Numeri irrazionali

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

Parte I

percorso semplificato

Segmenti e numeri irrazionali

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.
Supponiamo di avere un quadrato, come in figura, e supponiamo che ciascun lato misuri 1

Segmenti e numeri irrazionali

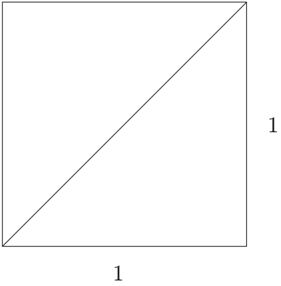
Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.
Supponiamo di avere un quadrato, come in figura, e supponiamo che ciascun lato misuri 1 (ossia che essi siano congruenti all'unità di misura dei segmenti).

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.
Supponiamo di avere un quadrato, come in figura, e supponiamo che ciascun lato misuri 1 (ossia che essi siano congruenti all'unità di misura dei segmenti).
Tracciamo la diagonale e chiediamoci: quanto misura?

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.
Supponiamo di avere un quadrato, come in figura, e supponiamo che ciascun lato misuri 1 (ossia che essi siano congruenti all'unità di misura dei segmenti).
Tracciamo la diagonale e chiediamoci: quanto misura?



Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Se la misura di un segmento consiste *esclusivamente* in

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Se la misura di un segmento consiste *esclusivamente* in

1. Dividere l'unità di misura in un numero qualunque di parti uguali (sottomultipli);

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Se la misura di un segmento consiste *esclusivamente* in

1. Dividere l'unità di misura in un numero qualunque di parti uguali (sottomultipli);
2. Riportare un adeguato numero di sottomultipli fino a ricoprire *esattamente* il segmento da misurare;

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Se la misura di un segmento consiste *esclusivamente* in

1. Dividere l'unità di misura in un numero qualunque di parti uguali (sottomultipli);
2. Riportare un adeguato numero di sottomultipli fino a ricoprire *esattamente* il segmento da misurare;

allora sorgerebbero gravi problemi. Vediamo perché.

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura.

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Riportando m volte (m intero) un sottomultiplo, avremo m volte $1/n$, cioè m/n volte l'unità di misura:

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Riportando m volte (m intero) un sottomultiplo, avremo m volte $1/n$, cioè m/n volte l'unità di misura:

$$141\,\mathrm{mm} = 141 \cdot \frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = \frac{141}{1000}\,\mathrm{m}, \text{ ecc.}$$

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Riportando m volte (m intero) un sottomultiplo, avremo m volte $1/n$, cioè m/n volte l'unità di misura:

$$141\,\mathrm{mm} = 141 \cdot \frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = \frac{141}{1000}\,\mathrm{m}, \text{ ecc.}$$

In tutti i casi, il numero che compare davanti all'unità di misura (che vorremmo chiamare "misura" del segmento) è dato da un numero razionale.

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Riportando m volte (m intero) un sottomultiplo, avremo m volte $1/n$, cioè m/n volte l'unità di misura:

$$141\,\mathrm{mm} = 141 \cdot \frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = \frac{141}{1000}\,\mathrm{m}, \text{ ecc.}$$

In tutti i casi, il numero che compare davanti all'unità di misura (che vorremmo chiamare "misura" del segmento) è dato da un numero razionale.
Ci chiediamo allora *quale numero razionale sia* $\sqrt{2}$.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari. Ora, siccome "dispari per dispari" dà dispari, m non può essere dispari, perché il suo quadrato è pari.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari. Ora, siccome "dispari per dispari" dà dispari, m non può essere dispari, perché il suo quadrato è pari. Quindi m è pari, cioè ha almeno un fattore 2 nel suo sviluppo.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari. Ora, siccome "dispari per dispari" dà dispari, m non può essere dispari, perché il suo quadrato è pari. Quindi m è pari, cioè ha almeno un fattore 2 nel suo sviluppo. Possiamo dunque scrivere

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari. Ora, siccome "dispari per dispari" dà dispari, m non può essere dispari, perché il suo quadrato è pari. Quindi m è pari, cioè ha almeno un fattore 2 nel suo sviluppo. Possiamo dunque scrivere

$$m = 2p.$$

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

ossia

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

ossia

$$n^2 = 2p^2.$$

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

ossia

$$n^2 = 2p^2.$$

Ma allora anche n^2 è pari, e dunque anche n è pari!

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

ossia

$$n^2 = 2p^2.$$

Ma allora anche n^2 è pari, e dunque anche n è pari! Quindi *m e n non possono essere primi tra loro*, il che è un assurdo perché una frazione si può sempre ridurre ai minimi termini (alla peggio numeratore o denominatore risultano pari a 1).

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

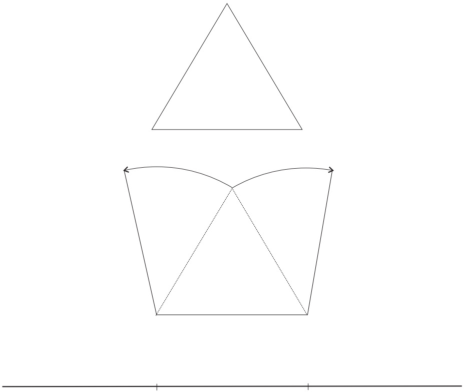
ossia

$$n^2 = 2p^2.$$

Ma allora anche n^2 è pari, e dunque anche n è pari! Quindi *m e n non possono essere primi tra loro*, il che è un assurdo perché una frazione si può sempre ridurre ai minimi termini (alla peggio numeratore o denominatore risultano pari a 1).
Dunque non è possibile *misurare* la diagonale con i procedimenti enunciati prima.

Per la verità, una situazione analoga si potrebbe incontrare anche senza ricorrere alla diagonale del quadrato. Prendiamo stavolta un triangolo equilatero e "apriamolo":

Per la verità, una situazione analoga si potrebbe incontrare anche senza ricorrere alla diagonale del quadrato. Prendiamo stavolta un triangolo equilatero e "apriamolo":



Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato.

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché $1/3$ ha uno sviluppo decimale illimitato:

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché 1/3 ha uno sviluppo decimale illimitato:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots.$$

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché $1/3$ ha uno sviluppo decimale illimitato:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots.$$

Però ora la situazione è diversa, perché *cambiando unità di misura* (dividendola per 3 e non per 10) si ottiene la misura perfetta.

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché $1/3$ ha uno sviluppo decimale illimitato:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots.$$

Però ora la situazione è diversa, perché *cambiando unità di misura* (dividendola per 3 e non per 10) si ottiene la misura perfetta.
Nel caso della diagonale, invece, *nessun cambio di unità di misura* risolve la situazione.

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché 1/3 ha uno sviluppo decimale illimitato:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots.$$

Però ora la situazione è diversa, perché *cambiando unità di misura* (dividendola per 3 e non per 10) si ottiene la misura perfetta.
Nel caso della diagonale, invece, *nessun cambio di unità di misura* risolve la situazione.
In questo caso si dice che la diagonale e il lato del quadrato sono *incommensurabili*.

Siamo quindi di fronte a un bivio:

Siamo quindi di fronte a un bivio:

1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;

Siamo quindi di fronte a un bivio:

1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;
2. estendere le operazioni di “misura di un segmento”.

Siamo quindi di fronte a un bivio:

1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;
2. estendere le operazioni di "misura di un segmento".

La strada 1) è impercorribile, per due buoni motivi.

Siamo quindi di fronte a un bivio:

1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;
2. estendere le operazioni di "misura di un segmento".

La strada 1) è impercorribile, per due buoni motivi.

Il primo è che par proprio che la diagonale sia un segmento come tutti gli altri: oltretutto, se avessimo posto pari all'unità di misura la diagonale e avessimo cercato di misurare il lato, ci saremmo imbattuti nella stessa difficoltà;

Siamo quindi di fronte a un bivio:

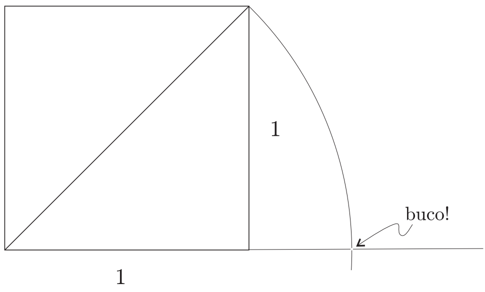
1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;
2. estendere le operazioni di "misura di un segmento".

La strada 1) è impercorribile, per due buoni motivi.

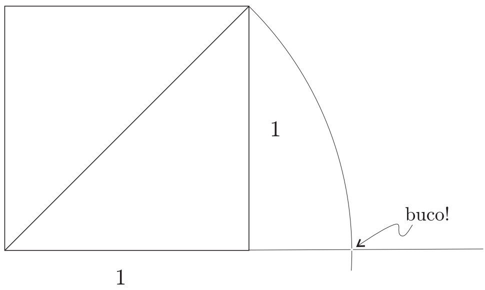
Il primo è che par proprio che la diagonale sia un segmento come tutti gli altri: oltretutto, se avessimo posto pari all'unità di misura la diagonale e avessimo cercato di misurare il lato, ci saremmo imbattuti nella stessa difficoltà;

Il secondo è che se ammettiamo che vi siano solo punti "razionali" e che le circonferenze riportino uguali distanze, dovremmo ammettere che *un segmento con un estremo all'interno di una circonferenza e l'altro estremo all'esterno non interseca la circonferenza!*.

Il secondo è che se ammettiamo che vi siano solo punti "razionali" e che le circonferenze riportino uguali distanze, dovremmo ammettere che *un segmento con un estremo all'interno di una circonferenza e l'altro estremo all'esterno non interseca la circonferenza!*.

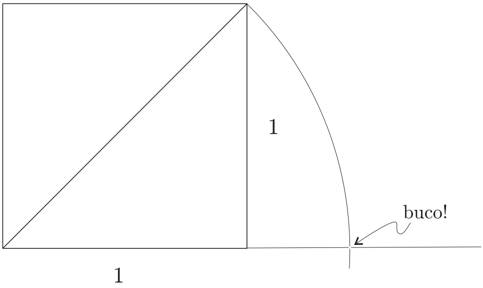


Il secondo è che se ammettiamo che vi siano solo punti "razionali" e che le circonferenze riportino uguali distanze, dovremmo ammettere che *un segmento con un estremo all'interno di una circonferenza e l'altro estremo all'esterno non interseca la circonferenza!*.



È infatti questo il caso del prolungamento del lato di base del quadrato: se nella retta vi fossero solo punti razionali, l'intersezione, che disterebbe $\sqrt{2}$ dall'estremo, non starebbe sulla retta.

Il secondo è che se ammettiamo che vi siano solo punti "razionali" e che le circonferenze riportino uguali distanze, dovremmo ammettere che *un segmento con un estremo all'interno di una circonferenza e l'altro estremo all'esterno non interseca la circonferenza!*.



È infatti questo il caso del prolungamento del lato di base del quadrato: se nella retta vi fossero solo punti razionali, l'intersezione, che disterebbe $\sqrt{2}$ dall'estremo, non starebbe sulla retta.
Nella prossima sezione vedremo come estendere il processo di misurazione.

Approssimazioni

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa “irragionevoli” ma “non razionali”, ossia che non si esprimono come rapporto)

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa "irragionevoli" ma "non razionali", ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s'intende).

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa “irragionevoli” ma “non razionali”, ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s’intende). I Greci erano sostenitori di un universo nel quale i rapporti fra numeri interi fossero essenziali, come avevano scoperto essere in Musica e in Astronomia.

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa “irragionevoli” ma “non razionali”, ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s’intende). I Greci erano sostenitori di un universo nel quale i rapporti fra numeri interi fossero essenziali, come avevano scoperto essere in Musica e in Astronomia. Ma si dovettero arrendere all’evidenza.

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa “irragionevoli” ma “non razionali”, ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s’intende). I Greci erano sostenitori di un universo nel quale i rapporti fra numeri interi fossero essenziali, come avevano scoperto essere in Musica e in Astronomia. Ma si dovettero arrendere all’evidenza.

Per adeguare il concetto di misurazione alla diagonale, essi dovettero supporre in aggiunta a quanto detto, che si potesse

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa “irragionevoli” ma “non razionali”, ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s’intende). I Greci erano sostenitori di un universo nel quale i rapporti fra numeri interi fossero essenziali, come avevano scoperto essere in Musica e in Astronomia. Ma si dovettero arrendere all’evidenza.

Per adeguare il concetto di misurazione alla diagonale, essi dovettero supporre in aggiunta a quanto detto, che si potesse

3. trovare una serie infinita di misure della quantità da misurare, approssimate per difetto e per eccesso.

Cosa voglia dire “approssimate per difetto” o “per eccesso” è chiaro:

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto,

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;
- 1,4142 è per difetto, 1,4143 per eccesso;

Cosa voglia dire “approssimate per difetto” o “per eccesso” è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma “esce fuori”, la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;
- 1,4142 è per difetto, 1,4143 per eccesso;
- e così via...

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che 99/70 è un'approssimazione per eccesso a meno di 1/10 000, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;
- 1,4142 è per difetto, 1,4143 per eccesso;
- e così via...

Il senso profondo dell'assioma 3) è che una serie *infinita* di queste approssimazioni definisce una misura.

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.

Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.

Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;
- 1,4142 è per difetto, 1,4143 per eccesso;
- e così via...

Il senso profondo dell'assioma 3) è che una serie *infinita* di queste approssimazioni definisce una misura.

Osserviamo ancora che

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*.

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*.

I numeri razionali *non* hanno queste proprietà (altrimenti $\sqrt{2}$ sarebbe razionale), mentre i "nuovi" numeri, detti numeri *reali*, sì.

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*.

I numeri razionali *non* hanno queste proprietà (altrimenti $\sqrt{2}$ sarebbe razionale), mentre i "nuovi" numeri, detti numeri *reali*, sì.
Come *definire* i numeri reali in modo da obbedire al principio di Dedekind (e alle altre proprietà delle operazioni) non è semplice, e qui ci concentreremo solo sulle proprietà dei numeri irrazionali.

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,4142857142857142857\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,4142857142857142857\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (dimostrato nella parte approfondita).

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,414285714285714285 71\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (dimostrato nella parte approfondita).
Dunque un numero irrazionale *non ammette uno sviluppo decimale periodico*.

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,414285714285714285\,71\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (dimostrato nella parte approfondita).
Dunque un numero irrazionale *non ammette uno sviluppo decimale periodico*. Infatti il suo sviluppo decimale coincide con l'unione di tutte le approssimazioni per difetto (o per eccesso) fatte con sottomultipli di 10, 100, 1000, ecc.

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,414285714285714285 71\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (dimostrato nella parte approfondita).
Dunque un numero irrazionale *non ammette uno sviluppo decimale periodico*. Infatti il suo sviluppo decimale coincide con l'unione di tutte le approssimazioni per difetto (o per eccesso) fatte con sottomultipli di 10, 100, 1000, ecc. Per esempio,

$$\sqrt{2} = 1,41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\ldots$$

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,4142857142857142857\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (dimostrato nella parte approfondita).
Dunque un numero irrazionale *non ammette uno sviluppo decimale periodico*. Infatti il suo sviluppo decimale coincide con l'unione di tutte le approssimazioni per difetto (o per eccesso) fatte con sottomultipli di 10, 100, 1000, ecc. Per esempio,

$$\sqrt{2} = 1,41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\ldots$$

Si può anche mostrare che (dimostrato nella parte normale e approfondita) *uno sviluppo decimale non periodico individua un numero irrazionale*.

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{peso} = 4 \qquad 1 = \frac{2}{2} \quad \text{peso} = 4 \qquad 3 = \frac{3}{1} \quad \text{peso} = 4$$

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{peso} = 4 \qquad 1 = \frac{2}{2} \quad \text{peso} = 4 \qquad 3 = \frac{3}{1} \quad \text{peso} = 4$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{2}{3} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{3}{2} \quad \text{peso} = 5 \qquad 4 = \frac{4}{1} \quad \text{peso} = 5$$

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{peso} = 4 \qquad 1 = \frac{2}{2} \quad \text{peso} = 4 \qquad 3 = \frac{3}{1} \quad \text{peso} = 4$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{2}{3} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{3}{2} \quad \text{peso} = 5 \qquad 4 = \frac{4}{1} \quad \text{peso} = 5$$

La frazione $\frac{2}{2}$ è indicata in rosso perché è "doppia"

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{peso} = 4 \qquad 1 = \frac{2}{2} \quad \text{peso} = 4 \qquad 3 = \frac{3}{1} \quad \text{peso} = 4$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{2}{3} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{3}{2} \quad \text{peso} = 5 \qquad 4 = \frac{4}{1} \quad \text{peso} = 5$$

La frazione $\frac{2}{2}$ è indicata in rosso perché è "doppia" (corrisponde a 1 che è già stata incontrata).

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.

Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- $1/2$ è la seconda, 2 la terza;

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- 1/2 è la seconda, 2 la terza;
- 1/3 è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente 2/2);

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- $1/2$ è la seconda, 2 la terza;
- $1/3$ è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente $2/2$);
- $1/4$ è la sesta, $2/3$ è la settima, $3/2$ è l'ottava, 4 è la nona;

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- 1/2 è la seconda, 2 la terza;
- 1/3 è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente 2/2);
- 1/4 è la sesta, 2/3 è la settima, 3/2 è l'ottava, 4 è la nona;
- e così via...

Per quanto possa sembrare complicato, questo schema associa ad ogni frazione un numero intero.

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- 1/2 è la seconda, 2 la terza;
- 1/3 è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente 2/2);
- 1/4 è la sesta, 2/3 è la settima, 3/2 è l'ottava, 4 è la nona;
- e così via...

Per quanto possa sembrare complicato, questo schema associa ad ogni frazione un numero intero.
I matematici chiamano la possibilità di "contare" anche insiemi infiniti di numeri (come i numeri razionali) *numerabilità*.

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- $1/2$ è la seconda, 2 la terza;
- $1/3$ è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente $2/2$);
- $1/4$ è la sesta, $2/3$ è la settima, $3/2$ è l'ottava, 4 è la nona;
- e così via...

Per quanto possa sembrare complicato, questo schema associa ad ogni frazione un numero intero.
I matematici chiamano la possibilità di "contare" anche insiemi infiniti di numeri (come i numeri razionali) *numerabilità*. Quindi si dice che i numeri razionali sono *numerabili*.

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- 1/2 è la seconda, 2 la terza;
- 1/3 è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente 2/2);
- 1/4 è la sesta, 2/3 è la settima, 3/2 è l'ottava, 4 è la nona;
- e così via...

