anche isosceli, ne segue facilmente che $\widehat{OCB}$ è la metà di $\widehat{BCD}$, e quindi che $\widehat{OCD} \cong \widehat{OCB}$.



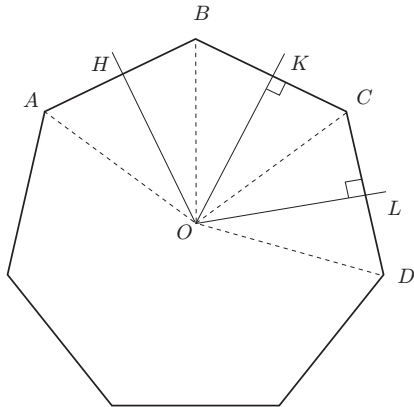
Sia ora L il punto medio di CD .



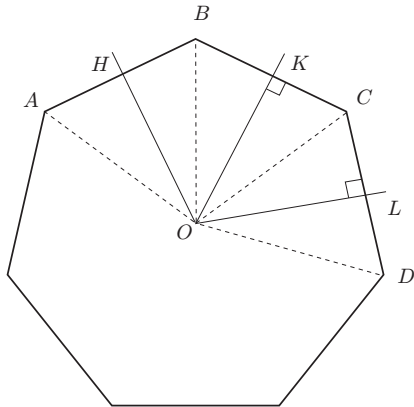
Sia ora L il punto medio di CD . Siccome $\overline{CD} = \overline{BC}$, abbiamo $KC \cong CL$ e dunque, per quanto visto sopra, i triangoli OCK e OCL sono congruenti per il primo criterio.



Sia ora L il punto medio di CD . Siccome $\overline{CD} = \overline{BC}$, abbiamo $KC \cong CL$ e dunque, per quanto visto sopra, i triangoli OCK e OCL sono congruenti per il primo criterio. Ne segue che $\widehat{OLC}$ è retto, e quindi che anche i triangoli OLC e OLD sono congruenti.

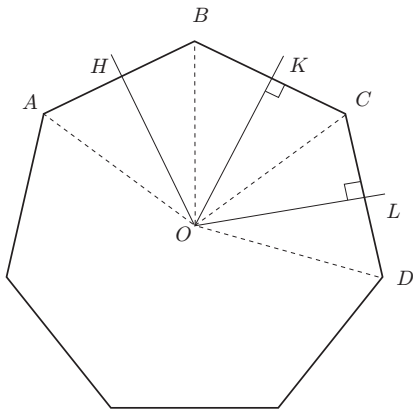


Sia ora L il punto medio di CD . Siccome $\overline{CD} = \overline{BC}$, abbiamo $KC \cong CL$ e dunque, per quanto visto sopra, i triangoli OCK e OCL sono congruenti per il primo criterio. Ne segue che $\widehat{OLC}$ è retto, e quindi che anche i triangoli OLC e OLD sono congruenti. Quindi $\overline{OC} = \overline{OD}$.

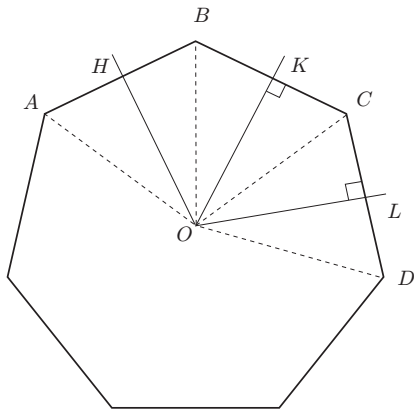


Sia ora L il punto medio di CD . Siccome $\overline{CD} = \overline{BC}$, abbiamo $KC \cong CL$ e dunque, per quanto visto sopra, i triangoli OCK e OCL sono congruenti per il primo criterio. Ne segue che $\widehat{OLC}$ è retto, e quindi che anche i triangoli OLC e OLD sono congruenti. Quindi $\overline{OC} = \overline{OD}$.

Continuando il ragionamento sul lato successivo, tutte le congiungenti O con i vertici sono congruenti, dunque O è il centro della circonferenza circoscritta al poligono.



Siccome poi $\overline{OH} = \overline{OK}$ e, per quanto visto, $\overline{OK} = \overline{OL}$, continuando con tutti i lati si trova che le congiungenti O con i punti medi dei lati sono tutte lunghe uguali e perpendicolari ai lati.



