

# Limiti notevoli

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

# Cosa sono i limiti notevoli?

In questa lezione presenteremo alcune formule importanti sui limiti, che spiegano il comportamento di funzioni note (seno, coseno, esponenziale, logaritmo) e che avranno alcune applicazioni al calcolo differenziale.

# Cosa sono i limiti notevoli?

In questa lezione presenteremo alcune formule importanti sui limiti, che spiegano il comportamento di funzioni note (seno, coseno, esponenziale, logaritmo) e che avranno alcune applicazioni al calcolo differenziale.

Tali limiti vengono chiamati “notevoli” perché a partire da questi potremo calcolare molti altri limiti. Li possiamo considerare come dei nuovi attrezzi, che più avanti potremo utilizzare per compiere dei lavori più difficili e importanti.

# Definizione di limite

Richiamiamo brevemente la definizione di limite, sperando che tutti l'abbiano già assimilata, o almeno digerita:

# Definizione di limite

Richiamiamo brevemente la definizione di limite, sperando che tutti l'abbiano già assimilata, o almeno digerita:

## Definizione

Data una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , un punto  $x_0 \in I$  e un numero  $\ell \in \mathbb{R}$ , scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $x \in I$  con  $|x - x_0| < \delta$  e  $x \neq x_0$ , si abbia  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ .

# Definizione di limite

Richiamiamo brevemente la definizione di limite, sperando che tutti l'abbiano già assimilata, o almeno digerita:

## Definizione

Data una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , un punto  $x_0 \in I$  e un numero  $\ell \in \mathbb{R}$ , scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $x \in I$  con  $|x - x_0| < \delta$  e  $x \neq x_0$ , si abbia  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ .

Senza commentare troppo la definizione precedente, diciamo solo che l'idea è la seguente: più ci si avvicina al numero  $x_0$  e più i valori della funzione  $f$  si avvicinano al valore  $\ell$ .

# Il teorema del confronto

Richiamiamo poi un teorema importante sui limiti, che useremo ripetutamente in questa lezione.

# Il teorema del confronto

Richiamiamo poi un teorema importante sui limiti, che useremo ripetutamente in questa lezione.

## Teorema del confronto

Supponiamo di avere tre funzioni  $f, g, h$ , definite in un intorno di un punto  $x_0$ , e tali che per ogni  $x$  si abbia  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ .



# Il teorema del confronto

Richiamiamo poi un teorema importante sui limiti, che useremo ripetutamente in questa lezione.

## Teorema del confronto

Supponiamo di avere tre funzioni  $f, g, h$ , definite in un intorno di un punto  $x_0$ , e tali che per ogni  $x$  si abbia  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ .

Se vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell,$$

allora vale anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell.$$

# Il teorema del confronto

Richiamiamo poi un teorema importante sui limiti, che useremo ripetutamente in questa lezione.

## Teorema del confronto

Supponiamo di avere tre funzioni  $f, g, h$ , definite in un intorno di un punto  $x_0$ , e tali che per ogni  $x$  si abbia  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ .

Se vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell,$$

allora vale anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell.$$

Il teorema viene anche detto **dei due carabinieri**, perché le funzioni esterne  $f, h$  “catturano” la funzione  $g$  e la spingono nella loro direzione.

# Il teorema del confronto

Richiamiamo poi un teorema importante sui limiti, che useremo ripetutamente in questa lezione.

## Teorema del confronto

Supponiamo di avere tre funzioni  $f, g, h$ , definite in un intorno di un punto  $x_0$ , e tali che per ogni  $x$  si abbia  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ .

Se vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell,$$

allora vale anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell.$$

Il teorema viene anche detto **dei due carabinieri**, perché le funzioni esterne  $f, h$  “catturano” la funzione  $g$  e la spingono nella loro direzione. Il risultato importante del teorema non è soltanto che il limite di  $g$  fa  $\ell$ , ma anche che tale limite **esiste**.

# Un limite trigonometrico

Cominciamo dimostrando un limite per la funzione  $\sin x$ . Vogliamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

con  $x$  misurato in radianti.

# Un limite trigonometrico

Cominciamo dimostrando un limite per la funzione  $\sin x$ . Vogliamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

con  $x$  misurato in radianti.

Si noti che la funzione  $\frac{\sin x}{x}$  non è definita in 0, per cui non è possibile calcolare questo limite sfruttando la continuità (cioè “sostituendo” il valore 0 nella funzione).

# Un limite trigonometrico

Cominciamo dimostrando un limite per la funzione  $\sin x$ . Vogliamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

con  $x$  misurato in radianti.

Si noti che la funzione  $\frac{\sin x}{x}$  non è definita in 0, per cui non è possibile calcolare questo limite sfruttando la continuità (cioè “sostituendo” il valore 0 nella funzione).

In più, la sostituzione darebbe come esito  $0/0$ , che è una forma indeterminata da risolvere.

# Un limite trigonometrico

Cominciamo dimostrando un limite per la funzione  $\sin x$ . Vogliamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

con  $x$  misurato in radianti.

Si noti che la funzione  $\frac{\sin x}{x}$  non è definita in 0, per cui non è possibile calcolare questo limite sfruttando la continuità (cioè “sostituendo” il valore 0 nella funzione).

In più, la sostituzione darebbe come esito  $0/0$ , che è una forma indeterminata da risolvere.

Per poter risolvere questo limite dobbiamo sfruttare le proprietà della funzione  $\sin x$ , a partire proprio dalla sua definizione.

