

# Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

# Introduzione

Una delle cose più sorprendenti dell'Analisi matematica, ovvero di quella parte della Matematica che studia i limiti, le derivate, gli integrali, è la relazione che intercorre proprio tra la *derivata* e l'*integrale definito*.

# Introduzione

Una delle cose più sorprendenti dell'Analisi matematica, ovvero di quella parte della Matematica che studia i limiti, le derivate, gli integrali, è la relazione che intercorre proprio tra la *derivata* e l'*integrale definito*.

I due concetti di derivata e di integrale definito possono essere introdotti in modo geometrico:

# Introduzione

Una delle cose più sorprendenti dell'Analisi matematica, ovvero di quella parte della Matematica che studia i limiti, le derivate, gli integrali, è la relazione che intercorre proprio tra la *derivata* e l'*integrale definito*.

I due concetti di derivata e di integrale definito possono essere introdotti in modo geometrico:

- la derivata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione

# Introduzione

Una delle cose più sorprendenti dell'Analisi matematica, ovvero di quella parte della Matematica che studia i limiti, le derivate, gli integrali, è la relazione che intercorre proprio tra la *derivata* e l'*integrale definito*.

I due concetti di derivata e di integrale definito possono essere introdotti in modo geometrico:

- la derivata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione
- l'integrale definito rappresenta l'area compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico di una funzione, in un certo intervallo.

# Introduzione

Una delle cose più sorprendenti dell'Analisi matematica, ovvero di quella parte della Matematica che studia i limiti, le derivate, gli integrali, è la relazione che intercorre proprio tra la *derivata* e l'*integrale definito*.

I due concetti di derivata e di integrale definito possono essere introdotti in modo geometrico:

- la derivata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione
- l'integrale definito rappresenta l'area compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico di una funzione, in un certo intervallo.

Il **Teorema fondamentale del calcolo integrale** lega tra loro questi due concetti apparentemente molto diversi, e fornisce anche un modo operativo per calcolare gli integrali definiti, mediante la primitiva di una funzione.

# Definizione di derivata

Rivediamo brevemente la definizione di *derivata* di una funzione:

# Definizione di derivata

Rivediamo brevemente la definizione di *derivata* di una funzione:

## Definizione di derivata

La derivata di una funzione  $y = f(x)$  in un punto  $x_0$  interno al suo dominio è data da

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se tale limite esiste.

# Definizione di derivata

Rivediamo brevemente la definizione di *derivata* di una funzione:

## Definizione di derivata

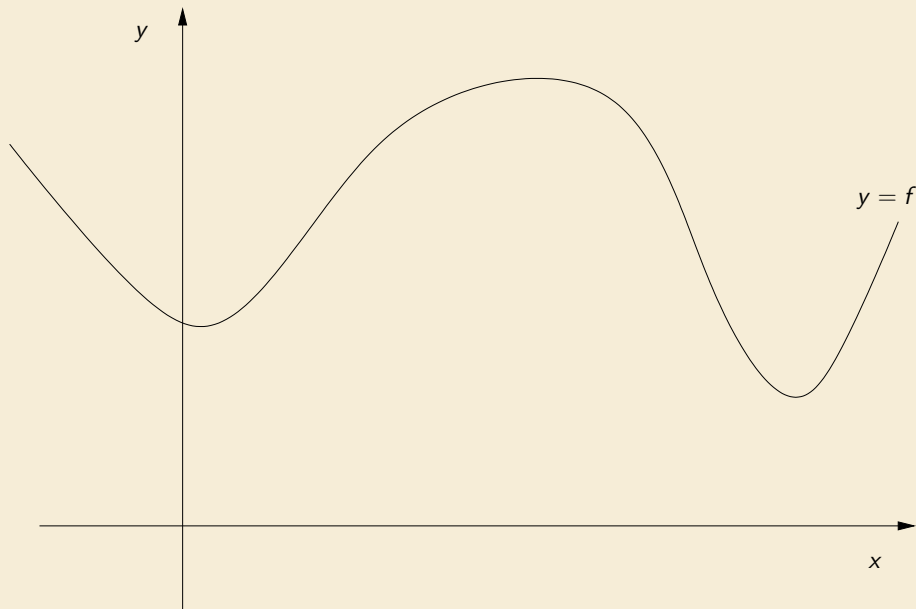
La derivata di una funzione  $y = f(x)$  in un punto  $x_0$  interno al suo dominio è data da

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

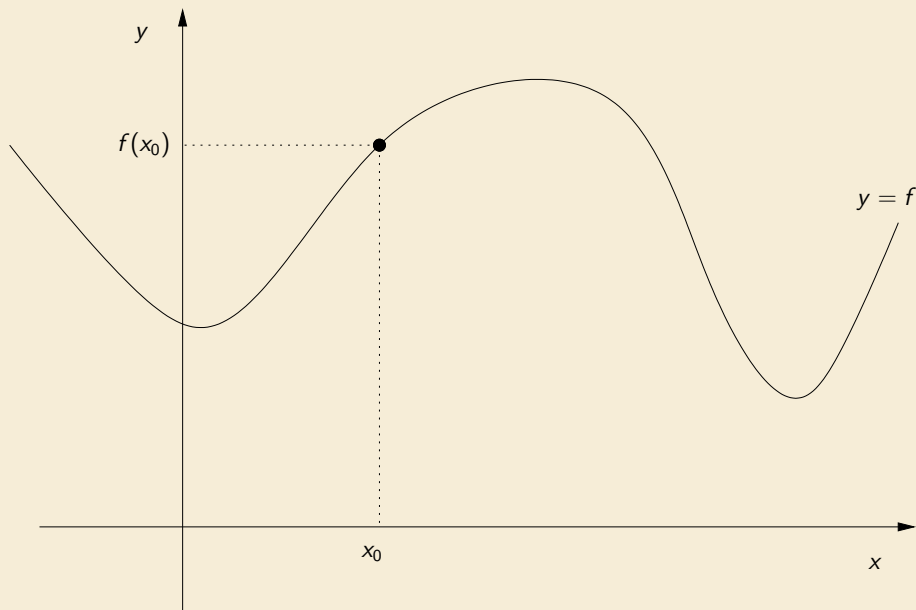
se tale limite esiste.

Quindi la derivata, se esiste, è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione  $y = f(x)$  nel punto  $(x_0; f(x_0))$ .