Per quanto possa sembrare complicato, questo schema associa ad ogni frazione un numero intero.
I matematici chiamano la possibilità di "contare" anche insiemi infiniti di numeri (come i numeri razionali) *numerabilità*. Quindi si dice che i numeri razionali sono *numerabili*.
Questo *non* si può fare con i numeri irrazionali.

L'idea è questa: supponiamo *per assurdo* che i numeri irrazionali siano numerabili, e quindi elenchiamoli tutti, così:

L'idea è questa: supponiamo *per assurdo* che i numeri irrazionali siano numerabili, e quindi elenchiamoli tutti, così:

$$
\begin{array}{ll}
1: & 0{,}\mathbf{2}73984949282839039404040409298237263215612\ldots \\
2: & 0{,}1\mathbf{5}627272383272362512728287464652821828 2828\ldots \\
3: & 0{,}34\mathbf{3}47384827923179376176372676809002983 0239\ldots \\
4: & 0{,}488\mathbf{1}640484663462378460937460046386487 34260\ldots \\
5: & 0{,}1127\mathbf{2}37238726387167479187498127483749 83879\ldots \\
6: & 0{,}34726\mathbf{3}74862395879183721263218361938719 2890\ldots \\
7: & 0{,}238246\mathbf{0}24320847128974309171024987320497 320\ldots \\
8: & 0{,}2367512\mathbf{3}17398791287389124719847139879837 49\ldots \\
9: & 0{,}90809823\mathbf{9}04737465423176371638714687126878 9\ldots \\
10: & 0{,}465761354\mathbf{1}8348156312986318923719829873787 9\ldots \\
11: & 0{,}9384023847\mathbf{2}3465635463256576153621572312121\ldots \\
12: & 0{,}00394838948\mathbf{8}936412361786387218726362362727\ldots \\
13: & 0{,}215626272187\mathbf{3}721983871298371987398127389 00\ldots
\end{array}
$$

(i numeri azzurri sono quelli che "contano" i numeri irrazionali).

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\dots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (accennato nella parte approfondita) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (accennato nella parte approfondita) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (accennato nella parte approfondita) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

$$0,364231402394\ldots$$

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (accennato nella parte approfondita) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

$$0,364231402394\ldots$$

Questo sviluppo è evidente illimitato e non periodico (altrimenti lo sarebbe stato anche quello precedente).

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (accennato nella parte approfondita) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

$$0,364231402394\ldots$$

Questo sviluppo è evidente illimitato e non periodico (altrimenti lo sarebbe stato anche quello precedente). Dunque, siccome abbiamo elencato *tutti* i numeri irrazionali, esso *deve* essere uno di quelli.

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (accennato nella parte approfondita) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

$$0,364231402394\ldots$$

Questo sviluppo è evidente illimitato e non periodico (altrimenti lo sarebbe stato anche quello precedente). Dunque, siccome abbiamo elencato *tutti* i numeri irrazionali, esso *deve* essere uno di quelli.

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa;

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa; non può essere il secondo, perché la seconda cifra decimale è diversa,

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa; non può essere il secondo, perché la seconda cifra decimale è diversa, e così via concludiamo che questo numero irrazionale *non è contenuto nell'elenco*!

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa; non può essere il secondo, perché la seconda cifra decimale è diversa, e così via concludiamo che questo numero irrazionale *non è contenuto nell'elenco*! Quindi siamo giunti ad un assurdo, e pertanto i numeri irrazionali non sono numerabili.

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa; non può essere il secondo, perché la seconda cifra decimale è diversa, e così via concludiamo che questo numero irrazionale *non è contenuto nell'elenco*! Quindi siamo giunti ad un assurdo, e pertanto i numeri irrazionali non sono numerabili.
(Per questo motivo i matematici dicono che i numeri irrazionali sono "molti di più" dei numeri razionali).

Esempi di numeri irrazionali

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali?

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1 + \sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali.

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1 + \sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p + r$ fosse razionale, si avrebbe

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p+r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1+\sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p+r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p+r=\frac{m}{n}$$

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p+r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1+\sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p+r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p+r=\frac{m}{n}$$

da cui

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p+r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1+\sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p+r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p+r=\frac{m}{n}$$

da cui

$$r=\frac{m}{n}-p \qquad \text{che è razionale,}$$

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p+r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1+\sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p+r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p+r=\frac{m}{n}$$

da cui

$$r=\frac{m}{n}-p \qquad \text{che è razionale, il che è assurdo.}$$

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1 + \sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p + r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p + r = \frac{m}{n}$$

da cui

$$r = \frac{m}{n} - p \qquad \text{che è razionale, il che è assurdo.}$$

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

Se un numero intero *a non* è un quadrato perfetto, allora $\sqrt{a}$ è irrazionale.

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

Se un numero intero *a non* è un quadrato perfetto, allora $\sqrt{a}$ è irrazionale.

La dimostrazione di questo fatto è data nella parte approfondita.

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

Se un numero intero a *non* è un quadrato perfetto, allora $\sqrt{a}$ è irrazionale.

La dimostrazione di questo fatto è data nella parte approfondita.
In questo modo sappiamo che $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ sono tutti irrazionali.

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

Se un numero intero a *non* è un quadrato perfetto, allora $\sqrt{a}$ è irrazionale.

La dimostrazione di questo fatto è data nella parte approfondita.
In questo modo sappiamo che $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ sono tutti irrazionali.
Si può poi mostrare che se a non è una potenza n-esima, allora $\sqrt[n]{a}$ è irrazionale.

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

Se un numero intero a *non* è un quadrato perfetto, allora $\sqrt{a}$ è irrazionale.

La dimostrazione di questo fatto è data nella parte approfondita.
In questo modo sappiamo che $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ sono tutti irrazionali.
Si può poi mostrare che se a non è una potenza n-esima, allora $\sqrt[n]{a}$ è irrazionale.

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).
Per esempio, mostriamo che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Posto $x = \sqrt[3]{2}$, abbiamo ovviamente

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).
Per esempio, mostriamo che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Posto $x = \sqrt[3]{2}$, abbiamo ovviamente

$$x^3 = 2 \qquad \text{ossia} \qquad x^3 - 2 = 0.$$

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).
Per esempio, mostriamo che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Posto $x = \sqrt[3]{2}$, abbiamo ovviamente

$$x^3 = 2 \qquad \text{ossia} \qquad x^3 - 2 = 0.$$

Posto $P(x) = x^3 - 2$, abbiamo che

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).
Per esempio, mostriamo che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Posto $x = \sqrt[3]{2}$, abbiamo ovviamente

$$x^3 = 2 \qquad \text{ossia} \qquad x^3 - 2 = 0.$$

Posto $P(x) = x^3 - 2$, abbiamo che

$$P(\pm 1) \neq 0, \qquad P(\pm 2) \neq 0.$$

Di conseguenza, $\sqrt[3]{2}$, che *è* una soluzione dell'equazione, deve essere irrazionale.

A parte le radici *n*-esime e loro combinazioni, ben poco si sa su *altri* numeri irrazionali (a parte, ovviamente, quelli noti con gli sviluppi non periodici, per i quali, però, difficilmente si hanno legami con problemi matematici).

A parte le radici *n*-esime e loro combinazioni, ben poco si sa su *altri* numeri irrazionali (a parte, ovviamente, quelli noti con gli sviluppi non periodici, per i quali, però, difficilmente si hanno legami con problemi matematici).
Il più celebre di questi numeri è $\pi = 3,141592\ldots$, il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro. La prima dimostrazione che π è irrazionale è del 1761 di Johann Heinrich Lambert. Oggi si conoscono miliardi di cifre decimali di π, e siti internet che riportano dove si possa trovare la propria data di nascita o numero di telefono nello sviluppo decimale di π.

Curiosità sui numeri irrazionali

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2".

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2". Anche il numero irrazionale

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2". Anche il numero irrazionale

$$0,010011000111000011110000011111100000\ldots$$

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2". Anche il numero irrazionale

$$0,0100110001110000111100000111110000\ldots$$

è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni".

è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni". Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

è descrivibile dalla frase “il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni”. Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è “indescrivibile”, perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

Seconda curiosità
Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$.

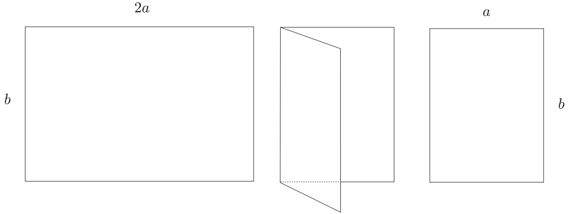
è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni". Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

Seconda curiosità
Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.

è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni". Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

Seconda curiosità

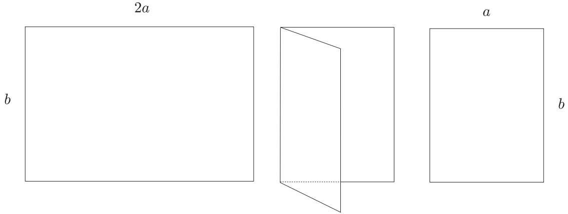
Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.



è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni". Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

Seconda curiosità

Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.

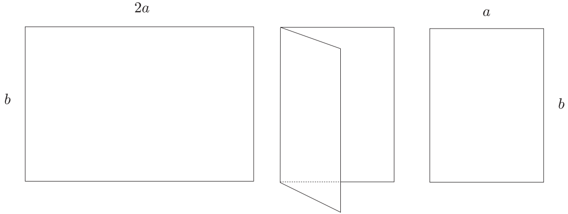


Dalla figura si vede che, se si vuol mantenere la similitudine, deve essere

è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni". Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

Seconda curiosità

Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.



Dalla figura si vede che, se si vuol mantenere la similitudine, deve essere

$$2a : b = b : a$$

e quindi

e quindi

$$b^2 = 2a^2 \qquad \text{da cui} \qquad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2.$$

e quindi

$$b^2 = 2a^2 \qquad \text{da cui} \qquad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2.$$

Numeri irrazionali

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica “Niccolò Tartaglia”
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

Parte II

percorso normale

Segmenti e numeri irrazionali

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.
Supponiamo di avere un quadrato, come in figura, e supponiamo che ciascun lato misuri 1

Segmenti e numeri irrazionali

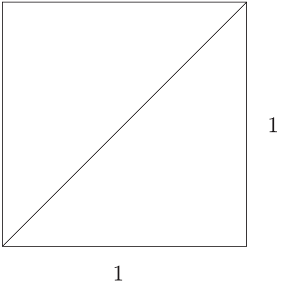
Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.
Supponiamo di avere un quadrato, come in figura, e supponiamo che ciascun lato misuri 1 (ossia che essi siano congruenti all'unità di misura dei segmenti).

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.
Supponiamo di avere un quadrato, come in figura, e supponiamo che ciascun lato misuri 1 (ossia che essi siano congruenti all'unità di misura dei segmenti).
Tracciamo la diagonale e chiediamoci: quanto misura?

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.
Supponiamo di avere un quadrato, come in figura, e supponiamo che ciascun lato misuri 1 (ossia che essi siano congruenti all'unità di misura dei segmenti).
Tracciamo la diagonale e chiediamoci: quanto misura?



Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Se la misura di un segmento consiste *esclusivamente* in

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Se la misura di un segmento consiste *esclusivamente* in

1. Dividere l'unità di misura in un numero qualunque di parti uguali (sottomultipli);

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Se la misura di un segmento consiste *esclusivamente* in

1. Dividere l'unità di misura in un numero qualunque di parti uguali (sottomultipli);
2. Riportare un adeguato numero di sottomultipli fino a ricoprire *esattamente* il segmento da misurare;

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Se la misura di un segmento consiste *esclusivamente* in

1. Dividere l'unità di misura in un numero qualunque di parti uguali (sottomultipli);
2. Riportare un adeguato numero di sottomultipli fino a ricoprire *esattamente* il segmento da misurare;

allora sorgerebbero gravi problemi. Vediamo perché.

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura.

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Riportando m volte (m intero) un sottomultiplo, avremo m volte $1/n$, cioè m/n volte l'unità di misura:

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Riportando m volte (m intero) un sottomultiplo, avremo m volte $1/n$, cioè m/n volte l'unità di misura:

$$141\,\mathrm{mm} = 141 \cdot \frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = \frac{141}{1000}\,\mathrm{m}, \text{ ecc.}$$

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Riportando m volte (m intero) un sottomultiplo, avremo m volte $1/n$, cioè m/n volte l'unità di misura:

$$141\,\mathrm{mm} = 141 \cdot \frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = \frac{141}{1000}\,\mathrm{m}, \text{ ecc.}$$

In tutti i casi, il numero che compare davanti all'unità di misura (che vorremmo chiamare "misura" del segmento) è dato da un numero razionale.

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Riportando m volte (m intero) un sottomultiplo, avremo m volte $1/n$, cioè m/n volte l'unità di misura:

$$141\,\mathrm{mm} = 141 \cdot \frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = \frac{141}{1000}\,\mathrm{m}, \text{ ecc.}$$

In tutti i casi, il numero che compare davanti all'unità di misura (che vorremmo chiamare "misura" del segmento) è dato da un numero razionale.
Ci chiediamo allora *quale numero razionale sia* $\sqrt{2}$.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari. Ora, siccome "dispari per dispari" dà dispari, m non può essere dispari, perché il suo quadrato è pari.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari. Ora, siccome "dispari per dispari" dà dispari, m non può essere dispari, perché il suo quadrato è pari. Quindi m è pari, cioè ha almeno un fattore 2 nel suo sviluppo.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari. Ora, siccome "dispari per dispari" dà dispari, m non può essere dispari, perché il suo quadrato è pari. Quindi m è pari, cioè ha almeno un fattore 2 nel suo sviluppo. Possiamo dunque scrivere

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari. Ora, siccome "dispari per dispari" dà dispari, m non può essere dispari, perché il suo quadrato è pari. Quindi m è pari, cioè ha almeno un fattore 2 nel suo sviluppo. Possiamo dunque scrivere

$$m = 2p.$$

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

ossia

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

ossia

$$n^2 = 2p^2.$$

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

ossia

$$n^2 = 2p^2.$$

Ma allora anche n^2 è pari, e dunque anche n è pari!

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

ossia

$$n^2 = 2p^2.$$

Ma allora anche n^2 è pari, e dunque anche n è pari! Quindi *m e n non possono essere primi tra loro*, il che è un assurdo perché una frazione si può sempre ridurre ai minimi termini (alla peggio numeratore o denominatore risultano pari a 1).

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

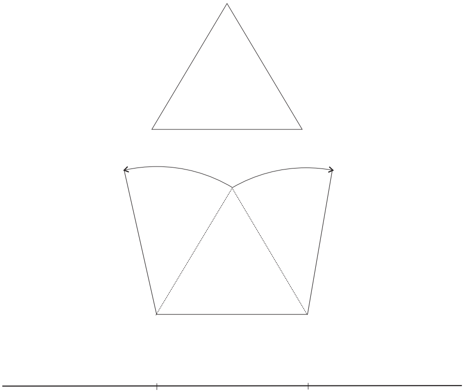
ossia

$$n^2 = 2p^2.$$

Ma allora anche n^2 è pari, e dunque anche n è pari! Quindi *m e n non possono essere primi tra loro*, il che è un assurdo perché una frazione si può sempre ridurre ai minimi termini (alla peggio numeratore o denominatore risultano pari a 1).
Dunque non è possibile *misurare* la diagonale con i procedimenti enunciati prima.

Per la verità, una situazione analoga si potrebbe incontrare anche senza ricorrere alla diagonale del quadrato. Prendiamo stavolta un triangolo equilatero e "apriamolo":

Per la verità, una situazione analoga si potrebbe incontrare anche senza ricorrere alla diagonale del quadrato. Prendiamo stavolta un triangolo equilatero e “apriamolo”:



Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato.

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché $1/3$ ha uno sviluppo decimale illimitato:

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché $1/3$ ha uno sviluppo decimale illimitato:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots.$$

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché 1/3 ha uno sviluppo decimale illimitato:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots.$$

Però ora la situazione è diversa, perché *cambiando unità di misura* (dividendola per 3 e non per 10) si ottiene la misura perfetta.

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché 1/3 ha uno sviluppo decimale illimitato:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots.$$

Però ora la situazione è diversa, perché *cambiando unità di misura* (dividendola per 3 e non per 10) si ottiene la misura perfetta.
Nel caso della diagonale, invece, *nessun cambio di unità di misura* risolve la situazione.

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché 1/3 ha uno sviluppo decimale illimitato:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots.$$

Però ora la situazione è diversa, perché *cambiando unità di misura* (dividendola per 3 e non per 10) si ottiene la misura perfetta.
Nel caso della diagonale, invece, *nessun cambio di unità di misura* risolve la situazione.
In questo caso si dice che la diagonale e il lato del quadrato sono *incommensurabili*.

Siamo quindi di fronte a un bivio:

Siamo quindi di fronte a un bivio:

1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;

Siamo quindi di fronte a un bivio:

1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;
2. estendere le operazioni di "misura di un segmento".

Siamo quindi di fronte a un bivio:

1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;
2. estendere le operazioni di "misura di un segmento".

La strada 1) è impercorribile, per due buoni motivi.

Siamo quindi di fronte a un bivio:

1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;
2. estendere le operazioni di "misura di un segmento".

La strada 1) è impercorribile, per due buoni motivi.

Il primo è che par proprio che la diagonale sia un segmento come tutti gli altri: oltretutto, se avessimo posto pari all'unità di misura la diagonale e avessimo cercato di misurare il lato, ci saremmo imbattuti nella stessa difficoltà;

Siamo quindi di fronte a un bivio:

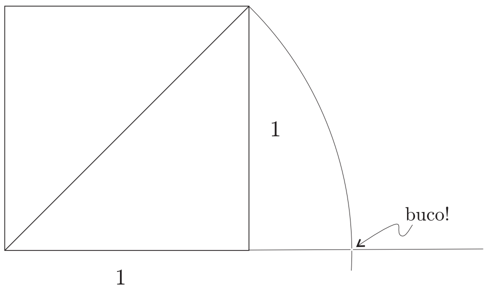
1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;
2. estendere le operazioni di “misura di un segmento”.

La strada 1) è impercorribile, per due buoni motivi.

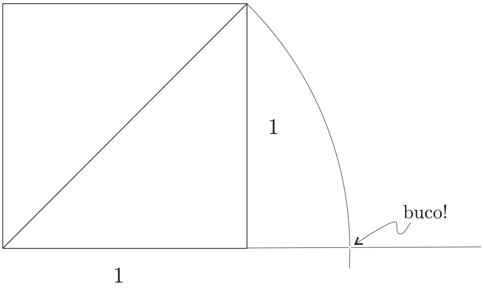
Il primo è che par proprio che la diagonale sia un segmento come tutti gli altri: oltretutto, se avessimo posto pari all’unità di misura la diagonale e avessimo cercato di misurare il lato, ci saremmo imbattuti nella stessa difficoltà;

Il secondo è che se ammettiamo che vi siano solo punti “razionali” e che le circonferenze riportino uguali distanze, dovremmo ammettere che *un segmento con un estremo all'interno di una circonferenza e l'altro estremo all'esterno non interseca la circonferenza!*.