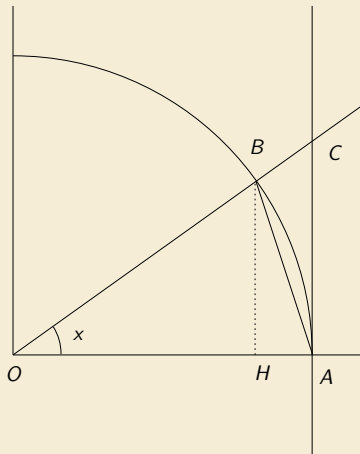
# Una stima per $\sin x$

Prendiamo un angolo  $x$  nel primo quadrante sulla circonferenza goniometrica:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .



# Una stima per $\sin x$

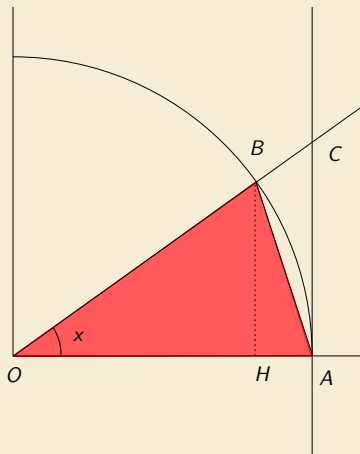
Prendiamo un angolo  $x$  nel primo quadrante sulla circonferenza goniometrica:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .



# Una stima per $\sin x$

Prendiamo un angolo  $x$  nel primo quadrante sulla circonferenza goniometrica:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

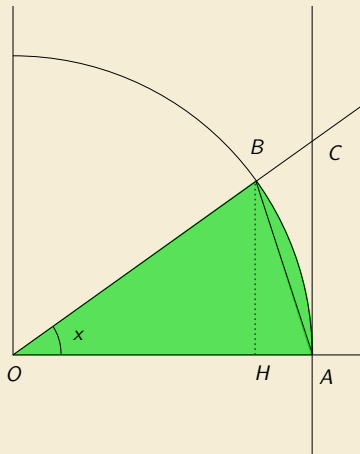
Allora si ha evidentemente che l'area del triangolo  $OAB$



# Una stima per $\sin x$

Prendiamo un angolo  $x$  nel primo quadrante sulla circonferenza goniometrica:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

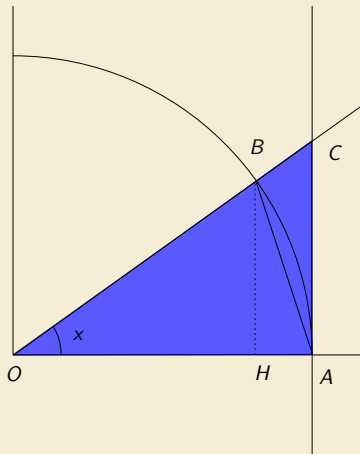
Allora si ha evidentemente che l'area del triangolo  $OAB$  è più piccola di quella del settore circolare  $OAB$ ,



# Una stima per $\sin x$

Prendiamo un angolo  $x$  nel primo quadrante sulla circonferenza goniometrica:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

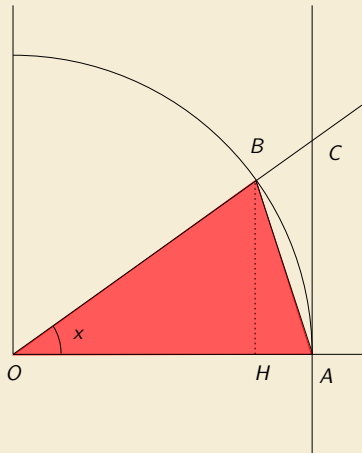
Allora si ha evidentemente che l'area del triangolo  $OAB$  è più piccola di quella del settore circolare  $OAB$ , che a sua volta è più piccola di quella del triangolo  $OAC$ .



# Una stima per $\sin x$

Ricordiamo che nella circonferenza goniometrica il raggio è unitario, quindi  $OA = 1$ .

Poiché  $BH = \sin x$ , l'area del triangolo  $OAB$  vale  $\frac{1}{2} \sin x$ .

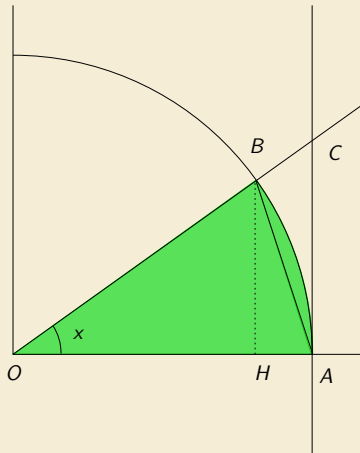


# Una stima per $\sin x$

Ricordiamo che nella circonferenza goniometrica il raggio è unitario, quindi  $OA = 1$ .

Poiché  $BH = \sin x$ , l'area del triangolo  $OAB$  vale  $\frac{1}{2} \sin x$ .

Visto poi che  $x$  è misurato in radianti, l'area del settore circolare  $OAB$  vale  $\frac{1}{2}x$ .



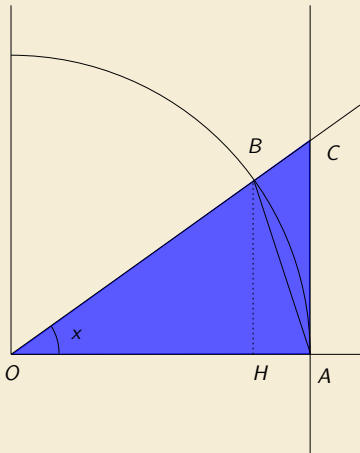
# Una stima per $\sin x$

Ricordiamo che nella circonferenza goniometrica il raggio è unitario, quindi  $OA = 1$ .

Poiché  $BH = \sin x$ , l'area del triangolo  $OAB$  vale  $\frac{1}{2} \sin x$ .