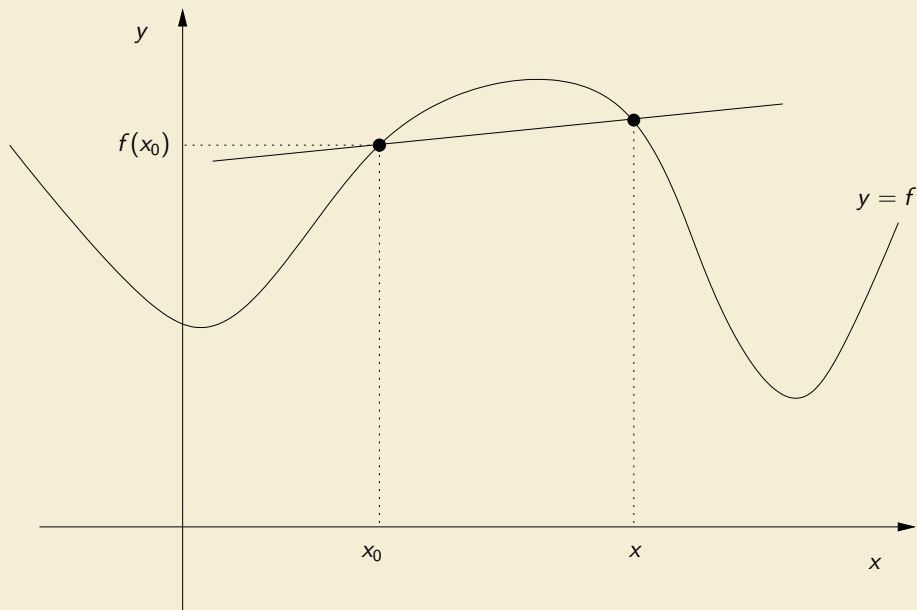
# Derivata come retta tangente



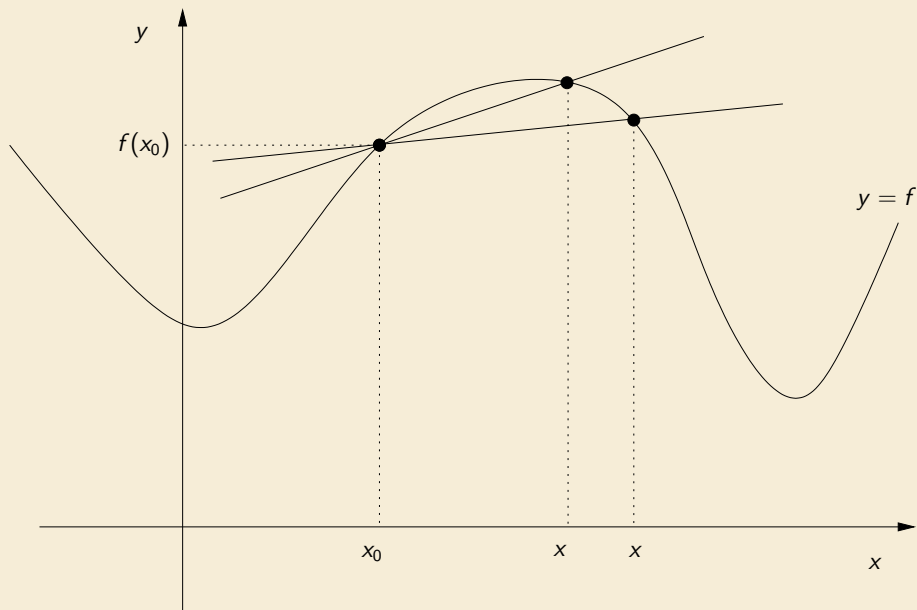
# Derivata come retta tangente



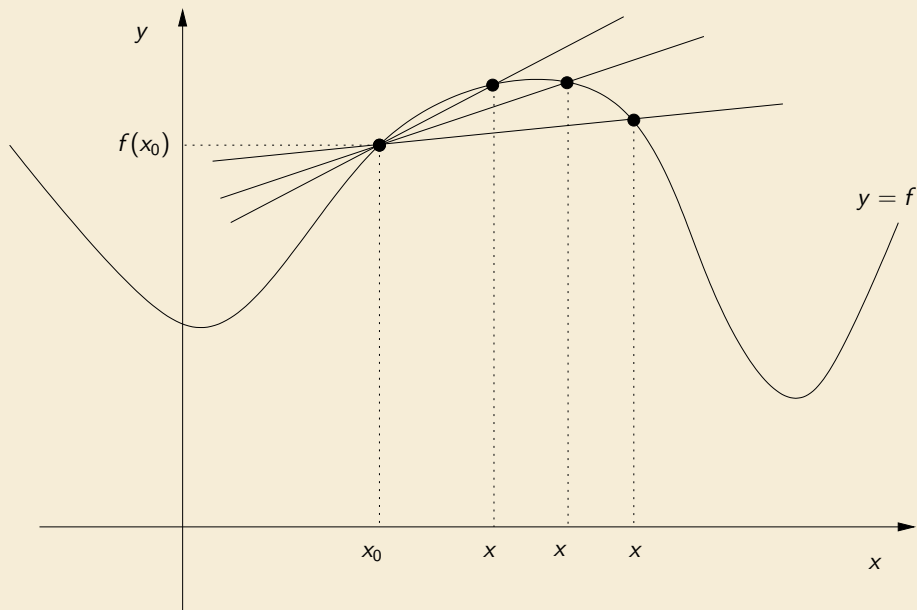
# Derivata come retta tangente



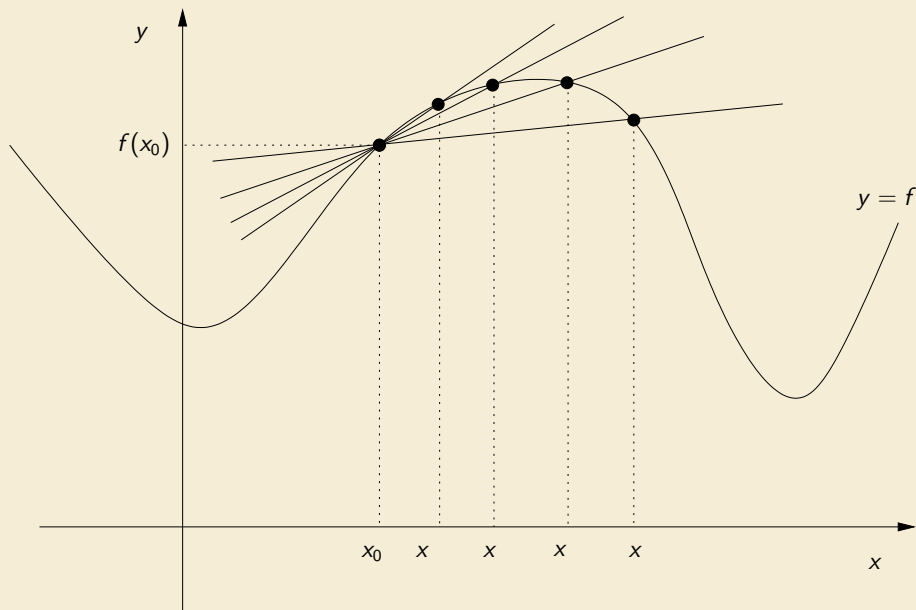
# Derivata come retta tangente



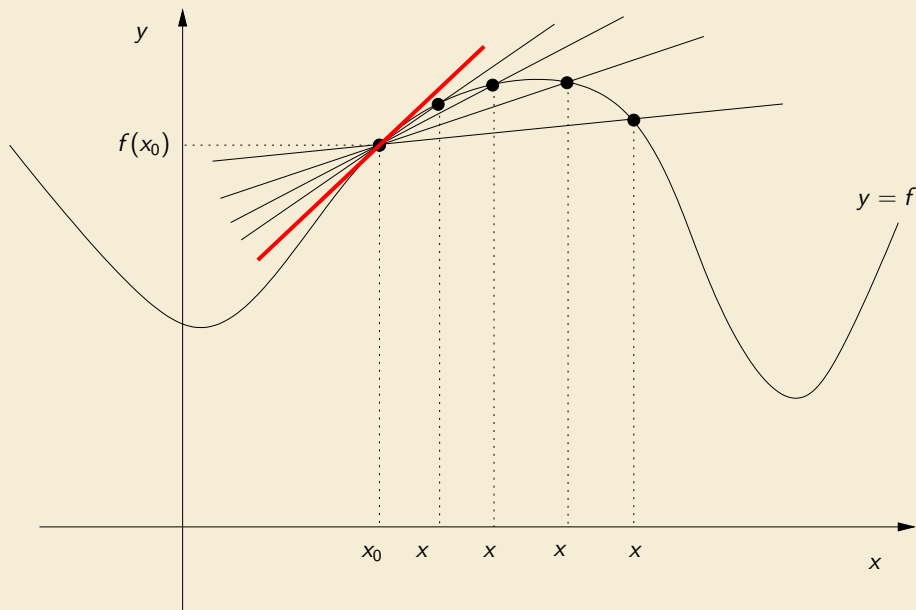
# Derivata come retta tangente



# Derivata come retta tangente



# Derivata come retta tangente



# Definizione di integrale definito

Rivediamo anche la definizione di integrale definito: se vogliamo trovare l'area sottesa dal grafico di una funzione continua  $y = f(x)$  in un intervallo  $[a, b]$ , procediamo in questo modo:

# Definizione di integrale definito

Rivediamo anche la definizione di integrale definito: se vogliamo trovare l'area sottesa dal grafico di una funzione continua  $y = f(x)$  in un intervallo  $[a, b]$ , procediamo in questo modo:

- suddividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  sottointervalli

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

# Definizione di integrale definito

Rivediamo anche la definizione di integrale definito: se vogliamo trovare l'area sottesa dal grafico di una funzione continua  $y = f(x)$  in un intervallo  $[a, b]$ , procediamo in questo modo:

- suddividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  sottointervalli

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

- in ogni sottointervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  prendiamo un punto  $c_i$

# Definizione di integrale definito

Rivediamo anche la definizione di integrale definito: se vogliamo trovare l'area sottesa dal grafico di una funzione continua  $y = f(x)$  in un intervallo  $[a, b]$ , procediamo in questo modo:

- suddividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  sottointervalli

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

- in ogni sottointervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  prendiamo un punto  $c_i$
- costruiamo il numero

$$S_n = (x_1 - x_0)f(c_1) + (x_2 - x_1)f(c_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(c_n)$$