Il secondo è che se ammettiamo che vi siano solo punti "razionali" e che le circonferenze riportino uguali distanze, dovremmo ammettere che *un segmento con un estremo all'interno di una circonferenza e l'altro estremo all'esterno non interseca la circonferenza!*.

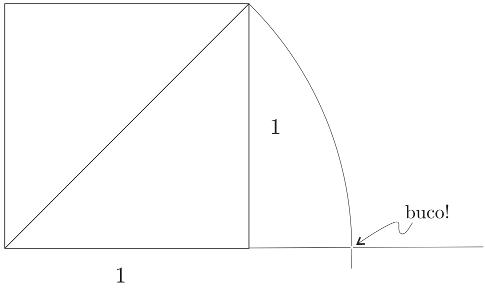


Il secondo è che se ammettiamo che vi siano solo punti "razionali" e che le circonferenze riportino uguali distanze, dovremmo ammettere che *un segmento con un estremo all'interno di una circonferenza e l'altro estremo all'esterno non interseca la circonferenza!*.



È infatti questo il caso del prolungamento del lato di base del quadrato: se nella retta vi fossero solo punti razionali, l'intersezione, che disterebbe $\sqrt{2}$ dall'estremo, non starebbe sulla retta.

Il secondo è che se ammettiamo che vi siano solo punti "razionali" e che le circonferenze riportino uguali distanze, dovremmo ammettere che *un segmento con un estremo all'interno di una circonferenza e l'altro estremo all'esterno non interseca la circonferenza!*.



È infatti questo il caso del prolungamento del lato di base del quadrato: se nella retta vi fossero solo punti razionali, l'intersezione, che disterebbe $\sqrt{2}$ dall'estremo, non starebbe sulla retta.
Nella prossima sezione vedremo come estendere il processo di misurazione.

Approssimazioni

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa “irragionevoli” ma “non razionali”, ossia che non si esprimono come rapporto)

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa "irragionevoli" ma "non razionali", ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s'intende).

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa "irragionevoli" ma "non razionali", ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s'intende). I Greci erano sostenitori di un universo nel quale i rapporti fra numeri interi fossero essenziali, come avevano scoperto essere in Musica e in Astronomia.

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa “irragionevoli” ma “non razionali”, ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s’intende). I Greci erano sostenitori di un universo nel quale i rapporti fra numeri interi fossero essenziali, come avevano scoperto essere in Musica e in Astronomia. Ma si dovettero arrendere all’evidenza.

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa “irragionevoli” ma “non razionali”, ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s’intende). I Greci erano sostenitori di un universo nel quale i rapporti fra numeri interi fossero essenziali, come avevano scoperto essere in Musica e in Astronomia. Ma si dovettero arrendere all’evidenza.

Per adeguare il concetto di misurazione alla diagonale, essi dovettero supporre in aggiunta a quanto detto, che si potesse

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa "irragionevoli" ma "non razionali", ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s'intende). I Greci erano sostenitori di un universo nel quale i rapporti fra numeri interi fossero essenziali, come avevano scoperto essere in Musica e in Astronomia. Ma si dovettero arrendere all'evidenza.

Per adeguare il concetto di misurazione alla diagonale, essi dovettero supporre in aggiunta a quanto detto, che si potesse

3. trovare una serie infinita di misure della quantità da misurare, approssimate per difetto e per eccesso.

Cosa voglia dire “approssimate per difetto” o “per eccesso” è chiaro:

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto,

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

Cosa voglia dire “approssimate per difetto” o “per eccesso” è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell’unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma “esce fuori”, la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un’approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un’approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;

Cosa voglia dire “approssimate per difetto” o “per eccesso” è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell’unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma “esce fuori”, la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un’approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un’approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;

Cosa voglia dire “approssimate per difetto” o “per eccesso” è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma “esce fuori”, la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;
- 1,4142 è per difetto, 1,4143 per eccesso;

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;
- 1,4142 è per difetto, 1,4143 per eccesso;
- e così via...

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;
- 1,4142 è per difetto, 1,4143 per eccesso;
- e così via...

Il senso profondo dell'assioma 3) è che una serie *infinita* di queste approssimazioni definisce una misura.

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;
- 1,4142 è per difetto, 1,4143 per eccesso;
- e così via...

Il senso profondo dell'assioma 3) è che una serie *infinita* di queste approssimazioni definisce una misura.

Osserviamo ancora che

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore “esatto”, essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter “stare in mezzo”, o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*.

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*. In simboli, se A e B sono i due insiemi

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*. In simboli, se A e B sono i due insiemi (per i quali per ogni $x \in A$ e $x \in B$ si abbia $a \leqslant b$), allora esiste x tale che

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*. In simboli, se A e B sono i due insiemi (per i quali per ogni $x \in A$ e $x \in B$ si abbia $a \leqslant b$), allora esiste x tale che

Per ogni $a \in A, b \in B$: $\qquad a \leqslant x \leqslant b.$

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*. In simboli, se A e B sono i due insiemi (per i quali per ogni $x \in A$ e $x \in B$ si abbia $a \leqslant b$), allora esiste x tale che

Per ogni $a \in A, b \in B$: $\qquad a \leqslant x \leqslant b.$

I numeri razionali *non* hanno queste proprietà (altrimenti $\sqrt{2}$ sarebbe razionale), mentre i "nuovi" numeri, detti numeri *reali*, sì.

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*. In simboli, se A e B sono i due insiemi (per i quali per ogni $x \in A$ e $x \in B$ si abbia $a \leqslant b$), allora esiste x tale che

Per ogni $a \in A, b \in B$: $\qquad a \leqslant x \leqslant b.$

I numeri razionali *non* hanno queste proprietà (altrimenti $\sqrt{2}$ sarebbe razionale), mentre i "nuovi" numeri, detti numeri *reali*, sì.
Come *definire* i numeri reali in modo da obbedire al principio di Dedekind (e alle altre proprietà delle operazioni) non è semplice, e qui ci concentreremo solo sulle proprietà dei numeri irrazionali.

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,4142857142857142857\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,4142857142857142857 1\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (dimostrato nella parte approfondita).

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,414285714285714285714\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (dimostrato nella parte approfondita).
Dunque un numero irrazionale *non ammette uno sviluppo decimale periodico*.

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,4142857142857142857 1\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (dimostrato nella parte approfondita).
Dunque un numero irrazionale *non ammette uno sviluppo decimale periodico*. Infatti il suo sviluppo decimale coincide con l'unione di tutte le approssimazioni per difetto (o per eccesso) fatte con sottomultipli di 10, 100, 1000, ecc.

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,4142857142857142857\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (dimostrato nella parte approfondita).
Dunque un numero irrazionale *non ammette uno sviluppo decimale periodico*. Infatti il suo sviluppo decimale coincide con l'unione di tutte le approssimazioni per difetto (o per eccesso) fatte con sottomultipli di 10, 100, 1000, ecc. Per esempio,

$$\sqrt{2} = 1,41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\ldots$$

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,414285714285714285 71\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (dimostrato nella parte approfondita).
Dunque un numero irrazionale *non ammette uno sviluppo decimale periodico*. Infatti il suo sviluppo decimale coincide con l'unione di tutte le approssimazioni per difetto (o per eccesso) fatte con sottomultipli di 10, 100, 1000, ecc. Per esempio,

$$\sqrt{2} = 1,41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\ldots$$

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

- A contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

- A contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale
- B contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale *con l'ultima cifra aumentata di 1*, e con la convenzione che se la cifra è 9 si mette 0 e si applica il riporto alla cifra precedente

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

- A contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale
- B contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale *con l'ultima cifra aumentata di 1*, e con la convenzione che se la cifra è 9 si mette 0 e si applica il riporto alla cifra precedente

(siccome lo sviluppo non è periodico, non possono esservi solo 9 da un certo punto in poi).

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

- A contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale
- B contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale *con l'ultima cifra aumentata di 1*, e con la convenzione che se la cifra è 9 si mette 0 e si applica il riporto alla cifra precedente

(siccome lo sviluppo non è periodico, non possono esservi solo 9 da un certo punto in poi).
Per esempio, se il numero è

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

- A contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale
- B contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale *con l'ultima cifra aumentata di 1*, e con la convenzione che se la cifra è 9 si mette 0 e si applica il riporto alla cifra precedente

(siccome lo sviluppo non è periodico, non possono esservi solo 9 da un certo punto in poi).
Per esempio, se il numero è

$$3,1415926\dots$$

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

- A contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale
- B contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale *con l'ultima cifra aumentata di 1*, e con la convenzione che se la cifra è 9 si mette 0 e si applica il riporto alla cifra precedente

(siccome lo sviluppo non è periodico, non possono esservi solo 9 da un certo punto in poi).
Per esempio, se il numero è

$$3,1415926\ldots$$

allora

$$A = \{3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \dots\},$$
$$B = \{4; 3,2; 3,15; 3,142; 3,1416; 3,1416; \dots\}$$

$$A = \{3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \dots\},$$
$$B = \{4; 3,2; 3,15; 3,142; 3,1416; 3,1416; \dots\}$$

Ci si rende subito conto che *ogni numero dell'insieme A è minore di tutti i numeri dell'insieme B*.

$$A = \{3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \ldots\},$$
$$B = \{4; 3,2; 3,15; 3,142; 3,1416; 3,1416; \ldots\}$$

Ci si rende subito conto che *ogni numero dell'insieme A è minore di tutti i numeri dell'insieme B*.
Dunque, per il principio di Dedekind, esiste almeno un numero x che separa i due insiemi:

$$A = \{3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \ldots\},$$
$$B = \{4; 3,2; 3,15; 3,142; 3,1416; 3,1416; \ldots\}$$

Ci si rende subito conto che *ogni numero dell'insieme A è minore di tutti i numeri dell'insieme B*.
Dunque, per il principio di Dedekind, esiste almeno un numero x che separa i due insiemi:

Per ogni $a \in A, b \in B$: $\qquad a \leqslant x \leqslant b.$

$$A = \{3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \ldots\},$$
$$B = \{4; 3,2; 3,15; 3,142; 3,1416; 3,1416; \ldots\}$$

Ci si rende subito conto che *ogni numero dell'insieme A è minore di tutti i numeri dell'insieme B*.
Dunque, per il principio di Dedekind, esiste almeno un numero x che separa i due insiemi:

Per ogni $a \in A, b \in B$: $\qquad a \leqslant x \leqslant b.$

Per mostrare che x è *unico*, supponiamo che ne esista un altro, diverso, x'. Allora $|x - x'| = \delta$ è strettamente positivo. D'altro canto la differenza fra gli elementi di B e quelli di A diventa arbitrariamente piccola, per come abbiamo costruito A e B. Ma allora entrambi i numeri x o x' non possono separare A e B a meno che non sia $x = x'$, ossia x è unico.

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{peso} = 4 \qquad 1 = \frac{2}{2} \quad \text{peso} = 4 \qquad 3 = \frac{3}{1} \quad \text{peso} = 4$$

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{peso} = 4 \qquad 1 = \frac{2}{2} \quad \text{peso} = 4 \qquad 3 = \frac{3}{1} \quad \text{peso} = 4$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{2}{3} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{3}{2} \quad \text{peso} = 5 \qquad 4 = \frac{4}{1} \quad \text{peso} = 5$$

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$
$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$
$$\frac{1}{3} \quad \text{peso} = 4 \qquad 1 = \frac{2}{2} \quad \text{peso} = 4 \qquad 3 = \frac{3}{1} \quad \text{peso} = 4$$
$$\frac{1}{4} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{2}{3} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{3}{2} \quad \text{peso} = 5 \qquad 4 = \frac{4}{1} \quad \text{peso} = 5$$

La frazione $\frac{2}{2}$ è indicata in rosso perché è "doppia"

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{peso} = 4 \qquad 1 = \frac{2}{2} \quad \text{peso} = 4 \qquad 3 = \frac{3}{1} \quad \text{peso} = 4$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{2}{3} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{3}{2} \quad \text{peso} = 5 \qquad 4 = \frac{4}{1} \quad \text{peso} = 5$$

La frazione $\frac{2}{2}$ è indicata in rosso perché è "doppia" (corrisponde a 1 che è già stata incontrata).

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- $1/2$ è la seconda, 2 la terza;

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- $1/2$ è la seconda, 2 la terza;
- $1/3$ è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente $2/2$);

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- $1/2$ è la seconda, 2 la terza;
- $1/3$ è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente $2/2$);
- $1/4$ è la sesta, $2/3$ è la settima, $3/2$ è l'ottava, 4 è la nona;

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- 1/2 è la seconda, 2 la terza;
- 1/3 è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente 2/2);
- 1/4 è la sesta, 2/3 è la settima, 3/2 è l'ottava, 4 è la nona;
- e così via...

Per quanto possa sembrare complicato, questo schema associa ad ogni frazione un numero intero.

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- 1/2 è la seconda, 2 la terza;
- 1/3 è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente 2/2);
- 1/4 è la sesta, 2/3 è la settima, 3/2 è l'ottava, 4 è la nona;
- e così via...

Per quanto possa sembrare complicato, questo schema associa ad ogni frazione un numero intero.
I matematici chiamano la possibilità di "contare" anche insiemi infiniti di numeri (come i numeri razionali) *numerabilità*.

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- 1/2 è la seconda, 2 la terza;
- 1/3 è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente 2/2);
- 1/4 è la sesta, 2/3 è la settima, 3/2 è l'ottava, 4 è la nona;
- e così via...

Per quanto possa sembrare complicato, questo schema associa ad ogni frazione un numero intero.
I matematici chiamano la possibilità di "contare" anche insiemi infiniti di numeri (come i numeri razionali) *numerabilità*. Quindi si dice che i numeri razionali sono *numerabili*.

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- 1/2 è la seconda, 2 la terza;
- 1/3 è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente 2/2);
- 1/4 è la sesta, 2/3 è la settima, 3/2 è l'ottava, 4 è la nona;
- e così via...

Per quanto possa sembrare complicato, questo schema associa ad ogni frazione un numero intero.
I matematici chiamano la possibilità di "contare" anche insiemi infiniti di numeri (come i numeri razionali) *numerabilità*. Quindi si dice che i numeri razionali sono *numerabili*.
Questo *non* si può fare con i numeri irrazionali.

L'idea è questa: supponiamo *per assurdo* che i numeri irrazionali siano numerabili, e quindi elenchiamoli tutti, così:

L'idea è questa: supponiamo *per assurdo* che i numeri irrazionali siano numerabili, e quindi elenchiamoli tutti, così:

1: 0,273984949282839039404040409298237263215612...
2: 0,156272723832723625127282874646528218282828...
3: 0,343473848279231793761763726768090029830239...
4: 0,488164048466346237846093746004638648734260...
5: 0,112723723872638716747918749812748374983879...
6: 0,347263748623958791837212632183619387192890...
7: 0,238246024320847128974309171024987320497320...
8: 0,236751231739879128738912471984713987983749...
9: 0,908098239047374654231763716387146871268789...
10: 0,465761354183481563129863189237198298737879...
11: 0,938402384723465635463256576153621572312121...
12: 0,003948389488936412361786387218726362362727...
13: 0,215626272187372198387129837198739812738900...

(i numeri azzurri sono quelli che "contano" i numeri irrazionali).

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\dots$$

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (accennato nella parte approfondita) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (accennato nella parte approfondita) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (accennato nella parte approfondita) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

$$0,364231402394\ldots$$

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (accennato nella parte approfondita) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

$$0,364231402394\ldots$$

Questo sviluppo è evidente illimitato e non periodico (altrimenti lo sarebbe stato anche quello precedente).

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (accennato nella parte approfondita) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

$$0,364231402394\ldots$$

Questo sviluppo è evidente illimitato e non periodico (altrimenti lo sarebbe stato anche quello precedente). Dunque, siccome abbiamo elencato *tutti* i numeri irrazionali, esso *deve* essere uno di quelli.

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (accennato nella parte approfondita) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

$$0,364231402394\ldots$$

Questo sviluppo è evidente illimitato e non periodico (altrimenti lo sarebbe stato anche quello precedente). Dunque, siccome abbiamo elencato *tutti* i numeri irrazionali, esso *deve* essere uno di quelli.

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa;

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa; non può essere il secondo, perché la seconda cifra decimale è diversa,

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa; non può essere il secondo, perché la seconda cifra decimale è diversa, e così via concludiamo che questo numero irrazionale *non è contenuto nell'elenco*!

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa; non può essere il secondo, perché la seconda cifra decimale è diversa, e così via concludiamo che questo numero irrazionale *non è contenuto nell'elenco*! Quindi siamo giunti ad un assurdo, e pertanto i numeri irrazionali non sono numerabili.

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa; non può essere il secondo, perché la seconda cifra decimale è diversa, e così via concludiamo che questo numero irrazionale *non è contenuto nell'elenco*! Quindi siamo giunti ad un assurdo, e pertanto i numeri irrazionali non sono numerabili.
(Per questo motivo i matematici dicono che i numeri irrazionali sono "molti di più" dei numeri razionali).

Esempi di numeri irrazionali

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali?

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1 + \sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali.

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1 + \sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p + r$ fosse razionale, si avrebbe

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p+r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1+\sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p+r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p+r=\frac{m}{n}$$

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1 + \sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p + r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p + r = \frac{m}{n}$$

da cui

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p+r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1+\sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p+r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p+r=\frac{m}{n}$$

da cui

$$r=\frac{m}{n}-p \qquad \text{che è razionale,}$$

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p+r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1+\sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p+r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p+r=\frac{m}{n}$$

da cui

$$r=\frac{m}{n}-p \qquad \text{che è razionale, il che è assurdo.}$$

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1 + \sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p + r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p + r = \frac{m}{n}$$

da cui

$$r = \frac{m}{n} - p \qquad \text{che è razionale, il che è assurdo.}$$

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

Se un numero intero a *non* è un quadrato perfetto, allora $\sqrt{a}$ è irrazionale.

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

Se un numero intero a *non* è un quadrato perfetto, allora $\sqrt{a}$ è irrazionale.

La dimostrazione di questo fatto è data nella parte approfondita.

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

Se un numero intero a *non* è un quadrato perfetto, allora $\sqrt{a}$ è irrazionale.

La dimostrazione di questo fatto è data nella parte approfondita.
In questo modo sappiamo che $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ sono tutti irrazionali.