Siccome poi $\overline{OH} = \overline{OK}$ e, per quanto visto, $\overline{OK} = \overline{OL}$, continuando con tutti i lati si trova che le congiungenti O con i punti medi dei lati sono tutte lunghe uguali e perpendicolari ai lati. Dunque O è anche il centro della circonferenza inscritta al poligono. ■

Approfondimento

La **costruzione** dei poligoni regolari con riga e compasso ha una lunga storia. Il triangolo, il quadrato, il pentagono e l'esagono sono costruibili a partire dalla circonferenza circoscritta, in maniera esatta con riga e compasso.

Approfondimento

La **costruzione** dei poligoni regolari con riga e compasso ha una lunga storia. Il triangolo, il quadrato, il pentagono e l'esagono sono costruibili a partire dalla circonferenza circoscritta, in maniera esatta con riga e compasso.

La costruzione dell'ettagono che si trova nei libri di Disegno tecnico è invece *approssimata*: matematicamente è sbagliata, ma gli errori che si commettono sono più piccoli dello spessore del tratto di matita.

Approfondimento

La **costruzione** dei poligoni regolari con riga e compasso ha una lunga storia. Il triangolo, il quadrato, il pentagono e l'esagono sono costruibili a partire dalla circonferenza circoscritta, in maniera esatta con riga e compasso.

La costruzione dell'ettagono che si trova nei libri di Disegno tecnico è invece *approssimata*: matematicamente è sbagliata, ma gli errori che si commettono sono più piccoli dello spessore del tratto di matita.

Esiste un complicato teorema che dice esattamente quali sono i poligoni regolari costruibili con riga e compasso: fu congetturato da Gauss nel 1796 e dimostrato completamente da Wantzel nel 1837.

Approfondimento

La **costruzione** dei poligoni regolari con riga e compasso ha una lunga storia. Il triangolo, il quadrato, il pentagono e l'esagono sono costruibili a partire dalla circonferenza circoscritta, in maniera esatta con riga e compasso.

La costruzione dell'ettagono che si trova nei libri di Disegno tecnico è invece *approssimata*: matematicamente è sbagliata, ma gli errori che si commettono sono più piccoli dello spessore del tratto di matita.

Esiste un complicato teorema che dice esattamente quali sono i poligoni regolari costruibili con riga e compasso: fu congetturato da Gauss nel 1796 e dimostrato completamente da Wantzel nel 1837.

Teorema (di Gauss-Wantzel)

Un poligono regolare di n lati è costruibile con riga e compasso se e solo se il numero n è il prodotto di una potenza di 2 e di un numero qualunque di numeri primi di Fermat distinti.

Già, ma quali sono i numeri primi di Fermat?

Già, ma quali sono i numeri primi di Fermat?

Sono i numeri primi della forma $2^n + 1$, ossia numeri primi successivi di una potenza di due.

Già, ma quali sono i numeri primi di Fermat?

Sono i numeri primi della forma $2^n + 1$, ossia numeri primi successivi di una potenza di due. Il bello è che se ne conoscono solo cinque: 3, 5, 17, 257 e 65537.

Già, ma quali sono i numeri primi di Fermat?

Sono i numeri primi della forma $2^n + 1$, ossia numeri primi successivi di una potenza di due. Il bello è che se ne conoscono solo cinque: 3, 5, 17, 257 e 65537.

Quindi, per esempio, un poligono regolare di 40 lati è costruibile con riga e compasso perché $40 = 2^3 \cdot 5$ (potenza di due per numero di Fermat).

Già, ma quali sono i numeri primi di Fermat?

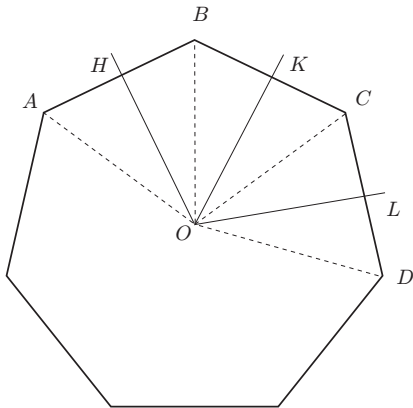
Sono i numeri primi della forma $2^n + 1$, ossia numeri primi successivi di una potenza di due. Il bello è che se ne conoscono solo cinque: 3, 5, 17, 257 e 65537.

Quindi, per esempio, un poligono regolare di 40 lati è costruibile con riga e compasso perché $40 = 2^3 \cdot 5$ (potenza di due per numero di Fermat).