# Definizione di integrale definito

Rivediamo anche la definizione di integrale definito: se vogliamo trovare l'area sottesa dal grafico di una funzione continua  $y = f(x)$  in un intervallo  $[a, b]$ , procediamo in questo modo:

- suddividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  sottointervalli

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

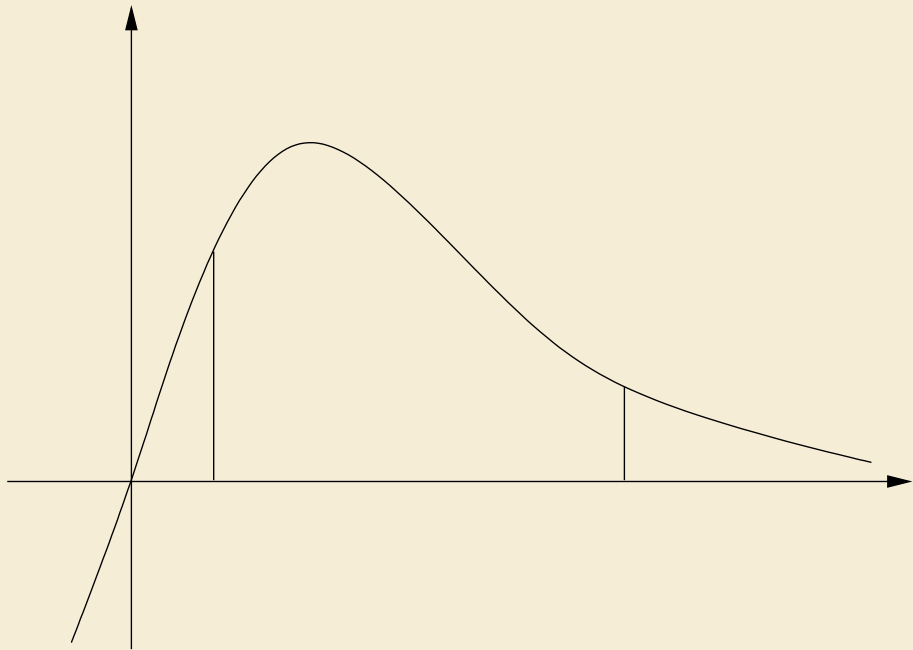
- in ogni sottointervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  prendiamo un punto  $c_i$
- costruiamo il numero

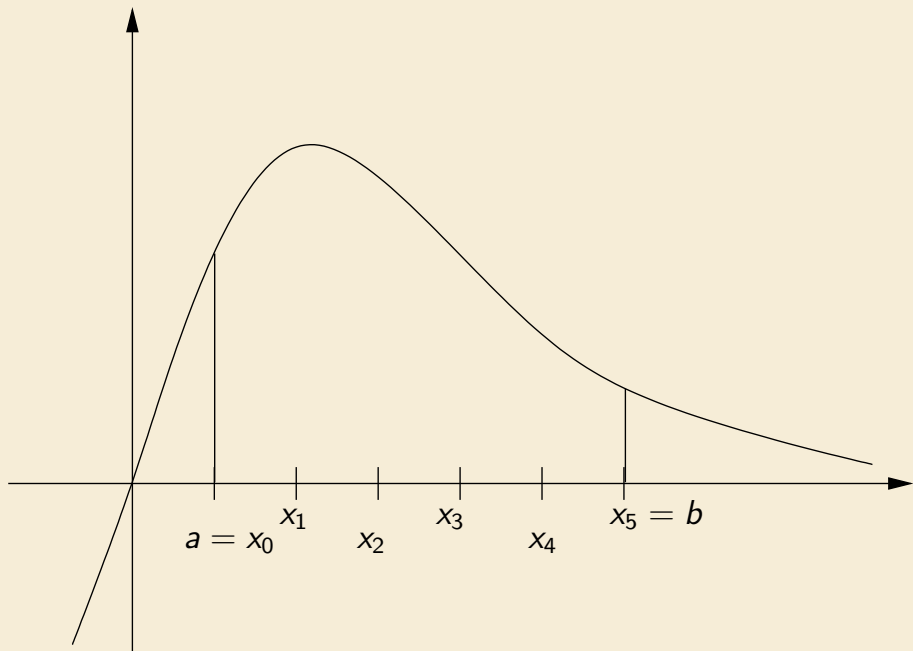
$$S_n = (x_1 - x_0)f(c_1) + (x_2 - x_1)f(c_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(c_n)$$

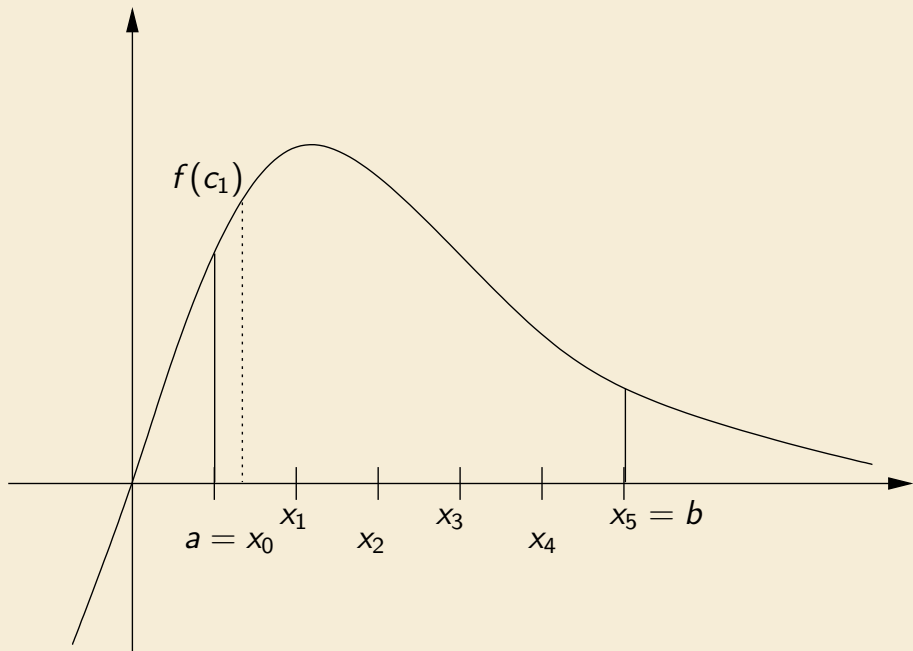
- l'integrale definito è dato dal limite

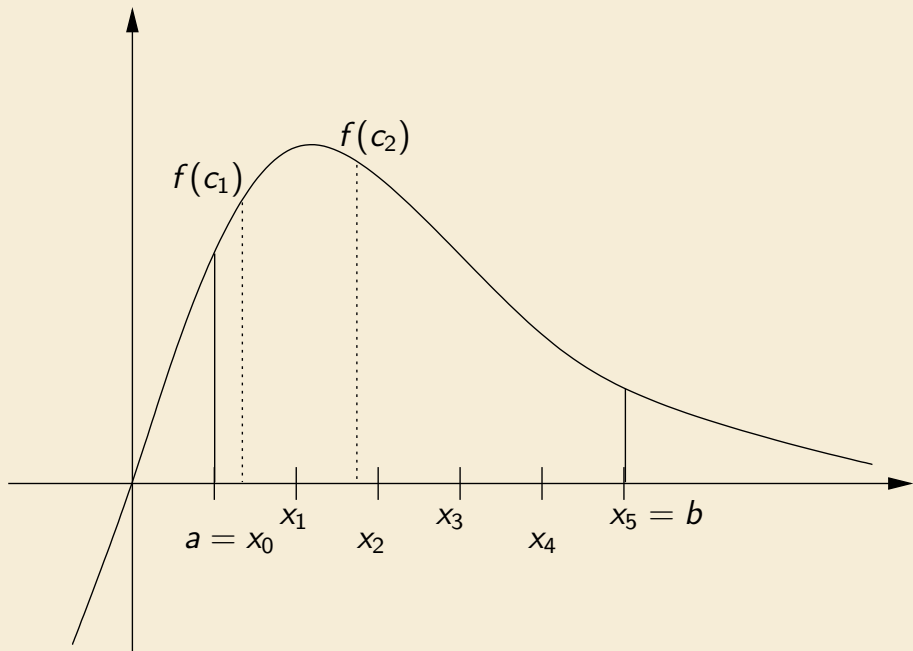
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