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

Se un numero intero a *non* è un quadrato perfetto, allora $\sqrt{a}$ è irrazionale.

La dimostrazione di questo fatto è data nella parte approfondita.
In questo modo sappiamo che $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ sono tutti irrazionali.
Si può poi mostrare che se a non è una potenza n-esima, allora $\sqrt[n]{a}$ è irrazionale.

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

Se un numero intero a *non* è un quadrato perfetto, allora $\sqrt{a}$ è irrazionale.

La dimostrazione di questo fatto è data nella parte approfondita.
In questo modo sappiamo che $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ sono tutti irrazionali.
Si può poi mostrare che se a non è una potenza n-esima, allora $\sqrt[n]{a}$ è irrazionale.

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).
Per esempio, mostriamo che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Posto $x = \sqrt[3]{2}$, abbiamo ovviamente

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).
Per esempio, mostriamo che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Posto $x = \sqrt[3]{2}$, abbiamo ovviamente

$$x^3 = 2 \qquad \text{ossia} \qquad x^3 - 2 = 0.$$

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).
Per esempio, mostriamo che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Posto $x = \sqrt[3]{2}$, abbiamo ovviamente

$$x^3 = 2 \qquad \text{ossia} \qquad x^3 - 2 = 0.$$

Posto $P(x) = x^3 - 2$, abbiamo che

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).
Per esempio, mostriamo che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Posto $x = \sqrt[3]{2}$, abbiamo ovviamente

$$x^3 = 2 \qquad \text{ossia} \qquad x^3 - 2 = 0.$$

Posto $P(x) = x^3 - 2$, abbiamo che

$$P(\pm 1) \neq 0, \qquad P(\pm 2) \neq 0.$$

Di conseguenza, $\sqrt[3]{2}$, che *è* una soluzione dell'equazione, deve essere irrazionale.

A parte le radici *n*-esime e loro combinazioni, ben poco si sa su *altri* numeri irrazionali (a parte, ovviamente, quelli noti con gli sviluppi non periodici, per i quali, però, difficilmente si hanno legami con problemi matematici).

A parte le radici *n*-esime e loro combinazioni, ben poco si sa su *altri* numeri irrazionali (a parte, ovviamente, quelli noti con gli sviluppi non periodici, per i quali, però, difficilmente si hanno legami con problemi matematici).
Il più celebre di questi numeri è $\pi = 3,141592\ldots$, il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro. La prima dimostrazione che π è irrazionale è del 1761 di Johann Heinrich Lambert. Oggi si conoscono miliardi di cifre decimali di π, e siti internet che riportano dove si possa trovare la propria data di nascita o numero di telefono nello sviluppo decimale di π.

Curiosità sui numeri irrazionali

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2".

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2". Anche il numero irrazionale

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2". Anche il numero irrazionale

$$0,010011000111000011110000011111100000\ldots$$

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Si può mostrare (svolto nella parte approfondita) che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2". Anche il numero irrazionale

$$0,010011000111000011110000011111000000\ldots$$

è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni".

è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni". Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni".
Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

Seconda curiosità
Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$.

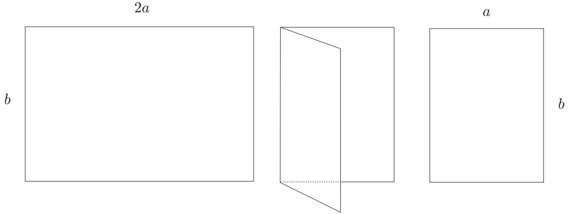
è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni". Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

Seconda curiosità
Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.

è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni". Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

Seconda curiosità

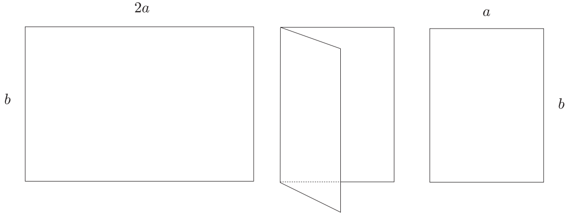
Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.



è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni". Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

Seconda curiosità

Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.

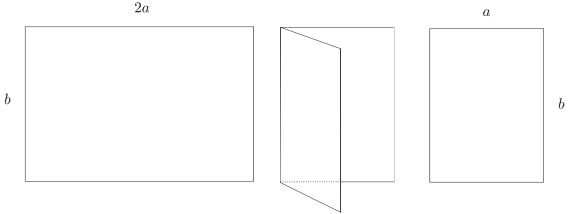


Dalla figura si vede che, se si vuol mantenere la similitudine, deve essere

è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni". Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

Seconda curiosità

Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.



Dalla figura si vede che, se si vuol mantenere la similitudine, deve essere

$$2a : b = b : a$$

e quindi

e quindi

$$b^2 = 2a^2 \qquad \text{da cui} \qquad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2.$$

e quindi

$$b^2 = 2a^2 \qquad \text{da cui} \qquad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2.$$

Operazioni con i numeri irrazionali

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale.

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il *prodotto* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale.

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il *prodotto* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{che è razionale.}$$

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il *prodotto* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{che è razionale.}$$

Neanche l'*elevamento a potenza* di numeri irrazionali non è sempre irrazionale.

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il *prodotto* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{che è razionale.}$$

Neanche l'*elevamento a potenza* di numeri irrazionali non è sempre irrazionale.
A questo proposito vi è una interessante "dimostrazione" non costruttiva.

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il *prodotto* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{che è razionale.}$$

Neanche l'*elevamento a potenza* di numeri irrazionali non è sempre irrazionale.
A questo proposito vi è una interessante "dimostrazione" non costruttiva.
Sia $A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Se A è razionale, allora abbiamo trovato un esempio.

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il *prodotto* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{che è razionale.}$$

Neanche l'*elevamento a potenza* di numeri irrazionali non è sempre irrazionale.
A questo proposito vi è una interessante "dimostrazione" non costruttiva.
Sia $A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Se A è razionale, allora abbiamo trovato un esempio.

Se viceversa A non è razionale, cioè irrazionale, allora

Se viceversa A non è razionale, cioè irrazionale, allora

$$A^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \qquad \text{che è razionale.}$$

Se viceversa A non è razionale, cioè irrazionale, allora

$$A^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il bello di questa dimostrazione è che *non si sa* quale delle due possibilità sia quella giusta.

Se viceversa A non è razionale, cioè irrazionale, allora

$$A^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il bello di questa dimostrazione è che *non si sa* quale delle due possibilità sia quella giusta.
Per questi motivi non è immediato, per esempio, che $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ è irrazionale (si può dimostrare con il metodo di Ruffini).

Se viceversa A non è razionale, cioè irrazionale, allora

$$A^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il bello di questa dimostrazione è che *non si sa* quale delle due possibilità sia quella giusta.
Per questi motivi non è immediato, per esempio, che $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ è irrazionale (si può dimostrare con il metodo di Ruffini).
L'insieme dei numeri irrazionali non è quindi chiuso rispetto alle più semplici operazioni, e pertanto ha scarso interesse per l'Algebra.

Se viceversa A non è razionale, cioè irrazionale, allora

$$A^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il bello di questa dimostrazione è che *non si sa* quale delle due possibilità sia quella giusta.
Per questi motivi non è immediato, per esempio, che $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ è irrazionale (si può dimostrare con il metodo di Ruffini).
L'insieme dei numeri irrazionali non è quindi chiuso rispetto alle più semplici operazioni, e pertanto ha scarso interesse per l'Algebra.
Sono molto più interessanti alcuni suoi sottoinsiemi, uno dei quali viene esaminato fra poco.

Famiglie di numeri irrazionali

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

$$a + b\sqrt{n},$$

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

$$a + b\sqrt{n},$$

dove a, b sono razionali e n è un numero *fissato* (non un quadrato perfetto, cosicché i numeri non sono razionali), hanno interessanti proprietà algebriche.

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

$$a + b\sqrt{n},$$

dove a, b sono razionali e n è un numero *fissato* (non un quadrato perfetto, cosicché i numeri non sono razionali), hanno interessanti proprietà algebriche.
Intanto *essi contengono come sottoinsieme i numeri razionali*: basta prendere $b = 0$.

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

$$a + b\sqrt{n},$$

dove a, b sono razionali e n è un numero *fissato* (non un quadrato perfetto, cosicché i numeri non sono razionali), hanno interessanti proprietà algebriche.
Intanto *essi contengono come sottoinsieme i numeri razionali*: basta prendere $b = 0$.
La *somma* (algebrica) è interna, in quanto

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

$$a + b\sqrt{n},$$

dove a, b sono razionali e n è un numero *fissato* (non un quadrato perfetto, cosicché i numeri non sono razionali), hanno interessanti proprietà algebriche.
Intanto *essi contengono come sottoinsieme i numeri razionali*: basta prendere $b = 0$.
La *somma* (algebrica) è interna, in quanto

$$(a + b\sqrt{n}) + (c + d\sqrt{n}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{n}$$

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

$$a + b\sqrt{n},$$

dove a, b sono razionali e n è un numero *fissato* (non un quadrato perfetto, cosicché i numeri non sono razionali), hanno interessanti proprietà algebriche.
Intanto *essi contengono come sottoinsieme i numeri razionali*: basta prendere $b = 0$.
La *somma* (algebrica) è interna, in quanto

$$(a + b\sqrt{n}) + (c + d\sqrt{n}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{n}$$

che fa parte della famiglia.

Per esempio,

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n})=ac+ad\sqrt{n}+bc\sqrt{n}+bdn=(ac+bdn)+(ad+bc)\sqrt{n}$$

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n})=ac+ad\sqrt{n}+bc\sqrt{n}+bdn=(ac+bdn)+(ad+bc)\sqrt{n}$$

che fa parte della famiglia.

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n})=ac+ad\sqrt{n}+bc\sqrt{n}+bdn=(ac+bdn)+(ad+bc)\sqrt{n}$$

che fa parte della famiglia.
Per esempio,

$$(2-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=8-3-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5-2\sqrt{3}.$$

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n})=ac+ad\sqrt{n}+bc\sqrt{n}+bdn=(ac+bdn)+(ad+bc)\sqrt{n}$$

che fa parte della famiglia.
Per esempio,

$$(2-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=8-3-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5-2\sqrt{3}.$$

Con molta pazienza, si può dimostrare che l'addizione e la moltiplicazione così introdotte godono della proprietà associativa, commutativa, distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione, ammettono elementi neutri rispettivamente 0 e 1.

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n})=ac+ad\sqrt{n}+bc\sqrt{n}+bdn=(ac+bdn)+(ad+bc)\sqrt{n}$$

che fa parte della famiglia.
Per esempio,

$$(2-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=8-3-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5-2\sqrt{3}.$$

Con molta pazienza, si può dimostrare che l'addizione e la moltiplicazione così introdotte godono della proprietà associativa, commutativa, distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione, ammettono elementi neutri rispettivamente 0 e 1.
Del resto, ciò non sorprende in quanto esse assomigliano alla moltiplicazione fra polinomi di primo grado del tipo $a+bx$, con la convenzione che $x^2=n$.

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n})=ac+ad\sqrt{n}+bc\sqrt{n}+bdn=(ac+bdn)+(ad+bc)\sqrt{n}$$

che fa parte della famiglia.
Per esempio,

$$(2-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=8-3-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5-2\sqrt{3}.$$

Con molta pazienza, si può dimostrare che l'addizione e la moltiplicazione così introdotte godono della proprietà associativa, commutativa, distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione, ammettono elementi neutri rispettivamente 0 e 1.
Del resto, ciò non sorprende in quanto esse assomigliano alla moltiplicazione fra polinomi di primo grado del tipo $a+bx$, con la convenzione che $x^2=n$.

Un fatto interessante è che esiste nella famiglia anche il *reciproco* di un numero non nullo.

Un fatto interessante è che esiste nella famiglia anche il *reciproco* di un numero non nullo. Infatti, se $a, b \neq 0$, abbiamo

Un fatto interessante è che esiste nella famiglia anche il *reciproco* di un numero non nullo. Infatti, se $a, b \neq 0$, abbiamo

$$\frac{1}{a+b\sqrt{n}} = \frac{a-b\sqrt{n}}{(a+b\sqrt{n})(a-b\sqrt{n})} = \frac{a-b\sqrt{n}}{a^2-b^2n} = \frac{a}{a^2-b^2n}+\frac{b}{a^2-b^2n}\sqrt{n}$$

Un fatto interessante è che esiste nella famiglia anche il *reciproco* di un numero non nullo. Infatti, se $a, b \neq 0$, abbiamo

$$\frac{1}{a+b\sqrt{n}} = \frac{a-b\sqrt{n}}{(a+b\sqrt{n})(a-b\sqrt{n})} = \frac{a-b\sqrt{n}}{a^2-b^2n} = \frac{a}{a^2-b^2n} + \frac{b}{a^2-b^2n}\sqrt{n}$$

che è di nuovo della famiglia.

Un fatto interessante è che esiste nella famiglia anche il *reciproco* di un numero non nullo. Infatti, se $a, b \neq 0$, abbiamo

$$\frac{1}{a+b\sqrt{n}} = \frac{a-b\sqrt{n}}{(a+b\sqrt{n})(a-b\sqrt{n})} = \frac{a-b\sqrt{n}}{a^2-b^2n} = \frac{a}{a^2-b^2n} + \frac{b}{a^2-b^2n}\sqrt{n}$$

che è di nuovo della famiglia.
In questo modo, questi numeri hanno una struttura molto simile a quella dei numeri razionali. Essi sono di grande aiuto nella soluzione di alcuni problemi di teoria dei numeri.

Parte III

percorso approfondito

Segmenti e numeri irrazionali

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.
Supponiamo di avere un quadrato, come in figura, e supponiamo che ciascun lato misuri 1

Segmenti e numeri irrazionali

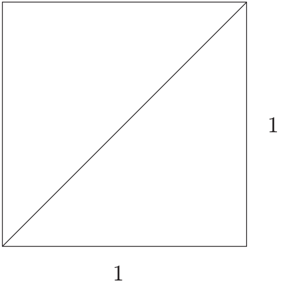
Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.
Supponiamo di avere un quadrato, come in figura, e supponiamo che ciascun lato misuri 1 (ossia che essi siano congruenti all'unità di misura dei segmenti).

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.
Supponiamo di avere un quadrato, come in figura, e supponiamo che ciascun lato misuri 1 (ossia che essi siano congruenti all'unità di misura dei segmenti).
Tracciamo la diagonale e chiediamoci: quanto misura?

Segmenti e numeri irrazionali

Uno dei modi più semplici di convincersi dell'esistenza (e della necessità) dei numeri irrazionali è la misura di un segmento.
Supponiamo di avere un quadrato, come in figura, e supponiamo che ciascun lato misuri 1 (ossia che essi siano congruenti all'unità di misura dei segmenti).
Tracciamo la diagonale e chiediamoci: quanto misura?



Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Se la misura di un segmento consiste *esclusivamente* in

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Se la misura di un segmento consiste *esclusivamente* in

1. Dividere l'unità di misura in un numero qualunque di parti uguali (sottomultipli);

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Se la misura di un segmento consiste *esclusivamente* in

1. Dividere l'unità di misura in un numero qualunque di parti uguali (sottomultipli);
2. Riportare un adeguato numero di sottomultipli fino a ricoprire *esattamente* il segmento da misurare;

Grazie al teorema di Pitagora, la diagonale *dovrebbe* misurare

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Siccome è difficile dubitare del teorema di Pitagora, ci si può chiedere cosa significhi "misurare $\sqrt{2}$".

Se la misura di un segmento consiste *esclusivamente* in

1. Dividere l'unità di misura in un numero qualunque di parti uguali (sottomultipli);
2. Riportare un adeguato numero di sottomultipli fino a ricoprire *esattamente* il segmento da misurare;

allora sorgerebbero gravi problemi. Vediamo perché.

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura.

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Riportando m volte (m intero) un sottomultiplo, avremo m volte $1/n$, cioè m/n volte l'unità di misura:

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Riportando m volte (m intero) un sottomultiplo, avremo m volte $1/n$, cioè m/n volte l'unità di misura:

$$141\,\mathrm{mm} = 141 \cdot \frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = \frac{141}{1000}\,\mathrm{m}, \text{ ecc.}$$

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Riportando m volte (m intero) un sottomultiplo, avremo m volte $1/n$, cioè m/n volte l'unità di misura:

$$141\,\mathrm{mm} = 141 \cdot \frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = \frac{141}{1000}\,\mathrm{m}, \text{ ecc.}$$

In tutti i casi, il numero che compare davanti all'unità di misura (che vorremmo chiamare "misura" del segmento) è dato da un numero razionale.

Chiaramente un sottomultiplo dell'unità di misura individuerà una frazione, del tipo $1/n$ con n intero, dell'unità di misura. Per esempio, se l'unità di misura è il metro, avremo

$$\frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}, \quad \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}, \text{ ecc.}$$

Riportando m volte (m intero) un sottomultiplo, avremo m volte $1/n$, cioè m/n volte l'unità di misura:

$$141\,\mathrm{mm} = 141 \cdot \frac{1}{1000}\,\mathrm{m} = \frac{141}{1000}\,\mathrm{m}, \text{ ecc.}$$

In tutti i casi, il numero che compare davanti all'unità di misura (che vorremmo chiamare "misura" del segmento) è dato da un numero razionale.
Ci chiediamo allora *quale numero razionale sia* $\sqrt{2}$.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari. Ora, siccome "dispari per dispari" dà dispari, m non può essere dispari, perché il suo quadrato è pari.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari. Ora, siccome "dispari per dispari" dà dispari, m non può essere dispari, perché il suo quadrato è pari. Quindi m è pari, cioè ha almeno un fattore 2 nel suo sviluppo.

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari. Ora, siccome "dispari per dispari" dà dispari, m non può essere dispari, perché il suo quadrato è pari. Quindi m è pari, cioè ha almeno un fattore 2 nel suo sviluppo. Possiamo dunque scrivere

Fu forse proprio Pitagora ad accorgersi che $\sqrt{2}$ *non poteva essere un numero razionale*. Infatti, supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

(l'unità di misura—metri o millimetri—, evidentemente, non conta). Possiamo poi sempre pensare che la frazione sia ridotta ai minimi termini (cioè che m e n non abbiano fattori comuni).

Da questa relazione, elevando al quadrato, si trae

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e quindi

$$m^2 = 2n^2.$$

Da qui si legge che m^2 è un multiplo di 2, cioè è pari. Ora, siccome "dispari per dispari" dà dispari, m non può essere dispari, perché il suo quadrato è pari. Quindi m è pari, cioè ha almeno un fattore 2 nel suo sviluppo. Possiamo dunque scrivere

$$m = 2p.$$

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

ossia

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

ossia

$$n^2 = 2p^2.$$

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

ossia

$$n^2 = 2p^2.$$

Ma allora anche n^2 è pari, e dunque anche n è pari!