Visto poi che  $x$  è misurato in radianti, l'area del settore circolare  $OAB$  vale  $\frac{1}{2}x$ .

Infine, poiché  $CA = \operatorname{tg} x$ , l'area del triangolo  $OAC$  vale  $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ .



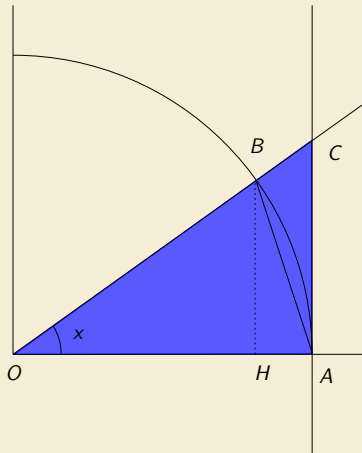
# Una stima per $\sin x$

Ricordiamo che nella circonferenza goniometrica il raggio è unitario, quindi  $OA = 1$ .

Poiché  $BH = \sin x$ , l'area del triangolo  $OAB$  vale  $\frac{1}{2} \sin x$ .

Visto poi che  $x$  è misurato in radianti, l'area del settore circolare  $OAB$  vale  $\frac{1}{2}x$ .

Infine, poiché  $CA = \tan x$ , l'area del triangolo  $OAC$  vale  $\frac{1}{2} \tan x$ .



Si ricava quindi la stima

$$\sin x \leq x \leq \tan x.$$



# Una stima per $\sin x$

Se invece  $x$  è un angolo negativo con  $-\pi/2 < x < 0$ , da quanto visto prima si ha (poiché  $-x$  sta nel primo quadrante):

$$\sin(-x) \leq -x \leq \tan(-x)$$

# Una stima per $\sin x$

Se invece  $x$  è un angolo negativo con  $-\pi/2 < x < 0$ , da quanto visto prima si ha (poiché  $-x$  sta nel primo quadrante):

$$\sin(-x) \leq -x \leq \tan(-x)$$

e quindi, ricordando che  $\sin(-x) = -\sin x$  e  $\tan(-x) = -\tan x$ :

$$-\sin x \leq -x \leq -\tan x \quad \Rightarrow \quad \tan x \leq x \leq \sin x.$$

## Una stima per $\sin x$

Se invece  $x$  è un angolo negativo con  $-\pi/2 < x < 0$ , da quanto visto prima si ha (poiché  $-x$  sta nel primo quadrante):

$$\sin(-x) \leq -x \leq \tan(-x)$$

e quindi, ricordando che  $\sin(-x) = -\sin x$  e  $\tan(-x) = -\tan x$ :

$$-\sin x \leq -x \leq -\tan x \quad \Rightarrow \quad \tan x \leq x \leq \sin x.$$

In definitiva, abbiamo dimostrato le disuguaglianze

$$\begin{array}{ll} \sin x \leq x \leq \tan x & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \tan x \leq x \leq \sin x & \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < 0. \end{array}$$

# Applicazione del teorema del confronto

Quindi abbiamo

$$\begin{array}{ll} \sin x \leq x \leq \tan x & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \tan x \leq x \leq \sin x & \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < 0. \end{array}$$

# Applicazione del teorema del confronto

Quindi abbiamo

$$\begin{array}{ll} \sin x \leq x \leq \tan x & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \tan x \leq x \leq \sin x & \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < 0. \end{array}$$

Ora dividiamo le disuguaglianze per  $\sin x$ , tenendo conto che esso è positivo nel primo quadrante e negativo nel quarto.

# Applicazione del teorema del confronto

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \sin x &\leq x \leq \tan x && \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \tan x &\leq x \leq \sin x && \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < 0. \end{aligned}$$

Ora dividiamo le disuguaglianze per  $\sin x$ , tenendo conto che esso è positivo nel primo quadrante e negativo nel quarto.

Ne segue (ricordando che  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ):

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, x \neq 0.$$

# Applicazione del teorema del confronto

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \sin x &\leq x \leq \operatorname{tg} x && \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} x &\leq x \leq \sin x && \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < 0. \end{aligned}$$

Ora dividiamo le disuguaglianze per  $\sin x$ , tenendo conto che esso è positivo nel primo quadrante e negativo nel quarto.

Ne segue (ricordando che  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ):

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, x \neq 0.$$

Mandando  $x \rightarrow 0$ , dal **teorema del confronto** otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

## Il limite per $\frac{\sin x}{x}$

In definitiva, abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

usando la definizione di  $\sin x$  e alcune stime geometriche.



## Il limite per $\frac{\sin x}{x}$

In definitiva, abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

usando la definizione di  $\sin x$  e alcune stime geometriche.

È importante ricordare che in questo limite  $x$  deve essere misurato in **radianti**: solo in questo modo l'area del settore circolare sulla circonferenza goniometrica è data da  $\frac{1}{2}x$ .

## Il limite per $\frac{\sin x}{x}$

In definitiva, abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

usando la definizione di  $\sin x$  e alcune stime geometriche.

È importante ricordare che in questo limite  $x$  deve essere misurato in **radianti**: solo in questo modo l'area del settore circolare sulla circonferenza goniometrica è data da  $\frac{1}{2}x$ .

Se invece  $x$  viene misurato in gradi sessagesimali, bisogna prima convertirlo in radianti e poi fare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^\circ} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{180}{\pi}x} = \frac{\pi}{180} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}.$$

# Un limite per $\cos x$

Da limite notevole appena mostrato per il seno, possiamo dedurre il seguente limite per il coseno:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

## Un limite per $\cos x$

Da limite notevole appena mostrato per il seno, possiamo dedurre il seguente limite per il coseno:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(si noti che anche questo è nella forma  $0/0$ ).