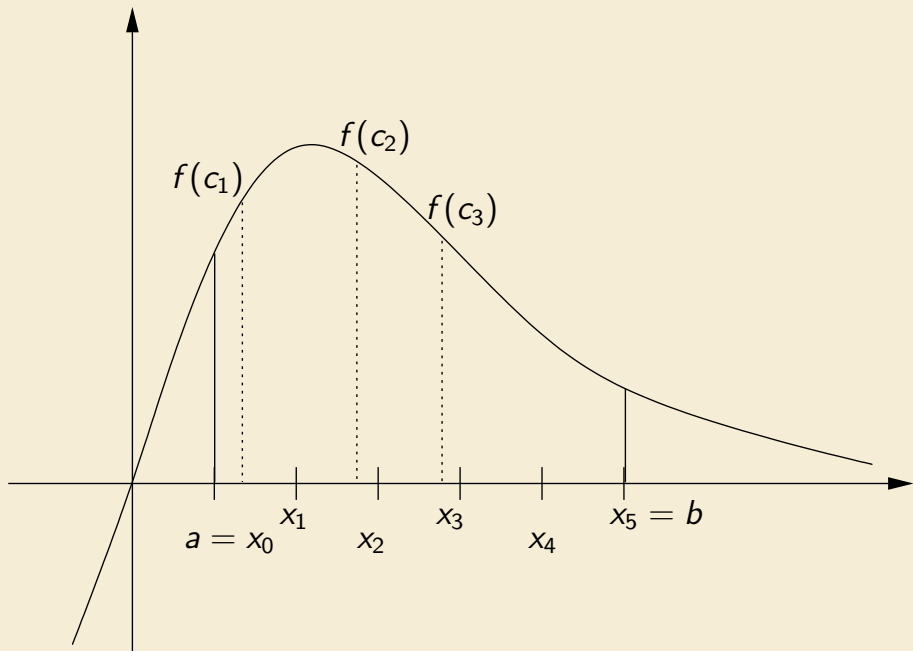
dove si infittisce sempre più la suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$ .