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

ossia

$$n^2 = 2p^2.$$

Ma allora anche n^2 è pari, e dunque anche n è pari! Quindi *m e n non possono essere primi tra loro*, il che è un assurdo perché una frazione si può sempre ridurre ai minimi termini (alla peggio numeratore o denominatore risultano pari a 1).

Sostituendo nella precedente relazione ($m^2 = 2n^2$) scopriamo che

$$4p^2 = 2n^2$$

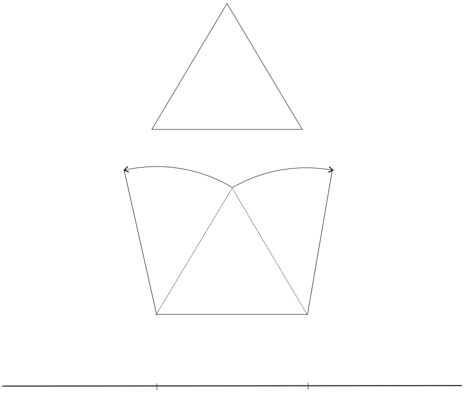
ossia

$$n^2 = 2p^2.$$

Ma allora anche n^2 è pari, e dunque anche n è pari! Quindi *m e n non possono essere primi tra loro*, il che è un assurdo perché una frazione si può sempre ridurre ai minimi termini (alla peggio numeratore o denominatore risultano pari a 1).
Dunque non è possibile *misurare* la diagonale con i procedimenti enunciati prima.

Per la verità, una situazione analoga si potrebbe incontrare anche senza ricorrere alla diagonale del quadrato. Prendiamo stavolta un triangolo equilatero e "apriamolo":

Per la verità, una situazione analoga si potrebbe incontrare anche senza ricorrere alla diagonale del quadrato. Prendiamo stavolta un triangolo equilatero e "apriamolo":



Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato.

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché $1/3$ ha uno sviluppo decimale illimitato:

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché 1/3 ha uno sviluppo decimale illimitato:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots.$$

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché $1/3$ ha uno sviluppo decimale illimitato:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots.$$

Però ora la situazione è diversa, perché *cambiando unità di misura* (dividendola per 3 e non per 10) si ottiene la misura perfetta.

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché $1/3$ ha uno sviluppo decimale illimitato:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots.$$

Però ora la situazione è diversa, perché *cambiando unità di misura* (dividendola per 3 e non per 10) si ottiene la misura perfetta.
Nel caso della diagonale, invece, *nessun cambio di unità di misura* risolve la situazione.

Immaginiamo che il perimetro sia pari all'unità di misura (1 m), e di voler trovare la lunghezza del lato. Se insistiamo a dividere per potenze di 10, cioè a ricorrere a decimetri, centimetri, millimetri, ecc., ci accorgiamo che anche stavolta la procedura non ha termine, perché 1/3 ha uno sviluppo decimale illimitato:

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots.$$

Però ora la situazione è diversa, perché *cambiando unità di misura* (dividendola per 3 e non per 10) si ottiene la misura perfetta.
Nel caso della diagonale, invece, *nessun cambio di unità di misura* risolve la situazione.
In questo caso si dice che la diagonale e il lato del quadrato sono *incommensurabili*.

Siamo quindi di fronte a un bivio:

Siamo quindi di fronte a un bivio:

1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;

Siamo quindi di fronte a un bivio:

1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;
2. estendere le operazioni di “misura di un segmento”.

Siamo quindi di fronte a un bivio:

1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;
2. estendere le operazioni di “misura di un segmento”.

La strada 1) è impercorribile, per due buoni motivi.

Siamo quindi di fronte a un bivio:

1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;
2. estendere le operazioni di "misura di un segmento".

La strada 1) è impercorribile, per due buoni motivi.

Il primo è che par proprio che la diagonale sia un segmento come tutti gli altri: oltretutto, se avessimo posto pari all'unità di misura la diagonale e avessimo cercato di misurare il lato, ci saremmo imbattuti nella stessa difficoltà;

Siamo quindi di fronte a un bivio:

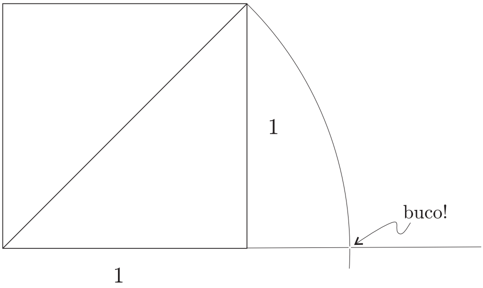
1. rinunciare alla misura della diagonale del quadrato;
2. estendere le operazioni di "misura di un segmento".

La strada 1) è impercorribile, per due buoni motivi.

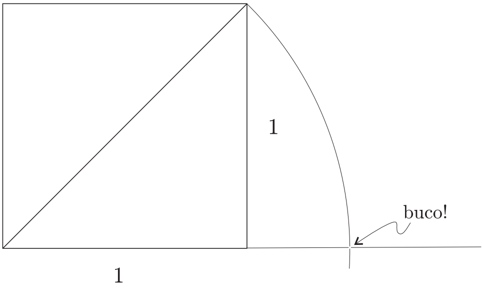
Il primo è che par proprio che la diagonale sia un segmento come tutti gli altri: oltretutto, se avessimo posto pari all'unità di misura la diagonale e avessimo cercato di misurare il lato, ci saremmo imbattuti nella stessa difficoltà;

Il secondo è che se ammettiamo che vi siano solo punti “razionali” e che le circonferenze riportino uguali distanze, dovremmo ammettere che *un segmento con un estremo all'interno di una circonferenza e l'altro estremo all'esterno non interseca la circonferenza!*.

Il secondo è che se ammettiamo che vi siano solo punti "razionali" e che le circonferenze riportino uguali distanze, dovremmo ammettere che *un segmento con un estremo all'interno di una circonferenza e l'altro estremo all'esterno non interseca la circonferenza!*.

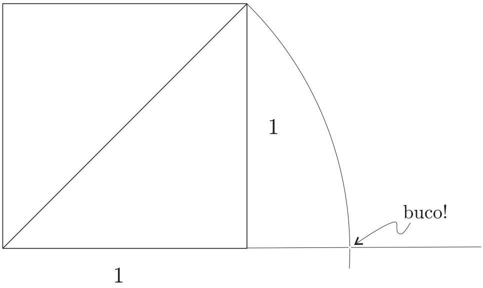


Il secondo è che se ammettiamo che vi siano solo punti "razionali" e che le circonferenze riportino uguali distanze, dovremmo ammettere che *un segmento con un estremo all'interno di una circonferenza e l'altro estremo all'esterno non interseca la circonferenza!*.



È infatti questo il caso del prolungamento del lato di base del quadrato: se nella retta vi fossero solo punti razionali, l'intersezione, che disterebbe $\sqrt{2}$ dall'estremo, non starebbe sulla retta.

Il secondo è che se ammettiamo che vi siano solo punti "razionali" e che le circonferenze riportino uguali distanze, dovremmo ammettere che *un segmento con un estremo all'interno di una circonferenza e l'altro estremo all'esterno non interseca la circonferenza!*.



È infatti questo il caso del prolungamento del lato di base del quadrato: se nella retta vi fossero solo punti razionali, l'intersezione, che disterebbe $\sqrt{2}$ dall'estremo, non starebbe sulla retta.
Nella prossima sezione vedremo come estendere il processo di misurazione.

Approssimazioni

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa “irragionevoli” ma “non razionali”, ossia che non si esprimono come rapporto)

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa "irragionevoli" ma "non razionali", ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s'intende).

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa “irragionevoli” ma “non razionali”, ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s’intende). I Greci erano sostenitori di un universo nel quale i rapporti fra numeri interi fossero essenziali, come avevano scoperto essere in Musica e in Astronomia.

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa "irragionevoli" ma "non razionali", ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s'intende). I Greci erano sostenitori di un universo nel quale i rapporti fra numeri interi fossero essenziali, come avevano scoperto essere in Musica e in Astronomia. Ma si dovettero arrendere all'evidenza.

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa "irragionevoli" ma "non razionali", ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s'intende). I Greci erano sostenitori di un universo nel quale i rapporti fra numeri interi fossero essenziali, come avevano scoperto essere in Musica e in Astronomia. Ma si dovettero arrendere all'evidenza.

Per adeguare il concetto di misurazione alla diagonale, essi dovettero supporre in aggiunta a quanto detto, che si potesse

Approssimazioni

La scoperta dei numeri irrazionali (che non significa “irragionevoli” ma “non razionali”, ossia che non si esprimono come rapporto) destò molto sconcerto nel mondo greco (degli studiosi, s'intende). I Greci erano sostenitori di un universo nel quale i rapporti fra numeri interi fossero essenziali, come avevano scoperto essere in Musica e in Astronomia. Ma si dovettero arrendere all'evidenza.

Per adeguare il concetto di misurazione alla diagonale, essi dovettero supporre in aggiunta a quanto detto, che si potesse

3. trovare una serie infinita di misure della quantità da misurare, approssimate per difetto e per eccesso.

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro:

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto,

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.

Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.

Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;
- 1,4142 è per difetto, 1,4143 per eccesso;

Cosa voglia dire “approssimate per difetto” o “per eccesso” è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma “esce fuori”, la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;
- 1,4142 è per difetto, 1,4143 per eccesso;
- e così via...

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.
Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.
Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;
- 1,4142 è per difetto, 1,4143 per eccesso;
- e così via...

Il senso profondo dell'assioma 3) è che una serie *infinita* di queste approssimazioni definisce una misura.

Cosa voglia dire "approssimate per difetto" o "per eccesso" è chiaro: se un certo segmento (eventualmente sottomultiplo dell'unità di misura), riportato un numero dato di volte, *non* ricopre il segmento, allora la sua misura è approssimata per difetto, altrimenti, se lo ricopre ma "esce fuori", la misura sarà approssimata per eccesso.

Per esempio, 1 è un'approssimazione per difetto della diagonale, mentre 2 lo è per eccesso.

Con maggiore pazienza, si potrebbe verificare che $99/70$ è un'approssimazione per eccesso a meno di $1/10\,000$, ma solitamente si usano le frazioni decimali. Misurando con pazienza si trova che

- 1 è per difetto, 2 per eccesso;
- 1,4 è per difetto, 1,5 per eccesso;
- 1,41 è per difetto, 1,42 per eccesso;
- 1,414 è per difetto, 1,415 per eccesso;
- 1,4142 è per difetto, 1,4143 per eccesso;
- e così via...

Il senso profondo dell'assioma 3) è che una serie *infinita* di queste approssimazioni definisce una misura.

Osserviamo ancora che

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*.

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*. In simboli, se A e B sono i due insiemi

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*. In simboli, se A e B sono i due insiemi (per i quali per ogni $x \in A$ e $x \in B$ si abbia $a \leqslant b$), allora esiste x tale che

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*. In simboli, se A e B sono i due insiemi (per i quali per ogni $x \in A$ e $x \in B$ si abbia $a \leqslant b$), allora esiste x tale che

Per ogni $a \in A, b \in B$: $\quad a \leqslant x \leqslant b.$

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*. In simboli, se A e B sono i due insiemi (per i quali per ogni $x \in A$ e $x \in B$ si abbia $a \leqslant b$), allora esiste x tale che

Per ogni $a \in A, b \in B$: $$a \leqslant x \leqslant b.$$

I numeri razionali *non* hanno queste proprietà (altrimenti $\sqrt{2}$ sarebbe razionale), mentre i "nuovi" numeri, detti numeri *reali*, sì.

Osserviamo ancora che *ciascuna approssimazione per difetto è minore di tutte le approssimazioni per difetto*, e che il valore "esatto", essendo superiore a tutte le prime e inferiore a tutte le seconde, deve poter "stare in mezzo", o *separare* i due insiemi di approssimazioni.
Questo ha permesso ai matematici di enunciare un principio, detto di *Dedekind*, che afferma che *i numeri adeguati a rappresentare delle misure devono sempre poter separare due insiemi (non vuoti) di numeri, nei quali ogni numero del primo insieme è inferiore a tutti quelli del secondo*. In simboli, se A e B sono i due insiemi (per i quali per ogni $x \in A$ e $x \in B$ si abbia $a \leqslant b$), allora esiste x tale che

Per ogni $a \in A, b \in B$: $\qquad a \leqslant x \leqslant b.$

I numeri razionali *non* hanno queste proprietà (altrimenti $\sqrt{2}$ sarebbe razionale), mentre i "nuovi" numeri, detti numeri *reali*, sì.
Come *definire* i numeri reali in modo da obbedire al principio di Dedekind (e alle altre proprietà delle operazioni) non è semplice, e qui ci concentreremo solo sulle proprietà dei numeri irrazionali.

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,4142857142857142857\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,414285714285714285 71\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (la dimostrazione è nella prossima pagina).

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,4142857142857142857\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (la dimostrazione è nella prossima pagina).
Dunque un numero irrazionale *non ammette uno sviluppo decimale periodico*.

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,414285714285714285 71\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (la dimostrazione è nella prossima pagina).
Dunque un numero irrazionale *non ammette uno sviluppo decimale periodico*. Infatti il suo sviluppo decimale coincide con l'unione di tutte le approssimazioni per difetto (o per eccesso) fatte con sottomultipli di 10, 100, 1000, ecc.

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,4142857142857142857 1\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (la dimostrazione è nella prossima pagina).
Dunque un numero irrazionale *non ammette uno sviluppo decimale periodico*. Infatti il suo sviluppo decimale coincide con l'unione di tutte le approssimazioni per difetto (o per eccesso) fatte con sottomultipli di 10, 100, 1000, ecc. Per esempio,

$$\sqrt{2} = 1,41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\ldots$$

Sviluppi decimali e numeri irrazionali

Grazie alla regola che permette, dato uno sviluppo decimale, di trovarne la frazione generatrice, sappiamo che
uno sviluppo decimale periodico individua sempre un numero razionale.
Così, per esempio,

$$\frac{99}{70} = 1,4142857142857142857\ldots = 1,41\overline{428571}.$$

Si può anche mostrare il viceversa, cioè che *un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico.* (la dimostrazione è nella prossima pagina).
Dunque un numero irrazionale *non ammette uno sviluppo decimale periodico*. Infatti il suo sviluppo decimale coincide con l'unione di tutte le approssimazioni per difetto (o per eccesso) fatte con sottomultipli di 10, 100, 1000, ecc. Per esempio,

$$\sqrt{2} = 1,41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\ldots$$

Mostriamo che un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico. È un fatto noto intuitivamente, ma la dimostrazione non è troppo difficile.

Mostriamo che un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico. È un fatto noto intuitivamente, ma la dimostrazione non è troppo difficile.
Se dividiamo due interi m e n (con $n \neq 0$) con il consueto algoritmo della divisione, arriveremo al punto fatidico dell'inserimento della virgola e l'aggiunta degli zeri. Proseguendo vi sono due possibilità:

Mostriamo che un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico. È un fatto noto intuitivamente, ma la dimostrazione non è troppo difficile.
Se dividiamo due interi m e n (con $n \neq 0$) con il consueto algoritmo della divisione, arriveremo al punto fatidico dell'inserimento della virgola e l'aggiunta degli zeri. Proseguendo vi sono due possibilità:

- a un certo punto il resto è zero;

Mostriamo che un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico. È un fatto noto intuitivamente, ma la dimostrazione non è troppo difficile.
Se dividiamo due interi m e n (con $n \neq 0$) con il consueto algoritmo della divisione, arriveremo al punto fatidico dell'inserimento della virgola e l'aggiunta degli zeri. Proseguendo vi sono due possibilità:

- a un certo punto il resto è zero;
- il resto non è mai zero.

Mostriamo che un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico. È un fatto noto intuitivamente, ma la dimostrazione non è troppo difficile.
Se dividiamo due interi m e n (con $n \neq 0$) con il consueto algoritmo della divisione, arriveremo al punto fatidico dell'inserimento della virgola e l'aggiunta degli zeri. Proseguendo vi sono due possibilità:

- a un certo punto il resto è zero;
- il resto non è mai zero.

Nel primo caso, la divisione si arresta e lo sviluppo decimale ha infiniti zeri da lì in poi (è uno sviluppo periodico anche questo).

Mostriamo che un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico. È un fatto noto intuitivamente, ma la dimostrazione non è troppo difficile.
Se dividiamo due interi m e n (con $n \neq 0$) con il consueto algoritmo della divisione, arriveremo al punto fatidico dell'inserimento della virgola e l'aggiunta degli zeri. Proseguendo vi sono due possibilità:

- a un certo punto il resto è zero;
- il resto non è mai zero.

Nel primo caso, la divisione si arresta e lo sviluppo decimale ha infiniti zeri da lì in poi (è uno sviluppo periodico anche questo).
Nel secondo caso, il resto può andare da 1 al divisore (escluso), e dovendo continuare all'infinito, prima o poi deve ripetersi. Dal momento in cui il resto si ripete termina un periodo e tutto lo schema riprende daccapo, all'infinito.

Mostriamo che un numero razionale ammette sempre uno sviluppo decimale periodico. È un fatto noto intuitivamente, ma la dimostrazione non è troppo difficile.
Se dividiamo due interi m e n (con $n \neq 0$) con il consueto algoritmo della divisione, arriveremo al punto fatidico dell'inserimento della virgola e l'aggiunta degli zeri. Proseguendo vi sono due possibilità:

- a un certo punto il resto è zero;
- il resto non è mai zero.

Nel primo caso, la divisione si arresta e lo sviluppo decimale ha infiniti zeri da lì in poi (è uno sviluppo periodico anche questo).
Nel secondo caso, il resto può andare da 1 al divisore (escluso), e dovendo continuare all'infinito, prima o poi deve ripetersi. Dal momento in cui il resto si ripete termina un periodo e tutto lo schema riprende daccapo, all'infinito.

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

- A contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

- A contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale
- B contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale *con l'ultima cifra aumentata di 1*, e con la convenzione che se la cifra è 9 si mette 0 e si applica il riporto alla cifra precedente

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

- A contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale
- B contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale *con l'ultima cifra aumentata di 1*, e con la convenzione che se la cifra è 9 si mette 0 e si applica il riporto alla cifra precedente

(siccome lo sviluppo non è periodico, non possono esservi solo 9 da un certo punto in poi).