## Un limite per $\cos x$

Da limite notevole appena mostrato per il seno, possiamo dedurre il seguente limite per il coseno:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(si noti che anche questo è nella forma  $0/0$ ).

Per dimostrarlo, usiamo la formula di bisezione:  $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ ,

# Un limite per $\cos x$

Da limite notevole appena mostrato per il seno, possiamo dedurre il seguente limite per il coseno:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(si noti che anche questo è nella forma  $0/0$ ).

Per dimostrarlo, usiamo la formula di bisezione:  $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ ,  
da cui

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2.$$

# Un limite per $\cos x$

Da limite notevole appena mostrato per il seno, possiamo dedurre il seguente limite per il coseno:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(si noti che anche questo è nella forma  $0/0$ ).

Per dimostrarlo, usiamo la formula di bisezione:  $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ ,  
da cui

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2.$$

Prendendo il limite per  $x \rightarrow 0$ , si ha il risultato.

# La funzione esponenziale

Ora vogliamo dimostrare un altro limite notevole, legato alla funzione esponenziale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$



# La funzione esponenziale

Ora vogliamo dimostrare un altro limite notevole, legato alla funzione esponenziale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Si noti che anche in questo caso il limite si presenta nella forma  $0/0$ .

# La funzione esponenziale

Ora vogliamo dimostrare un altro limite notevole, legato alla funzione esponenziale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Si noti che anche in questo caso il limite si presenta nella forma  $0/0$ .

Anche qui dovremo basarci in qualche modo sulla definizione stessa di funzione esponenziale, in particolare sulla definizione del numero di Nepero

$$e = 2,718281828459045 \dots$$

di cui si è già parlato, ma che non è mai stato definito esplicitamente.

# La funzione esponenziale

Ora vogliamo dimostrare un altro limite notevole, legato alla funzione esponenziale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Si noti che anche in questo caso il limite si presenta nella forma  $0/0$ .

Anche qui dovremo basarci in qualche modo sulla definizione stessa di funzione esponenziale, in particolare sulla definizione del numero di Nepero

$$e = 2,718281828459045 \dots$$

di cui si è già parlato, ma che non è mai stato definito esplicitamente.

Per caratterizzare il numero  $e$  utilizzeremo un modo grafico: non è completamente rigoroso, ma è abbastanza intuitivo.

# Esponenziale e retta

Una delle proprietà di ogni funzione esponenziale  $y = a^x$  è che sta sempre **sopra** una retta del tipo  $y = m_a x + 1$ , ovvero

per ogni base  $a > 0$  dell'esponenziale, esiste un coefficiente angolare  $m_a$  tale che

$$a^x \geq m_a x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

# Esponenziale e retta

Una delle proprietà di ogni funzione esponenziale  $y = a^x$  è che sta sempre **sopra** una retta del tipo  $y = m_a x + 1$ , ovvero

per ogni base  $a > 0$  dell'esponenziale, esiste un coefficiente angolare  $m_a$  tale che

$$a^x \geq m_a x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Visto che sia la retta che la funzione esponenziale passano entrambe per il punto  $(0, 1)$ , tale proprietà implica che la retta sia **tangente** all'esponenziale in quel punto.

# Esponenziale e retta

Una delle proprietà di ogni funzione esponenziale  $y = a^x$  è che sta sempre **sopra** una retta del tipo  $y = m_a x + 1$ , ovvero

per ogni base  $a > 0$  dell'esponenziale, esiste un coefficiente angolare  $m_a$  tale che

$$a^x \geq m_a x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Visto che sia la retta che la funzione esponenziale passano entrambe per il punto  $(0, 1)$ , tale proprietà implica che la retta sia **tangente** all'esponenziale in quel punto.

Ciò è vero sia nel caso di esponenziale crescente ( $a > 1$ ) che nel caso di esponenziale decrescente ( $0 < a < 1$ ).

# Esponenziale e retta

Una delle proprietà di ogni funzione esponenziale  $y = a^x$  è che sta sempre **sopra** una retta del tipo  $y = m_a x + 1$ , ovvero

per ogni base  $a > 0$  dell'esponenziale, esiste un coefficiente angolare  $m_a$  tale che

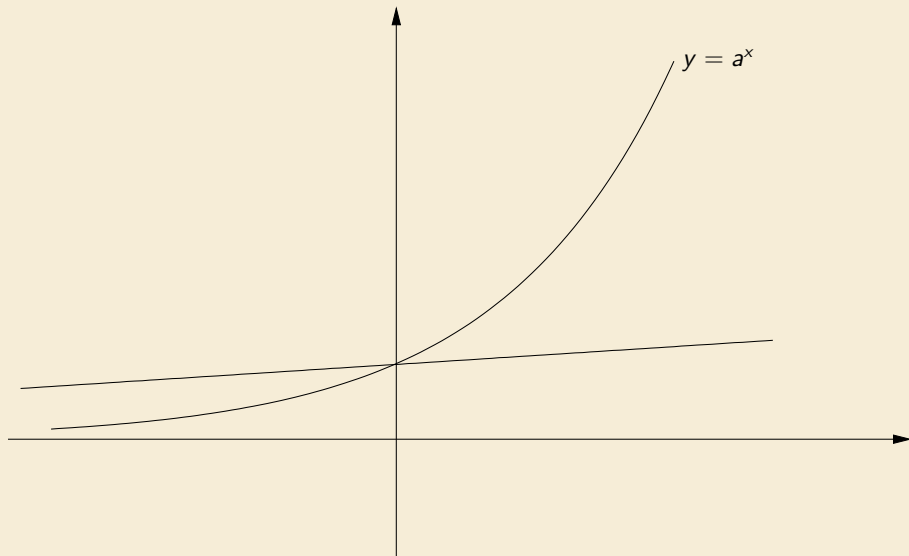
$$a^x \geq m_a x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Visto che sia la retta che la funzione esponenziale passano entrambe per il punto  $(0, 1)$ , tale proprietà implica che la retta sia **tangente** all'esponenziale in quel punto.