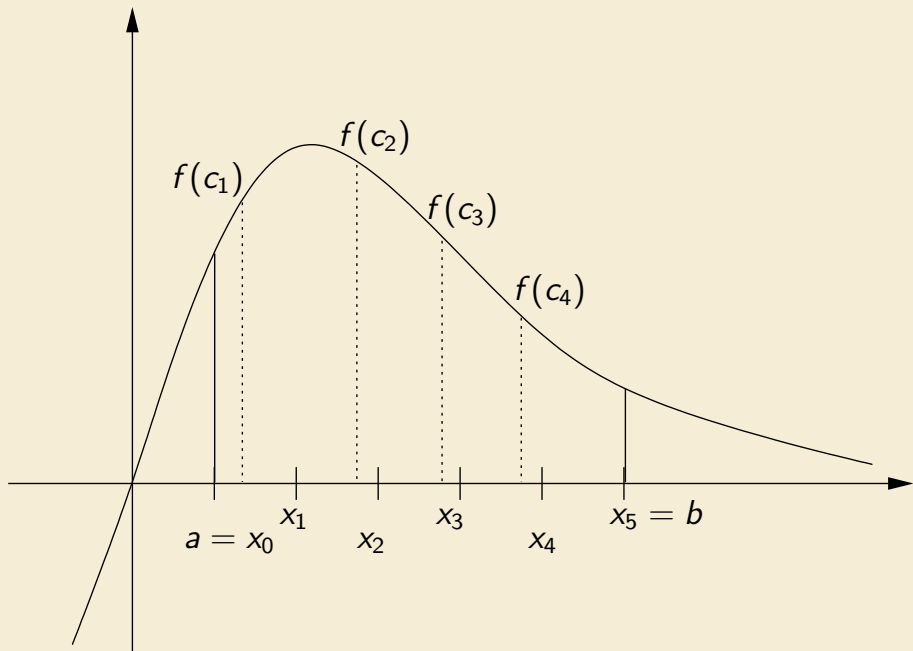


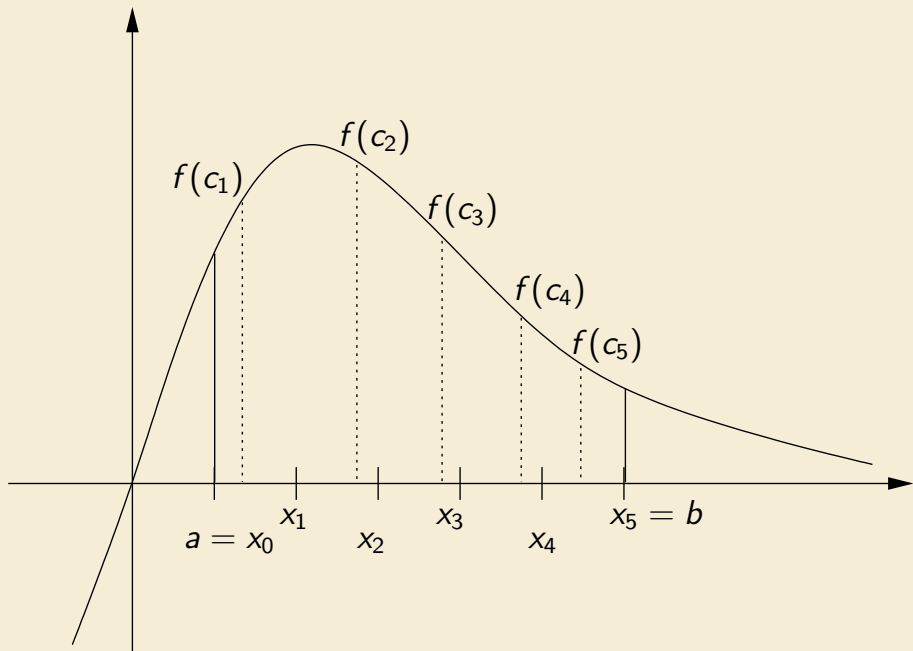


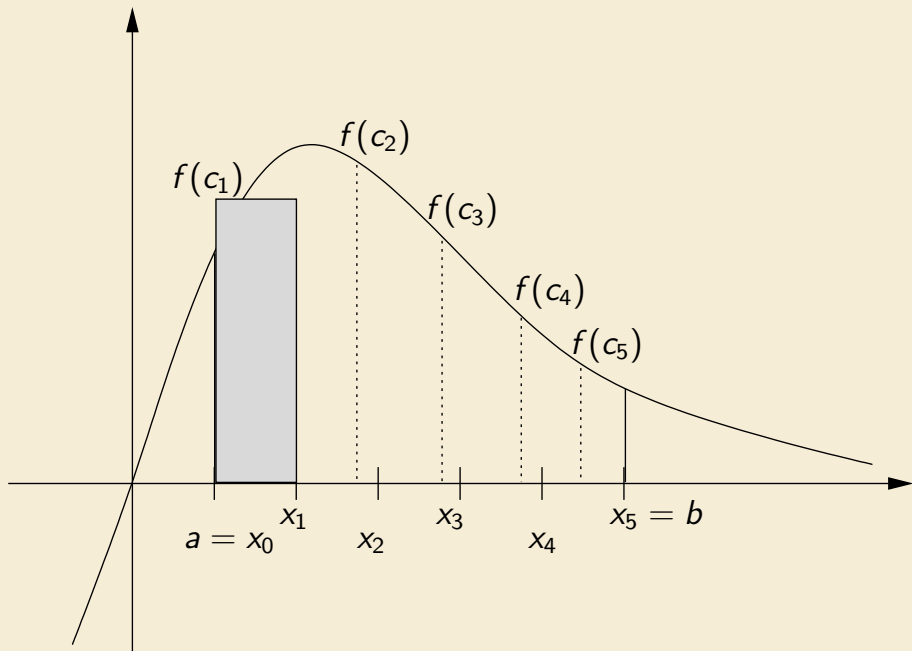


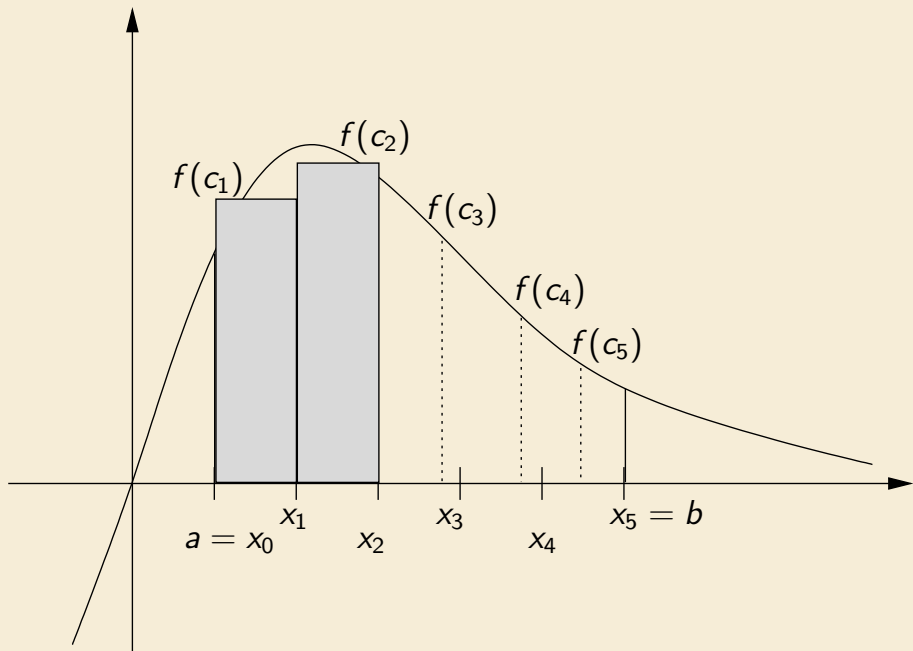


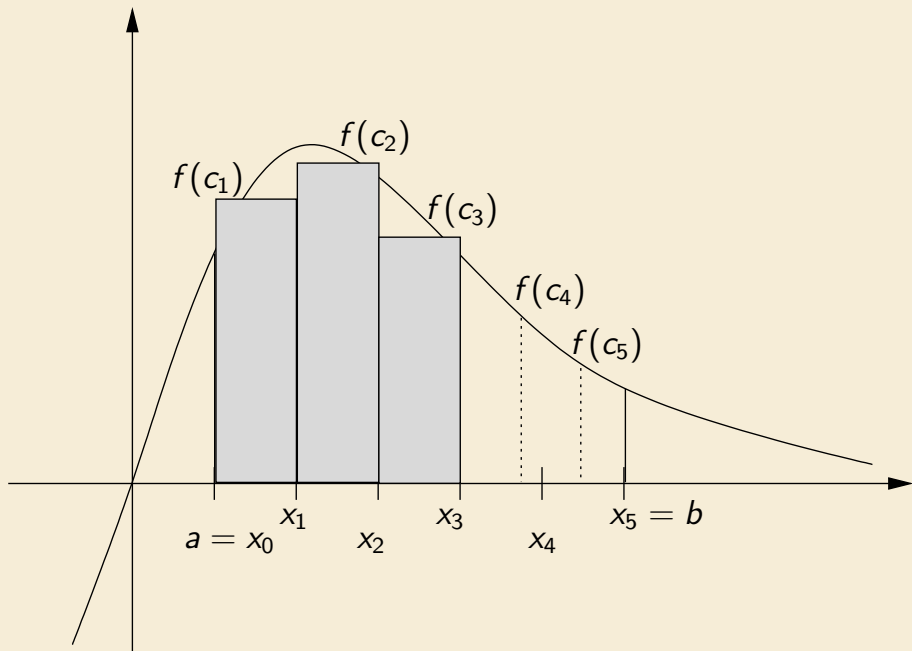


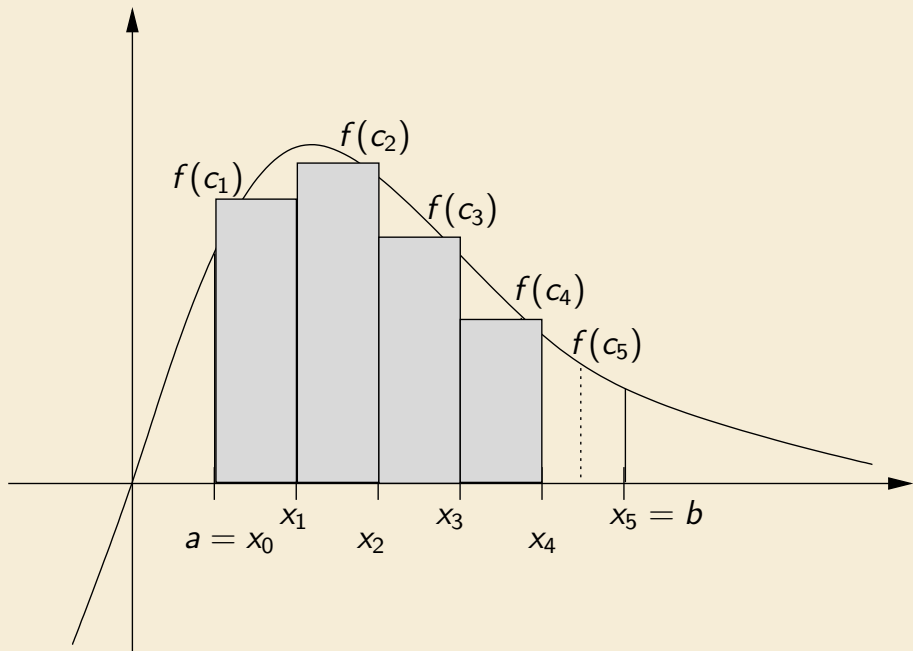


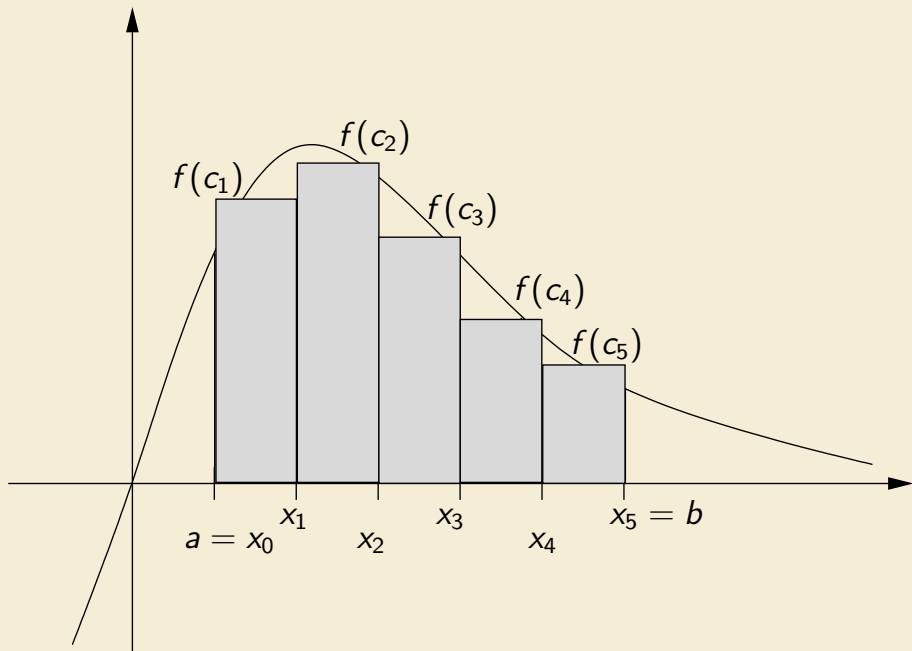












# Il teorema della media

Una proprietà molto importante dell'integrale definito, che ci servirà anche per dimostrare il teorema fondamentale, è il **teorema della media**:

Se  $y = f(x)$  è una funzione continua sull'intervallo  $[a, b]$ , allora esiste sempre un punto  $c$  nell'intervallo tale che

$$(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx.$$

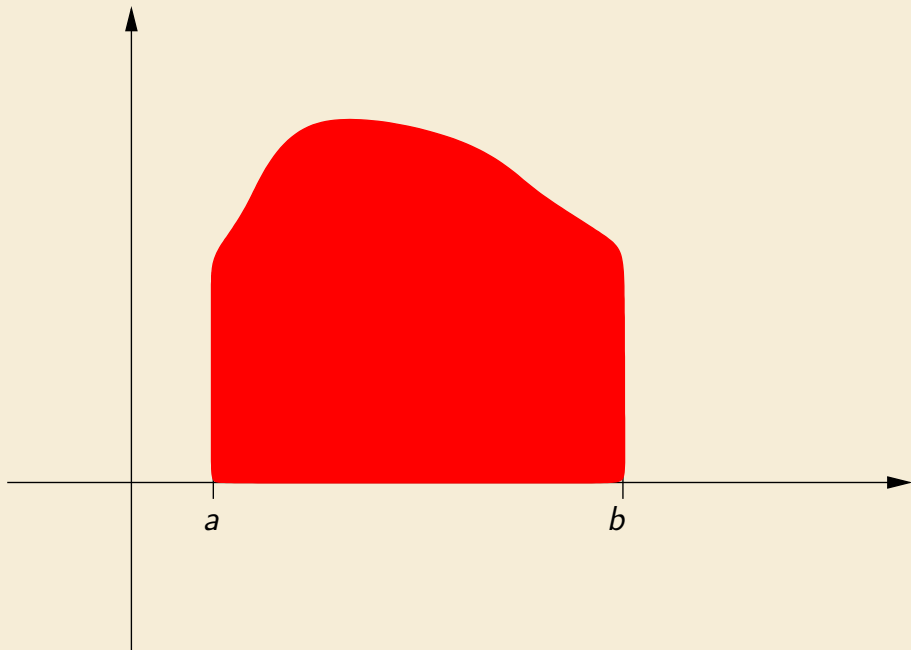
# Il teorema della media

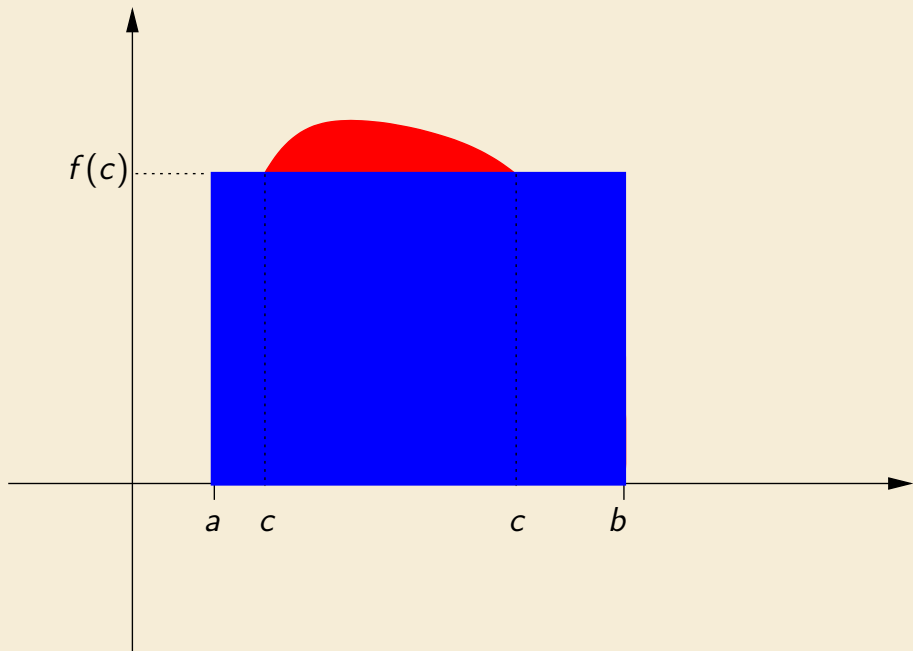
Una proprietà molto importante dell'integrale definito, che ci servirà anche per dimostrare il teorema fondamentale, è il **teorema della media**:

Se  $y = f(x)$  è una funzione continua sull'intervallo  $[a, b]$ , allora esiste sempre un punto  $c$  nell'intervallo tale che

$$(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx.$$

Geometricamente, il teorema garantisce che l'area sotto il grafico di una funzione equivale a quella di un rettangolo che ha per base l'intervallo  $[a, b]$  e per altezza un punto sul grafico della funzione.





# Dimostrazione del teorema della media (1)

Poiché  $f$  è continua, essa ha massimo e minimo sull'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  per il teorema di Weierstrass. Quindi

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

# Dimostrazione del teorema della media (1)

Poiché  $f$  è continua, essa ha massimo e minimo sull'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  per il teorema di Weierstrass. Quindi

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Inoltre vale anche il teorema dei valori intermedi, quindi  $f$  assume tutti i valori tra  $m$  e  $M$ .

# Dimostrazione del teorema della media (1)

Poiché  $f$  è continua, essa ha massimo e minimo sull'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  per il teorema di Weierstrass. Quindi

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Inoltre vale anche il teorema dei valori intermedi, quindi  $f$  assume tutti i valori tra  $m$  e  $M$ .

Integrando la disuguaglianza si ottiene

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx.$$

# Dimostrazione del teorema della media (1)

Poiché  $f$  è continua, essa ha massimo e minimo sull'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  per il teorema di Weierstrass. Quindi

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Inoltre vale anche il teorema dei valori intermedi, quindi  $f$  assume tutti i valori tra  $m$  e  $M$ .

Integrando la disuguaglianza si ottiene

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx.$$

Poiché l'integrale di una costante è evidentemente il valore della costante moltiplicato per l'ampiezza dell'intervallo, si ha

$$(b - a)m \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq (b - a)M.$$

## Dimostrazione del teorema della media (2)

Dividendo tutto per  $(b - a)$  si ottiene

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M,$$

## Dimostrazione del teorema della media (2)

Dividendo tutto per  $(b - a)$  si ottiene

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M,$$

e quindi il numero  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  è compreso tra  $m$  e  $M$ .

## Dimostrazione del teorema della media (2)

Dividendo tutto per  $(b - a)$  si ottiene

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M,$$

e quindi il numero  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  è compreso tra  $m$  e  $M$ .

Ma allora esiste un punto  $c$  nell'intervallo  $[a, b]$  tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

e il teorema è dimostrato.

# Il teorema fondamentale

Veniamo ora all'enunciato del **teorema fondamentale del calcolo integrale**.

# Il teorema fondamentale

Veniamo ora all'enunciato del **teorema fondamentale del calcolo integrale**.

Sia  $y = f(x)$  è una funzione continua sull'intervallo  $[a, b]$ , poniamo

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Allora  $F(x)$  è una funzione derivabile su  $[a, b]$  e si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

# Il teorema fondamentale

Veniamo ora all'enunciato del **teorema fondamentale del calcolo integrale**.

Sia  $y = f(x)$  è una funzione continua sull'intervallo  $[a, b]$ , poniamo

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Allora  $F(x)$  è una funzione derivabile su  $[a, b]$  e si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Grazie a questo teorema, i concetti di integrale definito (legato all'area sotto il grafico di una funzione) e quello di derivata vengono legati tra loro. L'integrazione può anche essere interpretata come un'operazione inversa alla derivazione.

# Dimostrazione del teorema fondamentale

La dimostrazione consiste nel costruire il rapporto incrementale per  $F(x_0)$  e mostrare che ammette limite.

# Dimostrazione del teorema fondamentale

La dimostrazione consiste nel costruire il rapporto incrementale per  $F(x_0)$  e mostrare che ammette limite.

Siano  $x_0$  e  $x$  due punti nell'intervallo  $[a, b]$ . Si ha

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt$$

# Dimostrazione del teorema fondamentale

La dimostrazione consiste nel costruire il rapporto incrementale per  $F(x_0)$  e mostrare che ammette limite.

Siano  $x_0$  e  $x$  due punti nell'intervallo  $[a, b]$ . Si ha

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\ &= \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \end{aligned}$$

# Dimostrazione del teorema fondamentale

La dimostrazione consiste nel costruire il rapporto incrementale per  $F(x_0)$  e mostrare che ammette limite.

Siano  $x_0$  e  $x$  due punti nell'intervallo  $[a, b]$ . Si ha

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\ &= \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt. \end{aligned}$$

# Dimostrazione del teorema fondamentale

La dimostrazione consiste nel costruire il rapporto incrementale per  $F(x_0)$  e mostrare che ammette limite.

Siano  $x_0$  e  $x$  due punti nell'intervallo  $[a, b]$ . Si ha

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\ &= \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt. \end{aligned}$$

Quindi il rapporto incrementale diventa

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

# Dimostrazione del teorema fondamentale

Per il teorema della media, visto prima, esiste un punto  $c$  compreso tra  $x_0$  e  $x$  tale che

$$f(c) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

# Dimostrazione del teorema fondamentale

Per il teorema della media, visto prima, esiste un punto  $c$  compreso tra  $x_0$  e  $x$  tale che

$$f(c) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Se ora prendiamo il limite per  $x \rightarrow x_0$  del rapporto incrementale, abbiamo che  $c \rightarrow x_0$  e dunque

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(x_0).$$

# Dimostrazione del teorema fondamentale

Per il teorema della media, visto prima, esiste un punto  $c$  compreso tra  $x_0$  e  $x$  tale che

$$f(c) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Se ora prendiamo il limite per  $x \rightarrow x_0$  del rapporto incrementale, abbiamo che  $c \rightarrow x_0$  e dunque

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(x_0).$$

Il teorema è così dimostrato.