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

- A contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale
- B contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale *con l'ultima cifra aumentata di 1*, e con la convenzione che se la cifra è 9 si mette 0 e si applica il riporto alla cifra precedente

(siccome lo sviluppo non è periodico, non possono esservi solo 9 da un certo punto in poi).
Per esempio, se il numero è

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

- A contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale
- B contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale *con l'ultima cifra aumentata di 1*, e con la convenzione che se la cifra è 9 si mette 0 e si applica il riporto alla cifra precedente

(siccome lo sviluppo non è periodico, non possono esservi solo 9 da un certo punto in poi).
Per esempio, se il numero è

$$3,1415926\dots$$

Mostriamo anche che *uno sviluppo decimale non periodico individua un unico numero irrazionale*.
Il punto, chiaramente, è che lo sviluppo *individui* un numero (dopodiché è ovvio che il numero deve essere irrazionale, altrimenti sarebbe periodico).
Dato lo sviluppo decimale, consideriamo due insiemi A e B di numeri:

- A contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale
- B contiene gli sviluppi troncati alla prima, seconda, terza, ecc. cifra decimale *con l'ultima cifra aumentata di 1*, e con la convenzione che se la cifra è 9 si mette 0 e si applica il riporto alla cifra precedente

(siccome lo sviluppo non è periodico, non possono esservi solo 9 da un certo punto in poi).
Per esempio, se il numero è

$$3,1415926\ldots$$

allora

$$A = \{3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \ldots\},$$
$$B = \{4; 3,2; 3,15; 3,142; 3,1416; 3,1416; \ldots\}$$

$$A = \{3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \ldots\},$$
$$B = \{4; 3,2; 3,15; 3,142; 3,1416; 3,1416; \ldots\}$$

Ci si rende subito conto che *ogni numero dell'insieme A è minore di tutti i numeri dell'insieme B*.

$$A = \{3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \ldots\},$$
$$B = \{4; 3,2; 3,15; 3,142; 3,1416; 3,1416; \ldots\}$$

Ci si rende subito conto che *ogni numero dell'insieme A è minore di tutti i numeri dell'insieme B*.
Dunque, per il principio di Dedekind, esiste almeno un numero x che separa i due insiemi:

$$A = \{3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \ldots\},$$
$$B = \{4; 3,2; 3,15; 3,142; 3,1416; 3,1416; \ldots\}$$

Ci si rende subito conto che *ogni numero dell'insieme A è minore di tutti i numeri dell'insieme B*.
Dunque, per il principio di Dedekind, esiste almeno un numero x che separa i due insiemi:

Per ogni $a \in A, b \in B$: $\qquad a \leqslant x \leqslant b.$

$$A = \{3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \ldots\},$$
$$B = \{4; 3,2; 3,15; 3,142; 3,1416; 3,1416; \ldots\}$$

Ci si rende subito conto che *ogni numero dell'insieme A è minore di tutti i numeri dell'insieme B*.
Dunque, per il principio di Dedekind, esiste almeno un numero x che separa i due insiemi:

Per ogni $a \in A, b \in B$: $\qquad a \leqslant x \leqslant b.$

Per mostrare che x è *unico*, supponiamo che ne esista un altro, diverso, x'. Allora $|x - x'| = \delta$ è strettamente positivo. D'altro canto la differenza fra gli elementi di B e quelli di A diventa arbitrariamente piccola, per come abbiamo costruito A e B. Ma allora entrambi i numeri x o x' non possono separare A e B a meno che non sia $x = x'$, ossia x è unico.

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{peso} = 4 \qquad 1 = \frac{2}{2} \quad \text{peso} = 4 \qquad 3 = \frac{3}{1} \quad \text{peso} = 4$$

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{peso} = 4 \qquad 1 = \frac{2}{2} \quad \text{peso} = 4 \qquad 3 = \frac{3}{1} \quad \text{peso} = 4$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{2}{3} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{3}{2} \quad \text{peso} = 5 \qquad 4 = \frac{4}{1} \quad \text{peso} = 5$$

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{peso} = 4 \qquad 1 = \frac{2}{2} \quad \text{peso} = 4 \qquad 3 = \frac{3}{1} \quad \text{peso} = 4$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{2}{3} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{3}{2} \quad \text{peso} = 5 \qquad 4 = \frac{4}{1} \quad \text{peso} = 5$$

La frazione $\frac{2}{2}$ è indicata in rosso perché è "doppia"

Grazie a questo fatto siamo in grado di mostrare che vi sono molti più numeri irrazionali che razionali.
Mostriamo un procedimento che permette di associare ad un numero razionale qualsiasi un numero naturale (cioè "contare i numeri razionali").
Prendiamo ogni frazione, ridotta ai minimi termini, e sommiamo numeratore e denominatore, chiamando *peso* la somma:

$$1 = \frac{1}{1} \quad \text{peso} = 2$$
$$\frac{1}{2} \quad \text{peso} = 3 \qquad 2 = \frac{2}{1} \quad \text{peso} = 3$$
$$\frac{1}{3} \quad \text{peso} = 4 \qquad {\color{red} 1 = \frac{2}{2} \quad \text{peso} = 4} \qquad 3 = \frac{3}{1} \quad \text{peso} = 4$$
$$\frac{1}{4} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{2}{3} \quad \text{peso} = 5 \qquad \frac{3}{2} \quad \text{peso} = 5 \qquad 4 = \frac{4}{1} \quad \text{peso} = 5$$

La frazione $\frac{2}{2}$ è indicata in rosso perché è "doppia" (corrisponde a 1 che è già stata incontrata).

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- $1/2$ è la seconda, 2 la terza;

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- $1/2$ è la seconda, 2 la terza;
- $1/3$ è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente $2/2$);

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- $1/2$ è la seconda, 2 la terza;
- $1/3$ è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente $2/2$);
- $1/4$ è la sesta, $2/3$ è la settima, $3/2$ è l'ottava, 4 è la nona;

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- $1/2$ è la seconda, 2 la terza;
- $1/3$ è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente $2/2$);
- $1/4$ è la sesta, $2/3$ è la settima, $3/2$ è l'ottava, 4 è la nona;
- e così via...

Per quanto possa sembrare complicato, questo schema associa ad ogni frazione un numero intero.

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- 1/2 è la seconda, 2 la terza;
- 1/3 è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente 2/2);
- 1/4 è la sesta, 2/3 è la settima, 3/2 è l'ottava, 4 è la nona;
- e così via...

Per quanto possa sembrare complicato, questo schema associa ad ogni frazione un numero intero.
I matematici chiamano la possibilità di "contare" anche insiemi infiniti di numeri (come i numeri razionali) *numerabilità*.

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- 1/2 è la seconda, 2 la terza;
- 1/3 è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente 2/2);
- 1/4 è la sesta, 2/3 è la settima, 3/2 è l'ottava, 4 è la nona;
- e così via...

Per quanto possa sembrare complicato, questo schema associa ad ogni frazione un numero intero.
I matematici chiamano la possibilità di "contare" anche insiemi infiniti di numeri (come i numeri razionali) *numerabilità*. Quindi si dice che i numeri razionali sono *numerabili*.

Si capisce da questo schema che vi è una frazione di peso 2, 2 di peso 3, 3 di peso 4, 4 di peso 5, ecc.
Quindi per associare ad ogni frazione un numero intero si può procedere così:

- 1 è la prima frazione;
- $1/2$ è la seconda, 2 la terza;
- $1/3$ è la quarta, 3 è la quinta (ho saltato la frazione apparente $2/2$);
- $1/4$ è la sesta, $2/3$ è la settima, $3/2$ è l'ottava, 4 è la nona;
- e così via...

Per quanto possa sembrare complicato, questo schema associa ad ogni frazione un numero intero.
I matematici chiamano la possibilità di "contare" anche insiemi infiniti di numeri (come i numeri razionali) *numerabilità*. Quindi si dice che i numeri razionali sono *numerabili*.
Questo *non* si può fare con i numeri irrazionali.

L'idea è questa: supponiamo *per assurdo* che i numeri irrazionali siano numerabili, e quindi elenchiamoli tutti, così:

L'idea è questa: supponiamo *per assurdo* che i numeri irrazionali siano numerabili, e quindi elenchiamoli tutti, così:

1: 0,27398494928283903940404040929823726321561 2...
2: 0,15627272383272362512728287464652821828282 8...
3: 0,34347384827923179376176372676809002983023 9...
4: 0,48816404846634623784609374600463864873426 0...
5: 0,11272372387263871674791874981274837498387 9...
6: 0,34726374862395879183721263218361938719289 0...
7: 0,23824602432084712897430917102498732049732 0...
8: 0,23675123173987912873891247198471398798374 9...
9: 0,90809823904737465423176371638714687126878 9...
10: 0,4657613541834815631298631892371982987378 79...
11: 0,9384023847234656354632565761536215723121 21...
12: 0,0039483894893641236178638721872636236272 7...
13: 0,2156262721873721983871298371987398127389 00...

(i numeri azzurri sono quelli che "contano" i numeri irrazionali).

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\dots$$

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (alla fine di questa sezione) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (alla fine di questa sezione) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (alla fine di questa sezione) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

$$0,364231402394\ldots$$

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (alla fine di questa sezione) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

$$0,364231402394\ldots$$

Questo sviluppo è evidente illimitato e non periodico (altrimenti lo sarebbe stato anche quello precedente).

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\dots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (alla fine di questa sezione) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

$$0,364231402394\dots$$

Questo sviluppo è evidente illimitato e non periodico (altrimenti lo sarebbe stato anche quello precedente). Dunque, siccome abbiamo elencato *tutti* i numeri irrazionali, esso *deve* essere uno di quelli.

Adesso procediamo così: individuiamo la prima cifra decimale del primo numero, la seconda del secondo, ecc. (quelle rosse in figura) e consideriamo il numero che ha queste cifre nel suo sviluppo decimale:

$$0,2531230391283\ldots$$

Questo sviluppo è evidentemente illimitato; si può dimostrare (alla fine di questa sezione) che, a patto di rinumerare in modo opportuno i numeri irrazionali (cioè scambiando le righe nella figura), esso è anche non periodico.
Infine trasformiamo questo numero così: aggiungiamo 1 ad ogni cifra dello sviluppo, con la convenzione che se è 9, allora mettiamo 0. Nel nostro esempio verrebbe

$$0,364231402394\ldots$$

Questo sviluppo è evidente illimitato e non periodico (altrimenti lo sarebbe stato anche quello precedente). Dunque, siccome abbiamo elencato *tutti* i numeri irrazionali, esso *deve* essere uno di quelli.

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa;

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa; non può essere il secondo, perché la seconda cifra decimale è diversa,

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa; non può essere il secondo, perché la seconda cifra decimale è diversa, e così via concludiamo che questo numero irrazionale *non è contenuto nell'elenco*!

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa; non può essere il secondo, perché la seconda cifra decimale è diversa, e così via concludiamo che questo numero irrazionale *non è contenuto nell'elenco*! Quindi siamo giunti ad un assurdo, e pertanto i numeri irrazionali non sono numerabili.

Ma non può essere il primo, perché la prima cifra decimale è diversa; non può essere il secondo, perché la seconda cifra decimale è diversa, e così via concludiamo che questo numero irrazionale *non è contenuto nell'elenco*! Quindi siamo giunti ad un assurdo, e pertanto i numeri irrazionali non sono numerabili.
(Per questo motivo i matematici dicono che i numeri irrazionali sono "molti di più" dei numeri razionali).

Mostriamo ora che, a patto di rinumerare i numeri irrazionali, si può sempre ottenere con le cifre "diagonali" (quelle rosse nella figura) uno sviluppo non periodico.

Mostriamo ora che, a patto di rinumerare i numeri irrazionali, si può sempre ottenere con le cifre "diagonali" (quelle rosse nella figura) uno sviluppo non periodico.

1: 0,27398494928283903940404040929823726321561 2...
2: 0,15627272383272362512728287464652821828282 8...
3: 0,34347384827923179376176372676809002983023 9...
4: 0,48816404846634623784609374600463864873426 0...
5: 0,11272372387263871674791874981274837498387 9...
6: 0,34726374862395879183721263218361938719289 0...
7: 0,23824602432084712897430917102498732049732 0...
8: 0,23675123173987912873891247198471398798374 9...
9: 0,90809823904737465423176371638714687126878 9...
10: 0,4657613541834815631298631892371982987378 79...
11: 0,9384023847234656354632565761536215723121 21...
12: 0,0039483894889364123617863872187263623627 27...
13: 0,2156262721873721983871298371987398127389 00...

Mostriamo ora che, a patto di rinumerare i numeri irrazionali, si può sempre ottenere con le cifre "diagonali" (quelle rosse nella figura) uno sviluppo non periodico.

1: 0,27398494928283903940404040929823726321561 2...
2: 0,15627272383272362512728287464652821828282 8...
3: 0,34347384827923179376176372676809002983023 9...
4: 0,48816404846634623784609374600463864873426 0...
5: 0,11272372387263871674791874981274837498387 9...
6: 0,34726374862395879183721263218361938719289 0...
7: 0,23824602432084712897430917102498732049732 0...
8: 0,23675123173987912873891247198471398798374 9...
9: 0,90809823904737465423176371638714687126878 9...
10: 0,4657613541834815631298631892371982987378 79...
11: 0,9384023847234656354632565761536215723121 21...
12: 0,0039483894893641236178638721872636236272 7...
13: 0,2156262721873721983871298371987398127389 00...

In realtà si può fare in modo da ottenere addirittura uno sviluppo voluto, per esempio

Mostriamo ora che, a patto di rinumerare i numeri irrazionali, si può sempre ottenere con le cifre "diagonali" (quelle rosse nella figura) uno sviluppo non periodico.

1: 0,27398494928283903940404040929823726321561 2...

2: 0,15627272383272362512728287464652821828282 8...

3: 0,34347384827923179376176372676809002983023 9...

4: 0,48816404846634623784609374600463864873426 0...

5: 0,11272372387263871674791874981274837498387 9...

6: 0,34726374862395879183721263218361938719289 0...

7: 0,23824602432084712897430917102498732049732 0...

8: 0,23675123173987912873891247198471398798374 9...

9: 0,90809823904737465423176371638714687126878 9...

10: 0,46576135418348156312986318923719829873787 9...

11: 0,93840238472346563546325657615362157231212 1...

12: 0,00394838948893641236178638721872636236272 7...

13: 0,21562627218737219838712983719873981273890 0...

In realtà si può fare in modo da ottenere addirittura uno sviluppo voluto, per esempio

$$0,010011000111000011 11\dots$$

Mostriamo ora che, a patto di rinumerare i numeri irrazionali, si può sempre ottenere con le cifre “diagonali” (quelle rosse nella figura) uno sviluppo non periodico.

1: 0,27398494928283903940404040929823726321561 2...
2: 0,15627272383272362512728287464652821828282 8...
3: 0,34347384827923179376176372676809002983023 9...
4: 0,48816404846634623784609374600463864873426 0...
5: 0,11272372387263871674791874981274837498387 9...
6: 0,34726374862395879183721263218361938719289 0...
7: 0,23824602432084712897430917102498732049732 0...
8: 0,23675123173987912873891247198471398798374 9...
9: 0,90809823904737465423176371638714687126878 9...
10: 0,46576135418348156312986318923719829873787 9...
11: 0,93840238472346563546325657615362157231212 1...
12: 0,00394838948893641236178638721872636236272 7...
13: 0,21562627218737219838712983719873981273890 0...

In realtà si può fare in modo da ottenere addirittura uno sviluppo voluto, per esempio

$$0,0100110001110000 1111\ldots$$

che è evidentemente non periodico.

Mostriamo ora che, a patto di rinumerare i numeri irrazionali, si può sempre ottenere con le cifre “diagonali” (quelle rosse nella figura) uno sviluppo non periodico.

1: 0,27398494928283903940404040929823726321561 2...
2: 0,15627272383272362512728287464652821828282 8...
3: 0,34347384827923179376176372676809002983023 9...
4: 0,48816404846634623784609374600463864873426 0...
5: 0,11272372387263871674791874981274837498387 9...
6: 0,34726374862395879183721263218361938719289 0...
7: 0,23824602432084712897430917102498732049732 0...
8: 0,23675123173987912873891247198471398798374 9...
9: 0,90809823904737465423176371638714687126878 9...
10: 0,4657613541834815631298631892371982987378 79...
11: 0,9384023847234656354632565761536215723121 21...
12: 0,0039483894893641236178638721872636236272 7...
13: 0,2156262721873721983871298371987398127389 00...

In realtà si può fare in modo da ottenere addirittura uno sviluppo voluto, per esempio

$$0,0100110001110000 1111\dots$$

che è evidentemente non periodico.

Siccome *tutti* gli sviluppi sono presenti, ce n'è sicuramente uno in cui la prima cifra decimale è uno zero. Questo sarà il primo numero dell'elenco.

Mostriamo ora che, a patto di rinumerare i numeri irrazionali, si può sempre ottenere con le cifre "diagonali" (quelle rosse nella figura) uno sviluppo non periodico.

1: 0,27398494928283903940404040929823726321561 2...
2: 0,15627272383272362512728287464652821828282 8...
3: 0,34347384827923179376176372676809002983023 9...
4: 0,48816404846634623784609374600463864873426 0...
5: 0,11272372387263871674791874981274837498387 9...
6: 0,34726374862395879183721263218361938719289 0...
7: 0,23824602432084712897430917102498732049732 0...
8: 0,23675123173987912873891247198471398798374 9...
9: 0,90809823904737465423176371638714687126878 9...
10: 0,46576135418348156312986318923719829873787 9...
11: 0,93840238472346563546325657615362157231212 1...
12: 0,00394838948893641236178638721872636236272 7...
13: 0,21562627218737219838712983719873981273890 0...

In realtà si può fare in modo da ottenere addirittura uno sviluppo voluto, per esempio

$$0,0100110001110000111\ldots$$

che è evidentemente non periodico.
Siccome *tutti* gli sviluppi sono presenti, ce n'è sicuramente uno in cui la prima cifra decimale è uno zero. Questo sarà il primo numero dell'elenco.

Per lo stesso motivo, ci sono (addirittura infiniti) sviluppi nei quali la seconda cifra decimale è uno. Questo sarà il secondo. Ora, non può non esistere uno sviluppo con uno zero alla terza posizione (per esempio, $0,230\ldots$ con quello che si vuole al posto dei punti è diverso dai primi due), e continuando così all'infinito si trova un elenco con le cifre "diagonali" che danno lo sviluppo voluto.

Esempi di numeri irrazionali

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali?

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1 + \sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali.