Ciò è vero sia nel caso di esponenziale crescente ( $a > 1$ ) che nel caso di esponenziale decrescente ( $0 < a < 1$ ).

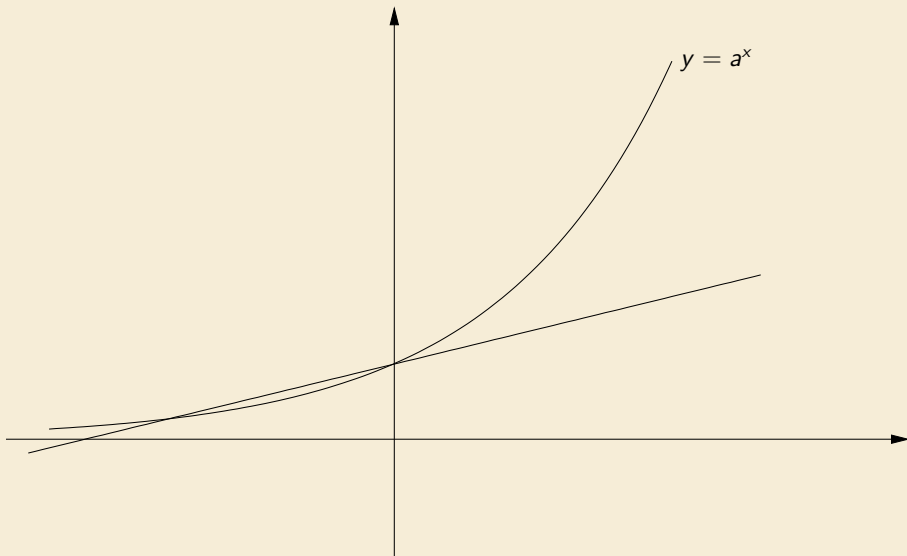
Questo è quanto diamo per buono (e che in qualche modo è compreso nella *definizione* di esponenziale). Ora cercheremo di giustificarlo con alcuni disegni.

# Grafico dell'esponenziale ( $a > 1$ )

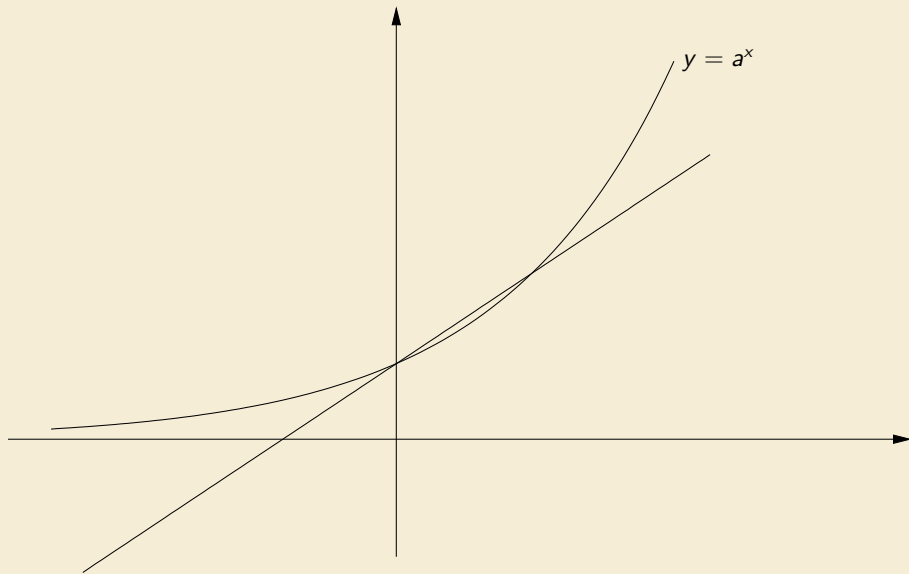




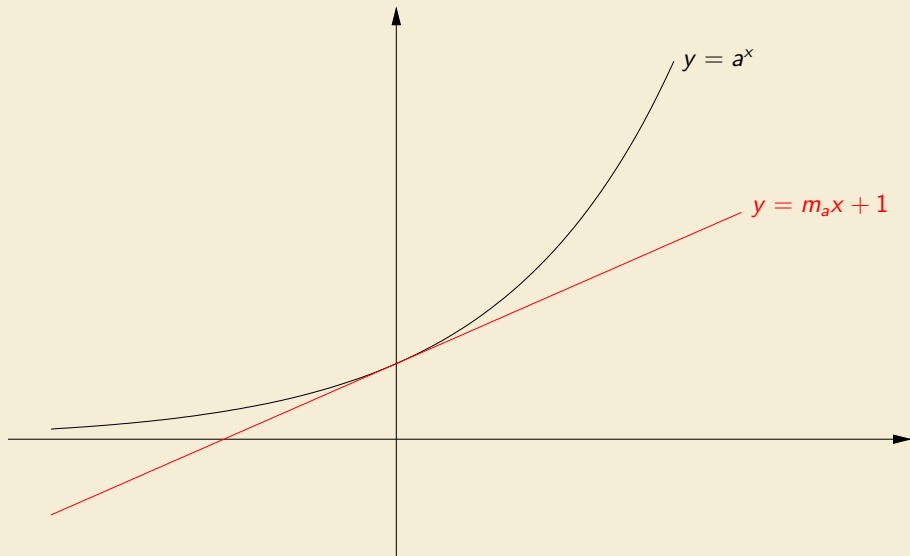
# Grafico dell'esponenziale ( $a > 1$ )