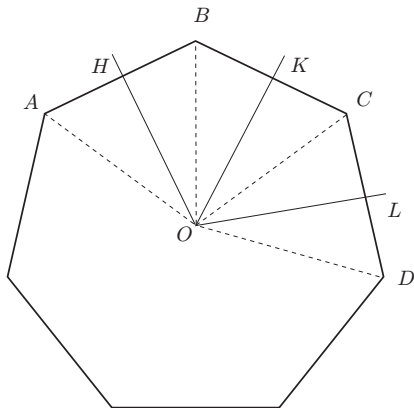
Invece $n = 50$ non va bene perché $50 = 2 \cdot 5^2$ e 5 è sì un primo di Fermat, ma ve ne sono due ripetuti. Invece ancora, per esempio, 60 va bene perché $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ e in questo numero, oltre alla potenza di 2, vi sono due primi di Fermat diversi. Infine 70 non va bene perché 7 non è un primo di Fermat.

L'area di un poligono regolare si può calcolare agevolmente quando si conosce la lunghezza dei segmenti (tutti uguali) OH , OK , eccetera, detto **apotema**.

L'area di un poligono regolare si può calcolare agevolmente quando si conosce la lunghezza dei segmenti (tutti uguali) OH , OK , eccetera, detto **apotema**.



L'area di un poligono regolare si può calcolare agevolmente quando si conosce la lunghezza dei segmenti (tutti uguali) OH , OK , eccetera, detto **apotema**.



Il teorema che dà l'area è infatti molto semplice:

Teorema

L'area di un poligono regolare è data dal prodotto del perimetro per l'apotema diviso per due.

Teorema

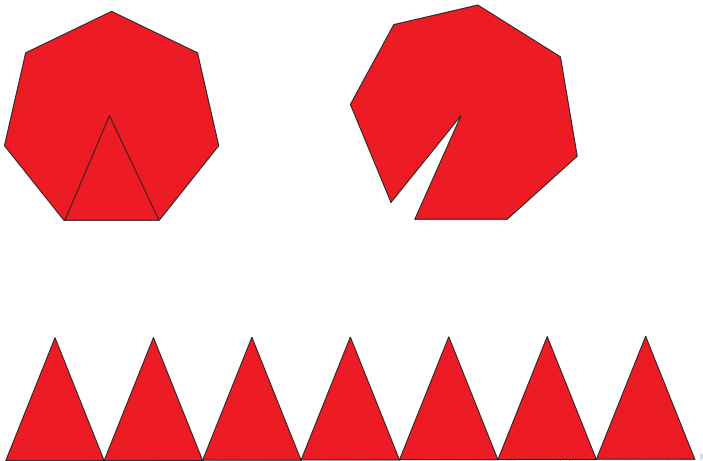
L'area di un poligono regolare è data dal prodotto del perimetro per l'apotema diviso per due.

Dimostrazione. Immaginiamo di “aprire” il poligono come mostra la figura, tagliando sulle congiungenti O ai vertici:

Teorema

L'area di un poligono regolare è data dal prodotto del perimetro per l'apotema diviso per due.

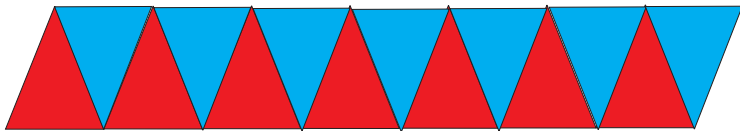
Dimostrazione. Immaginiamo di “aprire” il poligono come mostra la figura, tagliando sulle congiungenti O ai vertici:



La base di questa unione di triangoli è il perimetro del poligono, e le altezze di tutti i triangoli sono pari all'apotema.

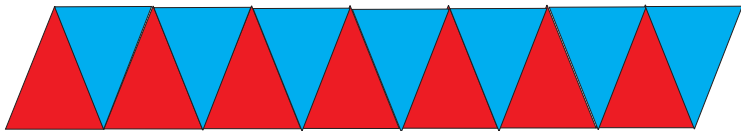
La base di questa unione di triangoli è il perimetro del poligono, e le altezze di tutti i triangoli sono pari all'apotema.
Successivamente raddoppiamo tutti i triangoli ottenendo un parallelogramma:

La base di questa unione di triangoli è il perimetro del poligono, e le altezze di tutti i triangoli sono pari all'apotema.
Successivamente raddoppiamo tutti i triangoli ottenendo un parallelogramma:



La base di questa unione di triangoli è il perimetro del poligono, e le altezze di tutti i triangoli sono pari all'apotema.

Successivamente raddoppiamo tutti i triangoli ottenendo un parallelogramma:



L'area di questo parallelogramma è dato da base per altezza, ossia perimetro per apotema, ed è pari al doppio dell'area del poligono. Quindi l'area del poligono regolare è dato da perimetro per apotema diviso due. ■

Dati due poligoni regolari con lo stesso numero di lati, questi sono per forza simili, ossia hanno tutti gli angoli uguali e i lati in proporzione.