# Commenti sul teorema fondamentale

È immediato vedere che la funzione introdotta nel teorema fondamentale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

verifica  $F(a) = 0$ .

# Commenti sul teorema fondamentale

È immediato vedere che la funzione introdotta nel teorema fondamentale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

verifica  $F(a) = 0$ .

Inoltre l'integrale definito

$$\int_a^b f(x) dx$$

coinciderà col valore di  $F$  calcolato in  $b$ , ovvero con  $F(b)$ .

# Commenti sul teorema fondamentale

È immediato vedere che la funzione introdotta nel teorema fondamentale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

verifica  $F(a) = 0$ .

Inoltre l'integrale definito

$$\int_a^b f(x) dx$$

coinciderà col valore di  $F$  calcolato in  $b$ , ovvero con  $F(b)$ .

Per poter calcolare gli integrali definiti della funzione  $f(x)$ , basterà allora saper trovare una funzione la cui derivata faccia proprio  $f(x)$ : questa funzione viene anche detta **primitiva** di  $f(x)$ .

## Commenti sul teorema fondamentale

Osserviamo però che le primitive di una funzione sono tante, poiché se si somma una costante a una primitiva di  $f(x)$ , si ottiene ancora una primitiva di  $f(x)$ .

## Commenti sul teorema fondamentale

Osserviamo però che le primitive di una funzione sono tante, poiché se si somma una costante a una primitiva di  $f(x)$ , si ottiene ancora una primitiva di  $f(x)$ .

Indichiamo con  $P(x)$  una primitiva di  $f(x)$ : allora la funzione

$$F(x) = P(x) - P(a)$$

ha la derivata che coincide con  $f(x)$  e verifica  $F(a) = 0$ .

## Commenti sul teorema fondamentale

Osserviamo però che le primitive di una funzione sono tante, poiché se si somma una costante a una primitiva di  $f(x)$ , si ottiene ancora una primitiva di  $f(x)$ .

Indichiamo con  $P(x)$  una primitiva di  $f(x)$ : allora la funzione

$$F(x) = P(x) - P(a)$$

ha la derivata che coincide con  $f(x)$  e verifica  $F(a) = 0$ . Quindi

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) = P(b) - P(a).$$

## Commenti sul teorema fondamentale

Osserviamo però che le primitive di una funzione sono tante, poiché se si somma una costante a una primitiva di  $f(x)$ , si ottiene ancora una primitiva di  $f(x)$ .

Indichiamo con  $P(x)$  una primitiva di  $f(x)$ : allora la funzione

$$F(x) = P(x) - P(a)$$

ha la derivata che coincide con  $f(x)$  e verifica  $F(a) = 0$ . Quindi

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) = P(b) - P(a).$$

Data una qualsiasi primitiva  $P(x)$  di  $f(x)$ , l'integrale definito tra  $a$  e  $b$  si calcola facendo la differenza  $P(b) - P(a)$ . Si usa scrivere anche

$$P(b) - P(a) = \left[ P(x) \right]_a^b.$$

# La formula dell'integrazione

In definitiva, abbiamo mostrato che si ha

$$\int_a^b f(x) dx = P(b) - P(a) = \left[ P(x) \right]_a^b$$

dove  $P(x)$  è una qualsiasi primitiva di  $f(x)$ , cioè  $P'(x) = f(x)$ .

## Esempio: il segmento parabolico

Vediamo un esempio: il **segmento parabolico** è la parte di piano compresa tra un arco di parabola e la relativa corda. Un noto teorema di Archimede afferma che l'area del segmento parabolico equivale a  $\frac{2}{3}$  dell'area del rettangolo che lo racchiude.

## Esempio: il segmento parabolico

Vediamo un esempio: il **segmento parabolico** è la parte di piano compresa tra un arco di parabola e la relativa corda. Un noto teorema di Archimede afferma che l'area del segmento parabolico equivale a  $\frac{2}{3}$  dell'area del rettangolo che lo racchiude.

Cerchiamo di mostrare questo teorema usando il calcolo integrale, almeno nel caso semplice in cui la corda sia ortogonale all'asse della parabola.

## Esempio: il segmento parabolico

Vediamo un esempio: il **segmento parabolico** è la parte di piano compresa tra un arco di parabola e la relativa corda. Un noto teorema di Archimede afferma che l'area del segmento parabolico equivale a  $\frac{2}{3}$  dell'area del rettangolo che lo racchiude.

Cerchiamo di mostrare questo teorema usando il calcolo integrale, almeno nel caso semplice in cui la corda sia ortogonale all'asse della parabola.

Possiamo supporre quindi che la parabola abbia asse coincidente con l'asse  $y$ , la concavità rivolta verso il basso e che la corda stia sull'asse  $x$ .

## Esempio: il segmento parabolico

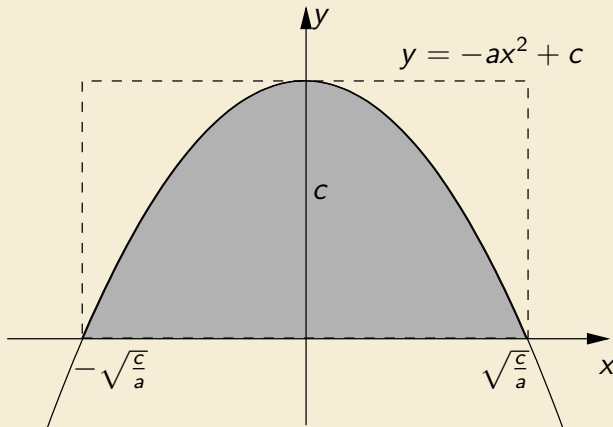
Vediamo un esempio: il **segmento parabolico** è la parte di piano compresa tra un arco di parabola e la relativa corda. Un noto teorema di Archimede afferma che l'area del segmento parabolico equivale a  $2/3$  dell'area del rettangolo che lo racchiude.

Cerchiamo di mostrare questo teorema usando il calcolo integrale, almeno nel caso semplice in cui la corda sia ortogonale all'asse della parabola.

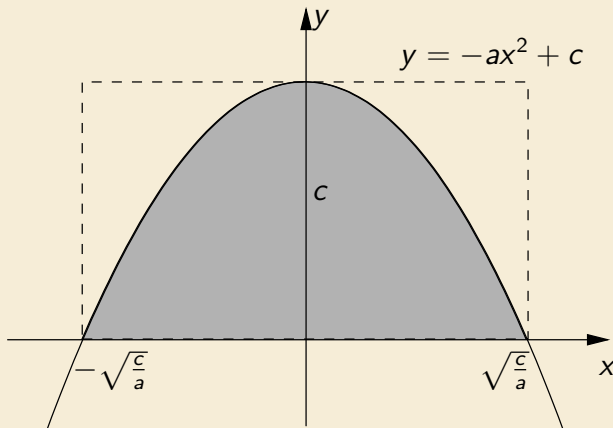
Possiamo supporre quindi che la parabola abbia asse coincidente con l'asse  $y$ , la concavità rivolta verso il basso e che la corda stia sull'asse  $x$ .

Consideriamo la parabola  $y = -ax^2 + c$  e la sua corda delimitata dai punti  $(\pm\sqrt{a/c}; 0)$ , dove  $a, c > 0$ .