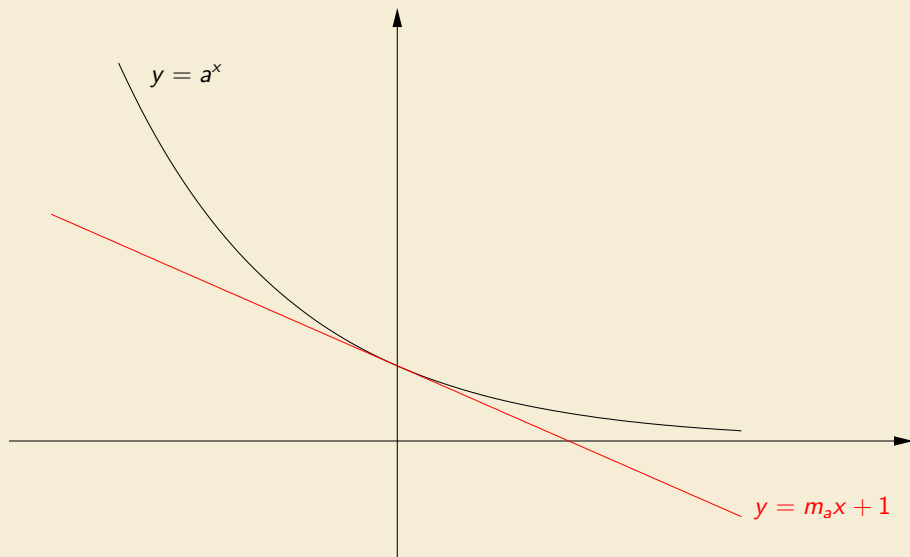
# Grafico dell'esponenziale ( $a > 1$ )



# Grafico dell'esponenziale ( $a > 1$ )



# Grafico dell'esponenziale ( $0 < a < 1$ )



## Definizione del numero $e$

Quindi per ogni funzione esponenziale di base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , vale che

$$a^x \geq m_a x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

# Definizione del numero $e$

Quindi per ogni funzione esponenziale di base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , vale che

$$a^x \geq m_a x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Poi si può verificare che  $m_a$  assume ogni valore in  $\mathbb{R}$  al variare di  $a > 0$ : infatti  $m_a$  è positivo per  $a > 1$  e va verso  $+\infty$  al crescere di  $a$ , e  $m_a$  è negativo per  $a < 1$  e va verso  $-\infty$  al tendere di  $a \rightarrow 0$ .

## Definizione del numero $e$

Quindi per ogni funzione esponenziale di base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , vale che

$$a^x \geq m_a x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Poi si può verificare che  $m_a$  assume ogni valore in  $\mathbb{R}$  al variare di  $a > 0$ : infatti  $m_a$  è positivo per  $a > 1$  e va verso  $+\infty$  al crescere di  $a$ , e  $m_a$  è negativo per  $a < 1$  e va verso  $-\infty$  al tendere di  $a \rightarrow 0$ .

In particolare, esiste un unico valore di  $a$  per cui  $m_a = 1$ , ovvero per cui la retta tangente è parallela alla bisettrice del primo quadrante.

## Definizione del numero $e$

Quindi per ogni funzione esponenziale di base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , vale che

$$a^x \geq m_a x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Poi si può verificare che  $m_a$  assume ogni valore in  $\mathbb{R}$  al variare di  $a > 0$ : infatti  $m_a$  è positivo per  $a > 1$  e va verso  $+\infty$  al crescere di  $a$ , e  $m_a$  è negativo per  $a < 1$  e va verso  $-\infty$  al tendere di  $a \rightarrow 0$ .

In particolare, esiste un unico valore di  $a$  per cui  $m_a = 1$ , ovvero per cui la retta tangente è parallela alla bisettrice del primo quadrante.

### Definizione

Chiamiamo  $e$  (numero di Nepero) la base dell'esponenziale per cui  $m_e = 1$ .



## Definizione del numero $e$

Quindi per ogni funzione esponenziale di base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , vale che

$$a^x \geq m_a x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Poi si può verificare che  $m_a$  assume ogni valore in  $\mathbb{R}$  al variare di  $a > 0$ : infatti  $m_a$  è positivo per  $a > 1$  e va verso  $+\infty$  al crescere di  $a$ , e  $m_a$  è negativo per  $a < 1$  e va verso  $-\infty$  al tendere di  $a \rightarrow 0$ .

In particolare, esiste un unico valore di  $a$  per cui  $m_a = 1$ , ovvero per cui la retta tangente è parallela alla bisettrice del primo quadrante.

### Definizione

Chiamiamo  $e$  (numero di Nepero) la base dell'esponenziale per cui  $m_e = 1$ .