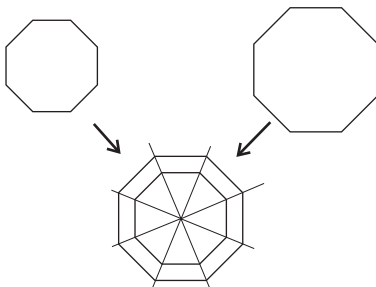
Dati due poligoni regolari con lo stesso numero di lati, questi sono per forza simili, ossia hanno tutti gli angoli uguali e i lati in proporzione. Infatti, basta osservare che l'angolo al centro che sottende un lato è sempre lo stesso (dipende solo dal numero di lati ed è uguale a $360^\circ/n$, dove n è il numero di lati).

Dati due poligoni regolari con lo stesso numero di lati, questi sono per forza simili, ossia hanno tutti gli angoli uguali e i lati in proporzione. Infatti, basta osservare che l'angolo al centro che sottende un lato è sempre lo stesso (dipende solo dal numero di lati ed è uguale a $360^\circ/n$, dove n è il numero di lati).

Ne segue che se si fanno coincidere i centri e si sovrappongono le congiungenti il centro con un vertice nei due poligoni, si sovrappongono tutti gli altri raggi e i lati saranno in proporzione.

Dati due poligoni regolari con lo stesso numero di lati, questi sono per forza simili, ossia hanno tutti gli angoli uguali e i lati in proporzione. Infatti, basta osservare che l'angolo al centro che sottende un lato è sempre lo stesso (dipende solo dal numero di lati ed è uguale a $360^\circ/n$, dove n è il numero di lati).

Ne segue che se si fanno coincidere i centri e si sovrappongono le congiungenti il centro con un vertice nei due poligoni, si sovrappongono tutti gli altri raggi e i lati saranno in proporzione.



Da questo ragionamento segue che il rapporto fra l'apotema e il lato è sempre lo stesso in tutti i poligoni regolari con n lati, e dipende solo da n .

Da questo ragionamento segue che il rapporto fra l'apotema e il lato è sempre lo stesso in tutti i poligoni regolari con n lati, e dipende solo da n . Questo numero è detto talvolta *numero fisso* e si usa per calcolare l'apotema una volta noto il lato. Se chiamiamo con r_n il numero fisso, la formula è

Da questo ragionamento segue che il rapporto fra l'apotema e il lato è sempre lo stesso in tutti i poligoni regolari con n lati, e dipende solo da n . Questo numero è detto talvolta *numero fisso* e si usa per calcolare l'apotema una volta noto il lato. Se chiamiamo con r_n il numero fisso, la formula è

$$\text{apotema} = \text{lato} \cdot r_n.$$

Da questo ragionamento segue che il rapporto fra l'apotema e il lato è sempre lo stesso in tutti i poligoni regolari con n lati, e dipende solo da n . Questo numero è detto talvolta *numero fisso* e si usa per calcolare l'apotema una volta noto il lato. Se chiamiamo con r_n il numero fisso, la formula è

$$\text{apotema} = \text{lato} \cdot r_n.$$

Se vogliamo allora calcolare l'area, questa sarà, detta l la misura del lato e a quella dell'apotema,

$$A = 2p \cdot a \cdot \frac{1}{2} = nl \cdot l r_n = \frac{1}{2} n r_n l^2.$$

Da questo ragionamento segue che il rapporto fra l'apotema e il lato è sempre lo stesso in tutti i poligoni regolari con n lati, e dipende solo da n . Questo numero è detto talvolta *numero fisso* e si usa per calcolare l'apotema una volta noto il lato. Se chiamiamo con r_n il numero fisso, la formula è

$$\text{apotema} = \text{lato} \cdot r_n.$$

Se vogliamo allora calcolare l'area, questa sarà, detta l la misura del lato e a quella dell'apotema,

$$A = 2p \cdot a \cdot \frac{1}{2} = nl \cdot l r_n = \frac{1}{2} n r_n l^2.$$

Il guaio è che i “numeri fissi” non sono facili da calcolare per i vari valori di n , e nessuno di questi è dato da un numero frazionario. Per il triangolo equilatero è $r_3 = 1/\sqrt{3}$, per il quadrato $r_4 = 1/\sqrt{2}$, per il pentagono $r_5 = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}/2$ e per l'esagono $r_6 = \sqrt{3}$. Per alcuni poligoni il rapporto non è esprimibile con delle radici quadrate, come per l'ettagono regolare, e ciò è legato al fatto che l'ettagono regolare non è costruibile con riga e compasso.