## Esempio: il segmento parabolico



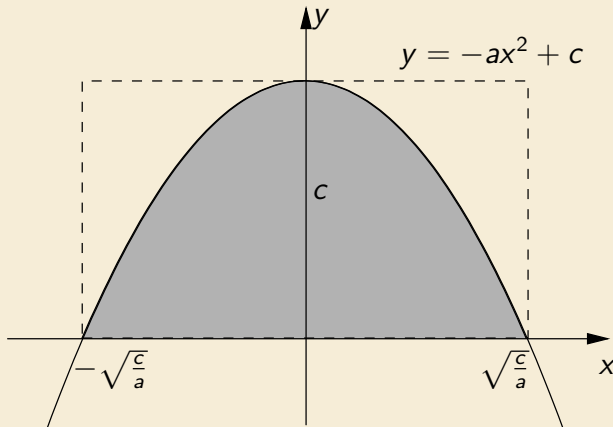
## Esempio: il segmento parabolico



La base del rettangolo misura  $2\sqrt{\frac{c}{a}}$  e l'altezza vale  $c$ . Quindi l'area del rettangolo vale

$$2c\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

## Esempio: il segmento parabolico



Il teorema di Archimede afferma allora che l'area sotto la parabola misura

$$\frac{4}{3}c\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

## Esempio: il segmento parabolico

Proviamo a verificare il teorema mediante il calcolo integrale: dobbiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c) dx.$$

## Esempio: il segmento parabolico

Proviamo a verificare il teorema mediante il calcolo integrale: dobbiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c) dx.$$

Si verifica facilmente (basta derivare) che una primitiva della funzione  $f(x) = -ax^2 + c$  è la funzione  $P(x) = -\frac{1}{3}ax^3 + cx$ ,

## Esempio: il segmento parabolico

Proviamo a verificare il teorema mediante il calcolo integrale: dobbiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c) dx.$$

Si verifica facilmente (basta derivare) che una primitiva della funzione  $f(x) = -ax^2 + c$  è la funzione  $P(x) = -\frac{1}{3}ax^3 + cx$ , quindi

$$\int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c) dx = \left[ -\frac{1}{3}ax^3 + cx \right]_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}}$$

## Esempio: il segmento parabolico

Proviamo a verificare il teorema mediante il calcolo integrale: dobbiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c) dx.$$

Si verifica facilmente (basta derivare) che una primitiva della funzione  $f(x) = -ax^2 + c$  è la funzione  $P(x) = -\frac{1}{3}ax^3 + cx$ , quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c) dx &= \left[ -\frac{1}{3}ax^3 + cx \right]_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} \\ &= \left[ -\frac{1}{3}a \left( \sqrt{\frac{c}{a}} \right)^3 + c\sqrt{\frac{c}{a}} - \left( -\frac{1}{3}a \left( -\sqrt{\frac{c}{a}} \right)^3 + c\left( -\sqrt{\frac{c}{a}} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

## Esempio: il segmento parabolico

Proviamo a verificare il teorema mediante il calcolo integrale: dobbiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c) dx.$$

Si verifica facilmente (basta derivare) che una primitiva della funzione  $f(x) = -ax^2 + c$  è la funzione  $P(x) = -\frac{1}{3}ax^3 + cx$ , quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c) dx &= \left[ -\frac{1}{3}ax^3 + cx \right]_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} \\ &= \left[ -\frac{1}{3}a \left( \sqrt{\frac{c}{a}} \right)^3 + c\sqrt{\frac{c}{a}} - \left( -\frac{1}{3}a \left( -\sqrt{\frac{c}{a}} \right)^3 + c\left( -\sqrt{\frac{c}{a}} \right) \right) \right] \\ &= \left[ -\frac{1}{3}c\sqrt{\frac{c}{a}} + c\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{1}{3}c\sqrt{\frac{c}{a}} + c\sqrt{\frac{c}{a}} \right] \end{aligned}$$

## Esempio: il segmento parabolico

Proviamo a verificare il teorema mediante il calcolo integrale: dobbiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c) dx.$$

Si verifica facilmente (basta derivare) che una primitiva della funzione  $f(x) = -ax^2 + c$  è la funzione  $P(x) = -\frac{1}{3}ax^3 + cx$ , quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c) dx &= \left[ -\frac{1}{3}ax^3 + cx \right]_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} \\ &= \left[ -\frac{1}{3}a \left( \sqrt{\frac{c}{a}} \right)^3 + c\sqrt{\frac{c}{a}} - \left( -\frac{1}{3}a \left( -\sqrt{\frac{c}{a}} \right)^3 + c \left( -\sqrt{\frac{c}{a}} \right) \right) \right] \\ &= \left[ -\frac{1}{3}c\sqrt{\frac{c}{a}} + c\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{1}{3}c\sqrt{\frac{c}{a}} + c\sqrt{\frac{c}{a}} \right] = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{c}{a}}. \end{aligned}$$

## Esempio: il segmento parabolico

Proviamo a verificare il teorema mediante il calcolo integrale: dobbiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c) dx.$$

Si verifica facilmente (basta derivare) che una primitiva della funzione  $f(x) = -ax^2 + c$  è la funzione  $P(x) = -\frac{1}{3}ax^3 + cx$ , quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} (-ax^2 + c) dx &= \left[ -\frac{1}{3}ax^3 + cx \right]_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{\sqrt{\frac{c}{a}}} \\ &= \left[ -\frac{1}{3}a \left( \sqrt{\frac{c}{a}} \right)^3 + c\sqrt{\frac{c}{a}} - \left( -\frac{1}{3}a \left( -\sqrt{\frac{c}{a}} \right)^3 + c \left( -\sqrt{\frac{c}{a}} \right) \right) \right] \\ &= \left[ -\frac{1}{3}c\sqrt{\frac{c}{a}} + c\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{1}{3}c\sqrt{\frac{c}{a}} + c\sqrt{\frac{c}{a}} \right] = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{c}{a}}. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo verificato il teorema di Archimede.

# Aree con segno

Finora abbiamo parlato di area sotto il grafico di una funzione, ma in realtà l'integrale definito misura quella che viene chiamata **area con segno**.

## Aree con segno

Finora abbiamo parlato di area sotto il grafico di una funzione, ma in realtà l'integrale definito misura quella che viene chiamata **area con segno**. Infatti, se il grafico della funzione si trova al di sotto dell'asse  $x$  (cioè la funzione è negativa), l'area viene "pesata" negativamente, e quindi viene sottratta.

## Aree con segno

Finora abbiamo parlato di area sotto il grafico di una funzione, ma in realtà l'integrale definito misura quella che viene chiamata **area con segno**.

Infatti, se il grafico della funzione si trova al di sotto dell'asse  $x$  (cioè la funzione è negativa), l'area viene "pesata" negativamente, e quindi viene sottratta.

Ad esempio, consideriamo la funzione  $y = \cos x$  nell'intervallo  $[0, \pi]$ .

## Aree con segno

Finora abbiamo parlato di area sotto il grafico di una funzione, ma in realtà l'integrale definito misura quella che viene chiamata **area con segno**.

Infatti, se il grafico della funzione si trova al di sotto dell'asse  $x$  (cioè la funzione è negativa), l'area viene "pesata" negativamente, e quindi viene sottratta.

Ad esempio, consideriamo la funzione  $y = \cos x$  nell'intervallo  $[0, \pi]$ .

Poiché una primitiva di  $\cos x$  è la funzione  $\sin x$  (la verifica può essere fatta semplicemente derivando), possiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

## Aree con segno

Finora abbiamo parlato di area sotto il grafico di una funzione, ma in realtà l'integrale definito misura quella che viene chiamata **area con segno**.

Infatti, se il grafico della funzione si trova al di sotto dell'asse  $x$  (cioè la funzione è negativa), l'area viene "pesata" negativamente, e quindi viene sottratta.

Ad esempio, consideriamo la funzione  $y = \cos x$  nell'intervallo  $[0, \pi]$ .

Poiché una primitiva di  $\cos x$  è la funzione  $\sin x$  (la verifica può essere fatta semplicemente derivando), possiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \left[ \sin x \right]_0^{\pi}$$

## Aree con segno

Finora abbiamo parlato di area sotto il grafico di una funzione, ma in realtà l'integrale definito misura quella che viene chiamata **area con segno**.

Infatti, se il grafico della funzione si trova al di sotto dell'asse  $x$  (cioè la funzione è negativa), l'area viene "pesata" negativamente, e quindi viene sottratta.

Ad esempio, consideriamo la funzione  $y = \cos x$  nell'intervallo  $[0, \pi]$ .

Poiché una primitiva di  $\cos x$  è la funzione  $\sin x$  (la verifica può essere fatta semplicemente derivando), possiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \left[ \sin x \right]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0.$$

## Aree con segno

Finora abbiamo parlato di area sotto il grafico di una funzione, ma in realtà l'integrale definito misura quella che viene chiamata **area con segno**. Infatti, se il grafico della funzione si trova al di sotto dell'asse  $x$  (cioè la funzione è negativa), l'area viene "pesata" negativamente, e quindi viene sottratta.

Ad esempio, consideriamo la funzione  $y = \cos x$  nell'intervallo  $[0, \pi]$ .

Poiché una primitiva di  $\cos x$  è la funzione  $\sin x$  (la verifica può essere fatta semplicemente derivando), possiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \left[ \sin x \right]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0.$$

In questo caso l'area risulta nulla, poiché la parte di area sotto l'asse  $x$  cancella esattamente la parte di area sopra l'asse, come possiamo vedere dal disegno nel prossimo lucido.