Con delle approssimazioni si può poi vedere che  $e \simeq 2,718\dots$

# Una stima per l'esponenziale

In sintesi, la base e verifica

$$e^x \geq x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

# Una stima per l'esponenziale

In sintesi, la base  $e$  verifica

$$e^x \geq x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, cambiando  $x$  in  $-x$ , si ha

$$e^{-x} \geq -x + 1,$$

# Una stima per l'esponenziale

In sintesi, la base e verifica

$$e^x \geq x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, cambiando  $x$  in  $-x$ , si ha

$$e^{-x} \geq -x + 1,$$

da cui, ricordando che  $e^{-x} = 1/e^x$ ,

$$\frac{1}{e^x} \geq -x + 1$$

# Una stima per l'esponenziale

In sintesi, la base e verifica

$$e^x \geq x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, cambiando  $x$  in  $-x$ , si ha

$$e^{-x} \geq -x + 1,$$

da cui, ricordando che  $e^{-x} = 1/e^x$ ,

$$\frac{1}{e^x} \geq -x + 1 \quad \Rightarrow \quad e^x \leq \frac{1}{-x + 1} \quad \text{per } x < 1.$$

# Una stima per l'esponenziale

In sintesi, la base e verifica

$$e^x \geq x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, cambiando  $x$  in  $-x$ , si ha

$$e^{-x} \geq -x + 1,$$

da cui, ricordando che  $e^{-x} = 1/e^x$ ,

$$\frac{1}{e^x} \geq -x + 1 \quad \Rightarrow \quad e^x \leq \frac{1}{-x + 1} \quad \text{per } x < 1.$$

Quindi abbiamo scoperto che

$$x + 1 \leq e^x \leq \frac{1}{-x + 1} \quad \text{per } x < 1.$$

## Il limite notevole per l'esponenziale

Ripartiamo da

$$x + 1 \leq e^x \leq \frac{1}{-x + 1} \quad \text{per } x < 1$$

e togliamo 1 ai tre membri. Otteniamo

## Il limite notevole per l'esponenziale

Ripartiamo da

$$x + 1 \leq e^x \leq \frac{1}{-x + 1} \quad \text{per } x < 1$$

e togliamo 1 ai tre membri. Otteniamo

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{-x + 1} - 1 = \frac{x}{-x + 1}.$$



# Il limite notevole per l'esponenziale

Ripartiamo da

$$x + 1 \leq e^x \leq \frac{1}{-x + 1} \quad \text{per } x < 1$$

e togliamo 1 ai tre membri. Otteniamo

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{-x + 1} - 1 = \frac{x}{-x + 1}.$$

Se poi dividiamo tutto per  $x$ , abbiamo

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{-x + 1} \quad \text{se } 0 < x < 1$$

$$1 \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq \frac{1}{-x + 1} \quad \text{se } x < 0.$$

# Il limite notevole per l'esponenziale

Ripartiamo da

$$x + 1 \leq e^x \leq \frac{1}{-x + 1} \quad \text{per } x < 1$$

e togliamo 1 ai tre membri. Otteniamo

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{-x + 1} - 1 = \frac{x}{-x + 1}.$$

Se poi dividiamo tutto per  $x$ , abbiamo

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{-x + 1} \quad \text{se } 0 < x < 1$$

$$1 \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq \frac{1}{-x + 1} \quad \text{se } x < 0.$$

In ogni caso, applicando il **teorema del confronto**, otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

## Approfondimento: l'esponenziale con base generica

Se vogliamo calcolare il limite notevole con una base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , possiamo ora usare le proprietà dei logaritmi:

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

# Approfondimento: l'esponenziale con base generica

Se vogliamo calcolare il limite notevole con una base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , possiamo ora usare le proprietà dei logaritmi:

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

da cui otteniamo

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \log a \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a}.$$

## Approfondimento: l'esponenziale con base generica

Se vogliamo calcolare il limite notevole con una base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , possiamo ora usare le proprietà dei logaritmi:

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

da cui otteniamo

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \log a \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a}.$$

Quindi, sostituendo  $y = x \log a$ , si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} = \log a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \log a$$

dove il logaritmo si intende in base  $e$ .

## Approfondimento: l'esponenziale con base generica

Se vogliamo calcolare il limite notevole con una base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , possiamo ora usare le proprietà dei logaritmi:

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

da cui otteniamo

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \log a \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a}.$$

Quindi, sostituendo  $y = x \log a$ , si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} = \log a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \log a$$

dove il logaritmo si intende in base  $e$ . Dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

# Un limite notevole per il logaritmo

Dal limite per l'esponenziale si può ricavare facilmente il seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

# Un limite notevole per il logaritmo

Dal limite per l'esponenziale si può ricavare facilmente il seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Infatti procediamo così: con una sostituzione poniamo

$$\log(1+x) = y$$



# Un limite notevole per il logaritmo

Dal limite per l'esponenziale si può ricavare facilmente il seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Infatti procediamo così: con una sostituzione poniamo

$$\log(1+x) = y \quad \Rightarrow \quad 1+x = e^y$$

# Un limite notevole per il logaritmo

Dal limite per l'esponenziale si può ricavare facilmente il seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Infatti procediamo così: con una sostituzione poniamo

$$\log(1+x) = y \quad \Rightarrow \quad 1+x = e^y \quad \Rightarrow \quad x = e^y - 1.$$

# Un limite notevole per il logaritmo

Dal limite per l'esponenziale si può ricavare facilmente il seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Infatti procediamo così: con una sostituzione poniamo

$$\log(1+x) = y \quad \Rightarrow \quad 1+x = e^y \quad \Rightarrow \quad x = e^y - 1.$$

Poiché quando  $x \rightarrow 0$  si ha anche  $y \rightarrow 0$ , se ora sostituiamo nel limite otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1$$

per cui il limite è dimostrato.

## Approfondimento: il logaritmo in base generica

Anche in questo caso, se vogliamo usare una base generica per il logaritmo, dalla regola del cambio di base

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

segue che

# Approfondimento: il logaritmo in base generica

Anche in questo caso, se vogliamo usare una base generica per il logaritmo, dalla regola del cambio di base

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

segue che

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{\log(1+x)}{x \log a} = \frac{1}{\log a} \frac{\log(1+x)}{x},$$

## Approfondimento: il logaritmo in base generica

Anche in questo caso, se vogliamo usare una base generica per il logaritmo, dalla regola del cambio di base

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

segue che

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{\log(1+x)}{x \log a} = \frac{1}{\log a} \frac{\log(1+x)}{x},$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}.$$

# La forma indeterminata $1^\infty$

Per concludere, studiamo ora un limite che si presenta nella forma  $1^\infty$ , che è indeterminata. Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

dove  $x$  può tendere sia a  $+\infty$ , sia a  $-\infty$ .