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1 + \sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p + r$ fosse razionale, si avrebbe

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1 + \sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p + r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p + r = \frac{m}{n}$$

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1 + \sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p + r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p + r = \frac{m}{n}$$

da cui

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p+r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1+\sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p+r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p+r=\frac{m}{n}$$

da cui

$$r=\frac{m}{n}-p \qquad \text{che è razionale,}$$

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p+r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1+\sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p+r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p+r=\frac{m}{n}$$

da cui

$$r=\frac{m}{n}-p \qquad \text{che è razionale, il che è assurdo.}$$

Esempi di numeri irrazionali

Se sono così tanti, quali numeri sono allora irrazionali? Vediamo allora alcuni semplici criteri per individuare dei numeri irrazionali.

Primo criterio

Se un numero p è razionale e r è irrazionale , allora $p + r$, $p \cdot r$ e $\sqrt[n]{r}$ sono irrazionali.

Quindi, per esempio,

$$1 + \sqrt{2}, \qquad 6\sqrt{2}, \qquad -\frac{2}{3}\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

sono irrazionali. La dimostrazione è immediata. Se per assurdo $p + r$ fosse razionale, si avrebbe

$$p + r = \frac{m}{n}$$

da cui

$$r = \frac{m}{n} - p \qquad \text{che è razionale, il che è assurdo.}$$

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

In maniera analoga si ragiona per il prodotto. Infine, se per assurdo $\sqrt[n]{r}$ fosse razionale si avrebbe

$$\sqrt[n]{r} = \frac{p}{q}$$

e quindi

$$r = \frac{p^n}{q^n},$$

cioè r sarebbe razionale, il che è assurdo.

Secondo criterio

Se un numero intero a *non* è un quadrato perfetto, allora $\sqrt{a}$ è irrazionale.

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi.

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione.

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno.

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice.

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

$$\sqrt{a} = p^k \sqrt{b}$$

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

$$\sqrt{a} = p^k \sqrt{b}$$

e per quanto detto sopra, se $\sqrt{b}$ sarà irrazionale, anche $\sqrt{a}$ lo sarà.

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

$$\sqrt{a} = p^k \sqrt{b}$$

e per quanto detto sopra, se $\sqrt{b}$ sarà irrazionale, anche $\sqrt{a}$ lo sarà. Mostriamo allora che $\sqrt{b}$ è irrazionale.

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

$$\sqrt{a} = p^k \sqrt{b}$$

e per quanto detto sopra, se $\sqrt{b}$ sarà irrazionale, anche $\sqrt{a}$ lo sarà. Mostriamo allora che $\sqrt{b}$ è irrazionale. Avremo, per quanto appena visto,

$$b = pq$$

con q *non* divisibile per p

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

$$\sqrt{a} = p^k \sqrt{b}$$

e per quanto detto sopra, se $\sqrt{b}$ sarà irrazionale, anche $\sqrt{a}$ lo sarà. Mostriamo allora che $\sqrt{b}$ è irrazionale. Avremo, per quanto appena visto,

$$b = pq$$

con q *non* divisibile per p (perché abbiamo portato fuori tutti gli altri fattori p).

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

$$\sqrt{a} = p^k \sqrt{b}$$

e per quanto detto sopra, se $\sqrt{b}$ sarà irrazionale, anche $\sqrt{a}$ lo sarà. Mostriamo allora che $\sqrt{b}$ è irrazionale. Avremo, per quanto appena visto,

$$b = pq$$

con q *non* divisibile per p (perché abbiamo portato fuori tutti gli altri fattori p).
Supponiamo allora per assurdo che $\sqrt{b}$ sia razionale, cioè

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

$$\sqrt{a} = p^k\sqrt{b}$$

e per quanto detto sopra, se $\sqrt{b}$ sarà irrazionale, anche $\sqrt{a}$ lo sarà. Mostriamo allora che $\sqrt{b}$ è irrazionale. Avremo, per quanto appena visto,

$$b = pq$$

con q *non* divisibile per p (perché abbiamo portato fuori tutti gli altri fattori p).
Supponiamo allora per assurdo che $\sqrt{b}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{b} = \frac{m}{n},$$

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

$$\sqrt{a} = p^k \sqrt{b}$$

e per quanto detto sopra, se $\sqrt{b}$ sarà irrazionale, anche $\sqrt{a}$ lo sarà. Mostriamo allora che $\sqrt{b}$ è irrazionale. Avremo, per quanto appena visto,

$$b = pq$$

con q *non* divisibile per p (perché abbiamo portato fuori tutti gli altri fattori p).
Supponiamo allora per assurdo che $\sqrt{b}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{b} = \frac{m}{n}, \qquad \text{cioè} \qquad b = \frac{m^2}{n^2}$$

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

$$\sqrt{a} = p^k \sqrt{b}$$

e per quanto detto sopra, se $\sqrt{b}$ sarà irrazionale, anche $\sqrt{a}$ lo sarà. Mostriamo allora che $\sqrt{b}$ è irrazionale. Avremo, per quanto appena visto,

$$b = pq$$

con q *non* divisibile per p (perché abbiamo portato fuori tutti gli altri fattori p).
Supponiamo allora per assurdo che $\sqrt{b}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{b} = \frac{m}{n}, \qquad \text{cioè} \qquad b = \frac{m^2}{n^2} \qquad \text{cioè} \qquad pq = \frac{m^2}{n^2}.$$

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

$$\sqrt{a} = p^k \sqrt{b}$$

e per quanto detto sopra, se $\sqrt{b}$ sarà irrazionale, anche $\sqrt{a}$ lo sarà.
Mostriamo allora che $\sqrt{b}$ è irrazionale. Avremo, per quanto appena visto,

$$b = pq$$

con q *non* divisibile per p (perché abbiamo portato fuori tutti gli altri fattori p).
Supponiamo allora per assurdo che $\sqrt{b}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{b} = \frac{m}{n}, \qquad \text{cioè} \qquad b = \frac{m^2}{n^2} \qquad \text{cioè} \qquad pq = \frac{m^2}{n^2}.$$

Quindi in definitiva

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

$$\sqrt{a} = p^k \sqrt{b}$$

e per quanto detto sopra, se $\sqrt{b}$ sarà irrazionale, anche $\sqrt{a}$ lo sarà. Mostriamo allora che $\sqrt{b}$ è irrazionale. Avremo, per quanto appena visto,

$$b = pq$$

con q *non* divisibile per p (perché abbiamo portato fuori tutti gli altri fattori p).
Supponiamo allora per assurdo che $\sqrt{b}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{b} = \frac{m}{n}, \qquad \text{cioè} \qquad b = \frac{m^2}{n^2} \qquad \text{cioè} \qquad pq = \frac{m^2}{n^2}.$$

Quindi in definitiva

$$m^2 = pqn^2.$$

Dimostrazione. Supponiamo di scomporre a nei suoi fattori primi. Siccome a non è un quadrato, deve esistere un fattore primo, diciamo p, tale che compaia un numero *dispari* di volte nella scomposizione. Immaginiamo allora di portare fuori dalla radice tutti i fattori p meno uno. Per esempio, se p compare alla quinta potenza, uscirà p^2 dalla radice. Sia b il numero rimasto sotto la radice. Allora

$$\sqrt{a} = p^k \sqrt{b}$$

e per quanto detto sopra, se $\sqrt{b}$ sarà irrazionale, anche $\sqrt{a}$ lo sarà. Mostriamo allora che $\sqrt{b}$ è irrazionale. Avremo, per quanto appena visto,

$$b = pq$$

con q *non* divisibile per p (perché abbiamo portato fuori tutti gli altri fattori p).
Supponiamo allora per assurdo che $\sqrt{b}$ sia razionale, cioè

$$\sqrt{b} = \frac{m}{n}, \qquad \text{cioè} \qquad b = \frac{m^2}{n^2} \qquad \text{cioè} \qquad pq = \frac{m^2}{n^2}.$$

Quindi in definitiva

$$m^2 = pqn^2.$$

Come al solito, mostriamo che l'uguaglianza scritta è assurda.

Come al solito, mostriamo che l'uguaglianza scritta è assurda.
Contiamo quanti fattori p hanno i due membri nella loro scomposizione.

Come al solito, mostriamo che l'uguaglianza scritta è assurda.
Contiamo quanti fattori p hanno i due membri nella loro scomposizione.
Il primo membro ha un numero *pari* di fattori p, perché è un quadrato (eventualmente anche nessuno).

Come al solito, mostriamo che l'uguaglianza scritta è assurda.
Contiamo quanti fattori p hanno i due membri nella loro scomposizione.
Il primo membro ha un numero *pari* di fattori p, perché è un quadrato (eventualmente anche nessuno).
Il secondo membro deve avere un numero *pari* di fattori p in n^2 (non abbiamo supposto che m e n siano primi tra loro),

Come al solito, mostriamo che l'uguaglianza scritta è assurda.
Contiamo quanti fattori p hanno i due membri nella loro scomposizione.
Il primo membro ha un numero *pari* di fattori p, perché è un quadrato (eventualmente anche nessuno).
Il secondo membro deve avere un numero *pari* di fattori p in n^2 (non abbiamo supposto che m e n siano primi tra loro), poi q non ne ha e c'è p,

Come al solito, mostriamo che l'uguaglianza scritta è assurda.
Contiamo quanti fattori p hanno i due membri nella loro scomposizione.
Il primo membro ha un numero *pari* di fattori p, perché è un quadrato (eventualmente anche nessuno).
Il secondo membro deve avere un numero *pari* di fattori p in n^2 (non abbiamo supposto che m e n siano primi tra loro), poi q non ne ha e c'è p, quindi il secondo membro deve avere un numero *dispari* di fattori p, il che è assurdo.

Come al solito, mostriamo che l'uguaglianza scritta è assurda.
Contiamo quanti fattori p hanno i due membri nella loro scomposizione.
Il primo membro ha un numero *pari* di fattori p, perché è un quadrato (eventualmente anche nessuno).
Il secondo membro deve avere un numero *pari* di fattori p in n^2 (non abbiamo supposto che m e n siano primi tra loro), poi q non ne ha e c'è p, quindi il secondo membro deve avere un numero *dispari* di fattori p, il che è assurdo.
In questo modo sappiamo che $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ sono tutti irrazionali.

Come al solito, mostriamo che l'uguaglianza scritta è assurda.
Contiamo quanti fattori p hanno i due membri nella loro scomposizione.
Il primo membro ha un numero *pari* di fattori p, perché è un quadrato (eventualmente anche nessuno).
Il secondo membro deve avere un numero *pari* di fattori p in n^2 (non abbiamo supposto che m e n siano primi tra loro), poi q non ne ha e c'è p, quindi il secondo membro deve avere un numero *dispari* di fattori p, il che è assurdo.
In questo modo sappiamo che $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ sono tutti irrazionali.
Si può poi mostrare, complicando un po' il ragionamento svolto, che se a non è una potenza n-esima, allora $\sqrt[n]{a}$ è irrazionale.

Come al solito, mostriamo che l'uguaglianza scritta è assurda.
Contiamo quanti fattori p hanno i due membri nella loro scomposizione.
Il primo membro ha un numero *pari* di fattori p, perché è un quadrato (eventualmente anche nessuno).
Il secondo membro deve avere un numero *pari* di fattori p in n^2 (non abbiamo supposto che m e n siano primi tra loro), poi q non ne ha e c'è p, quindi il secondo membro deve avere un numero *dispari* di fattori p, il che è assurdo.
In questo modo sappiamo che $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$ sono tutti irrazionali.
Si può poi mostrare, complicando un po' il ragionamento svolto, che se a non è una potenza n-esima, allora $\sqrt[n]{a}$ è irrazionale.

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).
Per esempio, mostriamo che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Posto $x = \sqrt[3]{2}$, abbiamo ovviamente

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).
Per esempio, mostriamo che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Posto $x = \sqrt[3]{2}$, abbiamo ovviamente

$$x^3 = 2 \qquad \text{ossia} \qquad x^3 - 2 = 0.$$

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).
Per esempio, mostriamo che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Posto $x = \sqrt[3]{2}$, abbiamo ovviamente

$$x^3 = 2 \qquad \text{ossia} \qquad x^3 - 2 = 0.$$

Posto $P(x) = x^3 - 2$, abbiamo che

Per mostrare che un numero è irrazionale, si può usare il metodo di Ruffini.
Esso consiste nel mostrare che il numero è soluzione di un'equazione che non ha soluzioni razionali (verificato per tentativi).
Per esempio, mostriamo che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Posto $x = \sqrt[3]{2}$, abbiamo ovviamente

$$x^3 = 2 \qquad \text{ossia} \qquad x^3 - 2 = 0.$$

Posto $P(x) = x^3 - 2$, abbiamo che

$$P(\pm 1) \neq 0, \qquad P(\pm 2) \neq 0.$$

Di conseguenza, $\sqrt[3]{2}$, che *è* una soluzione dell'equazione, deve essere irrazionale.

A parte le radici n-esime e loro combinazioni, ben poco si sa su *altri* numeri irrazionali (a parte, ovviamente, quelli noti con gli sviluppi non periodici, per i quali, però, difficilmente si hanno legami con problemi matematici).

A parte le radici *n*-esime e loro combinazioni, ben poco si sa su *altri* numeri irrazionali (a parte, ovviamente, quelli noti con gli sviluppi non periodici, per i quali, però, difficilmente si hanno legami con problemi matematici).
Il più celebre di questi numeri è $\pi = 3,141592\ldots$, il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro. La prima dimostrazione che π è irrazionale è del 1761 di Johann Heinrich Lambert. Oggi si conoscono miliardi di cifre decimali di π, e siti internet che riportano dove si possa trovare la propria data di nascita o numero di telefono nello sviluppo decimale di π.

Curiosità sui numeri irrazionali

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Mostriamo che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Mostriamo che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Supponiamo, tanto per fissare le idee, che per scrivere una frase servano 100 caratteri (maiuscole, minuscole, spazio e segni di punteggiatura), ma questo numero non è importante.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Mostriamo che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Supponiamo, tanto per fissare le idee, che per scrivere una frase servano 100 caratteri (maiuscole, minuscole, spazio e segni di punteggiatura), ma questo numero non è importante.
Le prime 100 frasi sono banali: sono a (la prima), fino a ? (la 100-esima).

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Mostriamo che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Supponiamo, tanto per fissare le idee, che per scrivere una frase servano 100 caratteri (maiuscole, minuscole, spazio e segni di punteggiatura), ma questo numero non è importante.
Le prime 100 frasi sono banali: sono `a` (la prima), fino a `?` (la 100-esima).
Le frasi da 101 a 10000 sono poi `aa`, `ab`, ecc. fino a `??`.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Mostriamo che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Supponiamo, tanto per fissare le idee, che per scrivere una frase servano 100 caratteri (maiuscole, minuscole, spazio e segni di punteggiatura), ma questo numero non è importante.
Le prime 100 frasi sono banali: sono a (la prima), fino a ? (la 100-esima).
Le frasi da 101 a 10000 sono poi aa, ab, ecc. fino a ??.
Quelle con tre caratteri andranno da 10001 a 1 000 000, e così via.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Mostriamo che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Supponiamo, tanto per fissare le idee, che per scrivere una frase servano 100 caratteri (maiuscole, minuscole, spazio e segni di punteggiatura), ma questo numero non è importante.
Le prime 100 frasi sono banali: sono `a` (la prima), fino a `?` (la 100-esima).
Le frasi da 101 a 10000 sono poi `aa`, `ab`, ecc. fino a `??`.
Quelle con tre caratteri andranno da 10001 a 1 000 000, e così via.
Per esempio, `ciao` avrà un numero compreso tra 1 000 001 e cento milioni.

Curiosità sui numeri irrazionali

Prima curiosità

Il fatto che i numeri irrazionali non siano numerabili porta con sé interessanti paradossi.
Mostriamo che *l'insieme di tutte le frasi del linguaggio è numerabile*.
Supponiamo, tanto per fissare le idee, che per scrivere una frase servano 100 caratteri (maiuscole, minuscole, spazio e segni di punteggiatura), ma questo numero non è importante.
Le prime 100 frasi sono banali: sono `a` (la prima), fino a `?` (la 100-esima).
Le frasi da 101 a 10000 sono poi `aa`, `ab`, ecc. fino a `??`.
Quelle con tre caratteri andranno da 10001 a 1 000 000, e così via.
Per esempio, `ciao` avrà un numero compreso tra 1 000 001 e cento milioni.
Chiaramente, ogni frase, anche se con un numero enorme, verrà in questo modo "etichettata" con un numero.

Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.

Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri.

Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2".

Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2". Anche il numero irrazionale

Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2". Anche il numero irrazionale

$$0,010011000111000011110000011111000000\ldots$$

Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti “descrivibili” i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e “non descrivibili” gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è “quel numero che elevato al quadrato fa 2”. Anche il numero irrazionale

$$0,010011000111000011110000011111100000\ldots$$

è descrivibile dalla frase “il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all’infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni”.

Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2". Anche il numero irrazionale

$$0,010011000111000011110000011111 00000\ldots$$

è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni".
Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

Quindi, è possibile associare un numero intero ad ogni frase di una data lingua. Siccome i numeri irrazionali non sono numerabili, ne esistono (e, anzi, sono la maggior parte) che non corrispondono a *nessuna* frase del linguaggio.
Chiamiamo infatti "descrivibili" i numeri irrazionali per i quali esiste una descrizione con una frase e "non descrivibili" gli altri. Per esempio, $\sqrt{2}$ è descrivibile: è "quel numero che elevato al quadrato fa 2". Anche il numero irrazionale

$$0,010011000111000011110000011111000000\ldots$$

è descrivibile dalla frase "il suo sviluppo decimale è zero virgola uno zero e un uno, poi due zeri e due uni, poi tre zeri e tre uni, e così via all'infinito aumentando ad ogni passo di 1 il numero di zeri e di uni".
Eppure, la maggior parte dei numeri irrazionali è "indescrivibile", perché se lo fosse avrebbero una frase che li descrive e sarebbero numerabili!

Seconda curiosità

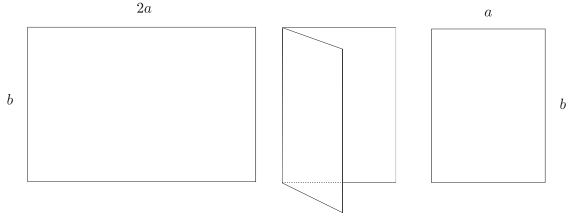
Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$.

Seconda curiosità

Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.

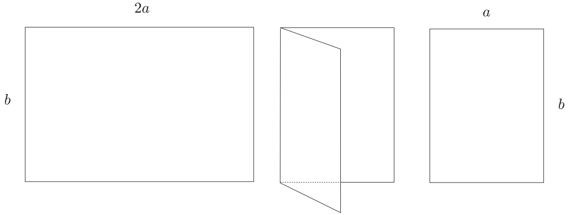
Seconda curiosità

Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.