# La forma indeterminata $1^\infty$

Per concludere, studiamo ora un limite che si presenta nella forma  $1^\infty$ , che è indeterminata. Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

dove  $x$  può tendere sia a  $+\infty$ , sia a  $-\infty$ .

Anche in questo caso ritroviamo il numero di Nepero  $e$ .



# La forma indeterminata $1^\infty$

Per concludere, studiamo ora un limite che si presenta nella forma  $1^\infty$ , che è indeterminata. Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

dove  $x$  può tendere sia a  $+\infty$ , sia a  $-\infty$ .

Anche in questo caso ritroviamo il numero di Nepero  $e$ .

Nota: alcuni preferiscono *definire* il numero  $e$  in questo modo (e da questo limite ricavare i precedenti), anche se così facendo non è molto intuitivo capire che questo limite esiste ed è finito.

# Dimostrazione

Procediamo calcolando il *logaritmo* del primo membro:

$$\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x =$$

# Dimostrazione

Procediamo calcolando il *logaritmo* del primo membro:

$$\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) =$$

# Dimostrazione

Procediamo calcolando il *logaritmo* del primo membro:

$$\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}.$$

# Dimostrazione

Procediamo calcolando il *logaritmo* del primo membro:

$$\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}.$$

Da  $x \rightarrow \pm\infty$  segue che  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , quindi si può usare il limite notevole del logaritmo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

# Dimostrazione

Procediamo calcolando il *logaritmo* del primo membro:

$$\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}.$$

Da  $x \rightarrow \pm\infty$  segue che  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , quindi si può usare il limite notevole del logaritmo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Poiché dalla definizione di logaritmo si ha

$$a = e^{\log a}$$

# Dimostrazione

Procediamo calcolando il *logaritmo* del primo membro:

$$\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}.$$

Da  $x \rightarrow \pm\infty$  segue che  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , quindi si può usare il limite notevole del logaritmo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Poiché dalla definizione di logaritmo si ha

$$a = e^{\log a}$$

e la funzione esponenziale è *continua*, otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x} = e^1 = e.$$

# Esercizi

Lasciamo infine alcuni limiti notevoli legati a quelli appena mostrati, che possono essere svolti per esercizio.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}.$$



## Approfondimento: un esercizio un po' più difficile

Svolgiamo come approfondimento un limite un po' più difficile:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k \quad k \in \mathbb{R}.$$

## Approfondimento: un esercizio un po' più difficile

Svolgiamo come approfondimento un limite un po' più difficile:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k \quad k \in \mathbb{R}.$$

Come dimostrarlo? Un trucco è quello di moltiplicare e dividere per una stessa quantità, in questo caso  $k \log(1+x)$ :

$$\frac{(1+x)^k - 1}{x} = \frac{(1+x)^k - 1}{k \log(1+x)} \cdot \frac{k \log(1+x)}{x}.$$

## Approfondimento: un esercizio un po' più difficile

Svolgiamo come approfondimento un limite un po' più difficile:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k \quad k \in \mathbb{R}.$$

Come dimostrarlo? Un trucco è quello di moltiplicare e dividere per una stessa quantità, in questo caso  $k \log(1+x)$ :

$$\frac{(1+x)^k - 1}{x} = \frac{(1+x)^k - 1}{k \log(1+x)} \cdot \frac{k \log(1+x)}{x}.$$

L'ultima frazione tende a  $k$  per  $x \rightarrow 0$ , per il limite notevole del logaritmo.

## Approfondimento: un esercizio un po' più difficile

Per trattare la prima frazione, cioè

$$\frac{(1+x)^k - 1}{k \log(1+x)}$$

facciamo la sostituzione  $1+y = (1+x)^k$ .

# Approfondimento: un esercizio un po' più difficile

Per trattare la prima frazione, cioè

$$\frac{(1+x)^k - 1}{k \log(1+x)}$$

facciamo la sostituzione  $1+y = (1+x)^k$ .

La frazione diventa

$$\frac{y}{\log(1+y)},$$

## Approfondimento: un esercizio un po' più difficile

Per trattare la prima frazione, cioè

$$\frac{(1+x)^k - 1}{k \log(1+x)}$$

facciamo la sostituzione  $1+y = (1+x)^k$ .

La frazione diventa

$$\frac{y}{\log(1+y)},$$

e poiché si ha che  $y \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ , si ottiene che la prima frazione tende a 1.

## Approfondimento: un esercizio un po' più difficile

Per trattare la prima frazione, cioè

$$\frac{(1+x)^k - 1}{k \log(1+x)}$$

facciamo la sostituzione  $1+y = (1+x)^k$ .

La frazione diventa

$$\frac{y}{\log(1+y)},$$

e poiché si ha che  $y \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ , si ottiene che la prima frazione tende a 1. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \log(1+x)}{x} \right) = k.$$

## Approfondimento: un esercizio un po' più difficile

Per trattare la prima frazione, cioè

$$\frac{(1+x)^k - 1}{k \log(1+x)}$$

facciamo la sostituzione  $1+y = (1+x)^k$ .

La frazione diventa

$$\frac{y}{\log(1+y)},$$

e poiché si ha che  $y \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ , si ottiene che la prima frazione tende a 1. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \log(1+x)}{x} \right) = k.$$

Questa dimostrazione vale per ogni  $k \in \mathbb{R}$ .