Seconda curiosità

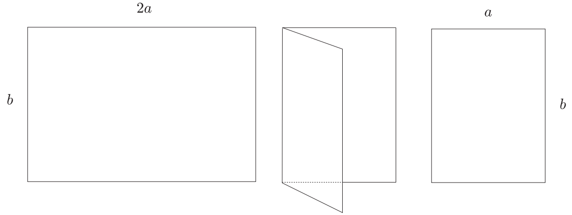
Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.



Dalla figura si vede che, se si vuol mantenere la similitudine, deve essere

Seconda curiosità

Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.



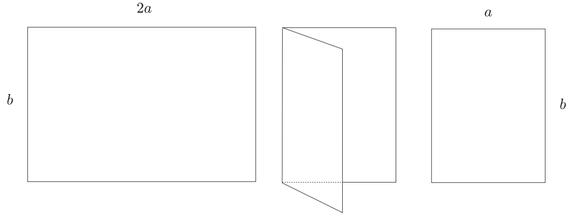
Dalla figura si vede che, se si vuol mantenere la similitudine, deve essere

$$2a : b = b : a$$

e quindi

Seconda curiosità

Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.



Dalla figura si vede che, se si vuol mantenere la similitudine, deve essere

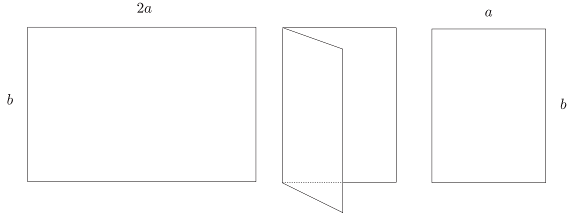
$$2a : b = b : a$$

e quindi

$$b^2 = 2a^2 \qquad \text{da cui} \qquad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2.$$

Seconda curiosità

Il rapporto fra i lati dei fogli A4 è $\sqrt{2}$. Infatti, piegando un foglio A4 lungo il lato lungo si devono ottenere due mezzi fogli simili al foglio di partenza.



Dalla figura si vede che, se si vuol mantenere la similitudine, deve essere

$$2a : b = b : a$$

e quindi

$$b^2 = 2a^2 \qquad \text{da cui} \qquad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2.$$

Operazioni con i numeri irrazionali

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale.

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il *prodotto* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale.

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il *prodotto* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{che è razionale.}$$

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il *prodotto* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{che è razionale.}$$

Neanche l'*elevamento a potenza* di numeri irrazionali non è sempre irrazionale.

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il *prodotto* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{che è razionale.}$$

Neanche l'*elevamento a potenza* di numeri irrazionali non è sempre irrazionale.
A questo proposito vi è una interessante "dimostrazione" non costruttiva.

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il *prodotto* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{che è razionale.}$$

Neanche l'*elevamento a potenza* di numeri irrazionali non è sempre irrazionale.
A questo proposito vi è una interessante "dimostrazione" non costruttiva.
Sia $A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Se A è razionale, allora abbiamo trovato un esempio.

Operazioni con i numeri irrazionali

Non tutte le operazioni con i numeri irrazionali danno numeri irrazionali, anzi, quasi nessuna.
La *somma* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il *prodotto* di due numeri irrazionali non è sempre irrazionale. Per esempio,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{che è razionale.}$$

Neanche l'*elevamento a potenza* di numeri irrazionali non è sempre irrazionale.
A questo proposito vi è una interessante "dimostrazione" non costruttiva.
Sia $A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Se A è razionale, allora abbiamo trovato un esempio.

Se viceversa A non è razionale, cioè irrazionale, allora

Se viceversa A non è razionale, cioè irrazionale, allora

$$A^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \qquad \text{che è razionale.}$$

Se viceversa A non è razionale, cioè irrazionale, allora

$$A^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il bello di questa dimostrazione è che *non si sa* quale delle due possibilità sia quella giusta.

Se viceversa A non è razionale, cioè irrazionale, allora

$$A^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il bello di questa dimostrazione è che *non si sa* quale delle due possibilità sia quella giusta.
Per questi motivi non è immediato, per esempio, che $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ è irrazionale (si può dimostrare con il metodo di Ruffini).

Se viceversa A non è razionale, cioè irrazionale, allora

$$A^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il bello di questa dimostrazione è che *non si sa* quale delle due possibilità sia quella giusta.
Per questi motivi non è immediato, per esempio, che $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ è irrazionale (si può dimostrare con il metodo di Ruffini).
L'insieme dei numeri irrazionali non è quindi chiuso rispetto alle più semplici operazioni, e pertanto ha scarso interesse per l'Algebra.

Se viceversa A non è razionale, cioè irrazionale, allora

$$A^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \qquad \text{che è razionale.}$$

Il bello di questa dimostrazione è che *non si sa* quale delle due possibilità sia quella giusta.
Per questi motivi non è immediato, per esempio, che $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ è irrazionale (si può dimostrare con il metodo di Ruffini).
L'insieme dei numeri irrazionali non è quindi chiuso rispetto alle più semplici operazioni, e pertanto ha scarso interesse per l'Algebra.
Sono molto più interessanti alcuni suoi sottoinsiemi, uno dei quali viene esaminato fra poco.

Famiglie di numeri irrazionali

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

$$a + b\sqrt{n},$$

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

$$a + b\sqrt{n},$$

dove a, b sono razionali e n è un numero *fissato* (non un quadrato perfetto, cosicché i numeri non sono razionali), hanno interessanti proprietà algebriche.

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

$$a + b\sqrt{n},$$

dove a, b sono razionali e n è un numero *fissato* (non un quadrato perfetto, cosicché i numeri non sono razionali), hanno interessanti proprietà algebriche.
Intanto *essi contengono come sottoinsieme i numeri razionali*: basta prendere $b = 0$.

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

$$a + b\sqrt{n},$$

dove a, b sono razionali e n è un numero *fissato* (non un quadrato perfetto, cosicché i numeri non sono razionali), hanno interessanti proprietà algebriche.
Intanto *essi contengono come sottoinsieme i numeri razionali*: basta prendere $b = 0$.
La *somma* (algebrica) è interna, in quanto

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

$$a + b\sqrt{n},$$

dove a, b sono razionali e n è un numero *fissato* (non un quadrato perfetto, cosicché i numeri non sono razionali), hanno interessanti proprietà algebriche.
Intanto *essi contengono come sottoinsieme i numeri razionali*: basta prendere $b = 0$.
La *somma* (algebrica) è interna, in quanto

$$(a + b\sqrt{n}) + (c + d\sqrt{n}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{n}$$

Famiglie di numeri irrazionali

I numeri della forma

$$a + b\sqrt{n},$$

dove a, b sono razionali e n è un numero *fissato* (non un quadrato perfetto, cosicché i numeri non sono razionali), hanno interessanti proprietà algebriche.
Intanto *essi contengono come sottoinsieme i numeri razionali*: basta prendere $b = 0$.
La *somma* (algebrica) è interna, in quanto

$$(a + b\sqrt{n}) + (c + d\sqrt{n}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{n}$$

che fa parte della famiglia.

Per esempio,

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n})=ac+ad\sqrt{n}+bc\sqrt{n}+bdn=(ac+bdn)+(ad+bc)\sqrt{n}$$

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n})=ac+ad\sqrt{n}+bc\sqrt{n}+bdn=(ac+bdn)+(ad+bc)\sqrt{n}$$

che fa parte della famiglia.

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n})=ac+ad\sqrt{n}+bc\sqrt{n}+bdn=(ac+bdn)+(ad+bc)\sqrt{n}$$

che fa parte della famiglia.
Per esempio,

$$(2-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=8-3-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5-2\sqrt{3}.$$

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n})=ac+ad\sqrt{n}+bc\sqrt{n}+bdn=(ac+bdn)+(ad+bc)\sqrt{n}$$

che fa parte della famiglia.
Per esempio,

$$(2-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=8-3-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5-2\sqrt{3}.$$

Con molta pazienza, si può dimostrare che l'addizione e la moltiplicazione così introdotte godono della proprietà associativa, commutativa, distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione, ammettono elementi neutri rispettivamente 0 e 1.

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n})=ac+ad\sqrt{n}+bc\sqrt{n}+bdn=(ac+bdn)+(ad+bc)\sqrt{n}$$

che fa parte della famiglia.
Per esempio,

$$(2-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=8-3-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5-2\sqrt{3}.$$

Con molta pazienza, si può dimostrare che l'addizione e la moltiplicazione così introdotte godono della proprietà associativa, commutativa, distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione, ammettono elementi neutri rispettivamente 0 e 1.
Del resto, ciò non sorprende in quanto esse assomigliano alla moltiplicazione fra polinomi di primo grado del tipo $a+bx$, con la convenzione che $x^2=n$.

Per esempio,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)+\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

Anche il prodotto è interno, in quanto

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n})=ac+ad\sqrt{n}+bc\sqrt{n}+bdn=(ac+bdn)+(ad+bc)\sqrt{n}$$

che fa parte della famiglia.
Per esempio,

$$(2-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=8-3-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5-2\sqrt{3}.$$

Con molta pazienza, si può dimostrare che l'addizione e la moltiplicazione così introdotte godono della proprietà associativa, commutativa, distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione, ammettono elementi neutri rispettivamente 0 e 1.
Del resto, ciò non sorprende in quanto esse assomigliano alla moltiplicazione fra polinomi di primo grado del tipo $a+bx$, con la convenzione che $x^2=n$.

Un fatto interessante è che esiste nella famiglia anche il *reciproco* di un numero non nullo.

Un fatto interessante è che esiste nella famiglia anche il *reciproco* di un numero non nullo. Infatti, se $a, b \neq 0$, abbiamo

Un fatto interessante è che esiste nella famiglia anche il *reciproco* di un numero non nullo. Infatti, se $a, b \neq 0$, abbiamo

$$\frac{1}{a+b\sqrt{n}} = \frac{a-b\sqrt{n}}{(a+b\sqrt{n})(a-b\sqrt{n})} = \frac{a-b\sqrt{n}}{a^2-b^2n} = \frac{a}{a^2-b^2n} + \frac{b}{a^2-b^2n}\sqrt{n}$$

Un fatto interessante è che esiste nella famiglia anche il *reciproco* di un numero non nullo. Infatti, se $a, b \neq 0$, abbiamo

$$\frac{1}{a+b\sqrt{n}} = \frac{a-b\sqrt{n}}{(a+b\sqrt{n})(a-b\sqrt{n})} = \frac{a-b\sqrt{n}}{a^2-b^2n} = \frac{a}{a^2-b^2n}+\frac{b}{a^2-b^2n}\sqrt{n}$$

che è di nuovo della famiglia.

Un fatto interessante è che esiste nella famiglia anche il *reciproco* di un numero non nullo. Infatti, se $a, b \neq 0$, abbiamo

$$\frac{1}{a+b\sqrt{n}} = \frac{a-b\sqrt{n}}{(a+b\sqrt{n})(a-b\sqrt{n})} = \frac{a-b\sqrt{n}}{a^2-b^2n} = \frac{a}{a^2-b^2n} + \frac{b}{a^2-b^2n}\sqrt{n}$$

che è di nuovo della famiglia.
In questo modo, questi numeri hanno una struttura molto simile a quella dei numeri razionali. Essi sono di grande aiuto nella soluzione di alcuni problemi di teoria dei numeri.

Numeri algebrici e trascendenti

Numeri algebrici e trascendenti

Per mostrare che, per esempio, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ è irrazionale, possiamo porre

Numeri algebrici e trascendenti

Per mostrare che, per esempio, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ è irrazionale, possiamo porre

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$$

Numeri algebrici e trascendenti

Per mostrare che, per esempio, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ è irrazionale, possiamo porre

$$x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$$

ossia

Numeri algebrici e trascendenti

Per mostrare che, per esempio, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ è irrazionale, possiamo porre

$$x = \sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$$

ossia

$$x-\sqrt{2} = \sqrt[3]{2}$$

Numeri algebrici e trascendenti

Per mostrare che, per esempio, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ è irrazionale, possiamo porre

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$$

ossia

$$x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{2}$$

ed elevare al cubo ambo i membri, ottenendo

Numeri algebrici e trascendenti

Per mostrare che, per esempio, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ è irrazionale, possiamo porre

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$$

ossia

$$x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{2}$$

ed elevare al cubo ambo i membri, ottenendo

$$x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}=2.$$

Numeri algebrici e trascendenti

Per mostrare che, per esempio, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ è irrazionale, possiamo porre

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$$

ossia

$$x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{2}$$

ed elevare al cubo ambo i membri, ottenendo

$$x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}=2.$$

Riscrivendo questa relazione come

Numeri algebrici e trascendenti

Per mostrare che, per esempio, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ è irrazionale, possiamo porre

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$$

ossia

$$x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{2}$$

ed elevare al cubo ambo i membri, ottenendo

$$x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}=2.$$

Riscrivendo questa relazione come

$$x^3+6x-2=(3x^2+2)\sqrt{2}$$

Numeri algebrici e trascendenti

Per mostrare che, per esempio, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ è irrazionale, possiamo porre

$$x = \sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$$

ossia

$$x-\sqrt{2} = \sqrt[3]{2}$$

ed elevare al cubo ambo i membri, ottenendo

$$x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2} = 2.$$

Riscrivendo questa relazione come

$$x^3+6x-2 = (3x^2+2)\sqrt{2}$$

ed elevando nuovamente al quadrato si trova, dopo qualche noioso passaggio,

Numeri algebrici e trascendenti

Per mostrare che, per esempio, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ è irrazionale, possiamo porre

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$$

ossia

$$x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{2}$$

ed elevare al cubo ambo i membri, ottenendo

$$x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}=2.$$

Riscrivendo questa relazione come

$$x^3+6x-2=(3x^2+2)\sqrt{2}$$

ed elevando nuovamente al quadrato si trova, dopo qualche noioso passaggio,

$$x^6-6x^4-4x^3+12x^2-24x-4=0.$$

Numeri algebrici e trascendenti

Per mostrare che, per esempio, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ è irrazionale, possiamo porre

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$$

ossia

$$x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{2}$$

ed elevare al cubo ambo i membri, ottenendo

$$x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}=2.$$

Riscrivendo questa relazione come

$$x^3+6x-2=(3x^2+2)\sqrt{2}$$

ed elevando nuovamente al quadrato si trova, dopo qualche noioso passaggio,

$$x^6-6x^4-4x^3+12x^2-24x-4=0.$$

Con *molta* pazienza, si può verificare (metodo di Ruffini) che questa equazione non ammette soluzioni intere, e quindi neanche razionali.

Siccome x è una soluzione, deve essere irrazionale.

Siccome x è una soluzione, deve essere irrazionale.
Questo calcolo mostra tra l'altro che x è soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti interi; in modo analogo, pare evidente che espressioni come $\sqrt{3} + \sqrt[4]{5} + 1$, ecc. sono soluzioni di qualche (magari complicata) equazione algebrica, a coefficienti interi.

Siccome x è una soluzione, deve essere irrazionale.
Questo calcolo mostra tra l'altro che x è soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti interi; in modo analogo, pare evidente che espressioni come $\sqrt{3} + \sqrt[4]{5} + 1$, ecc. sono soluzioni di qualche (magari complicata) equazione algebrica, a coefficienti interi.
Questi numeri si chiamano *numeri algebrici*.

Siccome x è una soluzione, deve essere irrazionale.
Questo calcolo mostra tra l'altro che x è soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti interi; in modo analogo, pare evidente che espressioni come $\sqrt{3} + \sqrt[4]{5} + 1$, ecc. sono soluzioni di qualche (magari complicata) equazione algebrica, a coefficienti interi.
Questi numeri si chiamano *numeri algebrici*.
Ci si può chiedere se sia *sempre* così, cioè per *tutti* i numeri irrazionali (per i razionali $x = m/n$ è evidente che l'equazione è $nx = m$). La risposta è *negativa*: nel 1844 Joseph Liouville ha dato il primo esempio di numero irrazionale che *non* è algebrico. Questi numeri sono detti *trascendenti*.

Siccome x è una soluzione, deve essere irrazionale.
Questo calcolo mostra tra l'altro che x è soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti interi; in modo analogo, pare evidente che espressioni come $\sqrt{3} + \sqrt[4]{5} + 1$, ecc. sono soluzioni di qualche (magari complicata) equazione algebrica, a coefficienti interi.
Questi numeri si chiamano *numeri algebrici*.
Ci si può chiedere se sia *sempre* così, cioè per *tutti* i numeri irrazionali (per i razionali $x = m/n$ è evidente che l'equazione è $nx = m$). La risposta è *negativa*: nel 1844 Joseph Liouville ha dato il primo esempio di numero irrazionale che *non* è algebrico. Questi numeri sono detti *trascendenti*.
Nel 1882, Ferdinand von Lindemann dimostrò che π è trascendente, ponendo fine ad un problema noto fin dai Greci, quello della "quadratura del cerchio", che consiste nel costruire, *con riga e compasso*, un quadrato di area equivalente a quella di un cerchio dato.

Siccome x è una soluzione, deve essere irrazionale.
Questo calcolo mostra tra l'altro che x è soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti interi; in modo analogo, pare evidente che espressioni come $\sqrt{3} + \sqrt[4]{5} + 1$, ecc. sono soluzioni di qualche (magari complicata) equazione algebrica, a coefficienti interi.
Questi numeri si chiamano *numeri algebrici*.
Ci si può chiedere se sia *sempre* così, cioè per *tutti* i numeri irrazionali (per i razionali $x = m/n$ è evidente che l'equazione è $nx = m$). La risposta è *negativa*: nel 1844 Joseph Liouville ha dato il primo esempio di numero irrazionale che *non* è algebrico. Questi numeri sono detti *trascendenti*.
Nel 1882, Ferdinand von Lindemann dimostrò che π è trascendente, ponendo fine ad un problema noto fin dai Greci, quello della "quadratura del cerchio", che consiste nel costruire, *con riga e compasso*, un quadrato di area equivalente a quella di un cerchio dato.

Si sapeva da tempo che le costruzioni con riga e compasso corrispondono a lavorare con famiglie di irrazionali della forma $a + b\sqrt{n}$, che abbiamo incontrato, e che sono tutti algebrici (sono soluzioni dell'equazione $x^2 - 2ax + a^2 - bn = 0$).

Si sapeva da tempo che le costruzioni con riga e compasso corrispondono a lavorare con famiglie di irrazionali della forma $a + b\sqrt{n}$, che abbiamo incontrato, e che sono tutti algebrici (sono soluzioni dell'equazione $x^2 - 2ax + a^2 - bn = 0$).
Siccome la costruzione richiesta equivale a costruire π con riga e compasso, la cosa poteva essere possibile anche se π fosse stato, come si sapeva essere dal 1761, irrazionale. La dimostrazione di von Lindemann chiuse definitivamente questa strada e risolse un problema aperto da più di duemila anni.