

SCIENZA E TECNOLOGIA

TRA '800 E '900

TRA I MATEMATICI CHE HANNO DATO IL LORO CONTRIBUTO NELL'ITALIA TRA FINE '800 E INIZIO '900 RICORDIAMO L'OPERA DI G. PEANO. L'INDAGINE È CIRCOSCRITTA AI SUOI CONTRIBUTI ALL'ANALISI MATEMATICA E A QUELLI CHE HANNO SVOLTO UN RUOLO FONDAMENTALE NELL'AFFERMARSI DELLA CONCEZIONE MODERNA DELL'ASSIOMATICA. SEGUE UN ARTICOLO DEDICATO A FRANCESCO FAÀ DI BRUNO, UN MATEMATICO LA CUI OPERA MULTIFORME, SCIENTIFICA E CARITATIVA, SI DIPANA LUNGO TUTTO L'ARCO DEL RISORGIMENTO ITALIANO E HA COME CORNICE UNA TORINO INCREDIBILMENTE RICCA DI INIZIATIVE TANTO SCIENTIFICHE, QUANTO RELIGIOSE E SOCIALI.

GIUSEPPE PEANO

Dario Palladino

*Fig. 1.
Giuseppe Peano
(1858-1932).*



Non sono molti gli scienziati noti al grande pubblico e, fra di essi, ancora meno numerosi sono i matematici. I più hanno sicuramente sentito nominare Pitagora, Euclide, Archimede e pochi altri il cui nome è legato a qualche teorema che si incontra abitualmente nel percorso scolastico. Tra i grandi matematici, il cui nome figura in più occasioni nei manuali di analisi matematica, spicca sicuramente Giuseppe Peano (1858-1932), la cui Scuola ebbe, nel periodo successivo all'unità d'Italia, un ruolo di primo piano nella matematica italiana e un notevolissimo riconoscimento internazionale i cui echi si spingono fino ai nostri giorni.

In questo articolo illustreremo sinteticamente qualche aspetto dell'opera di Peano. La nostra scelta di argomenti, necessariamente molto circoscritta, è indirizzata ad alcuni contributi all'analisi matematica, a quelli che hanno svolto un ruolo fondamentale nell'affermarsi della concezione moderna dell'assiomatica e nel costituirsi della logica matematica come disciplina autonoma. Si tratta di tematiche che vanno incontro all'esigenza, più volte espressa nei programmi di insegnamento, di inquadrare storicamente

gli argomenti di matematica, in modo che gli studenti della scuola secondaria acquisiscano, oltre a utili strumenti tecnici, la

consapevolezza di come la matematica rivesta un ruolo culturale di portata ben più vasta di quanto comunemente si ritenga¹.

ALCUNI CONTRIBUTI ALL'ANALISI MATEMATICA

All'inizio dell'Ottocento è iniziata, con l'opera di A.L. Cauchy (1789-1857), una graduale chiarificazione dei principi e delle definizioni che stanno alla base dell'analisi matematica che, unitamente alla precisa caratterizzazione del campo dei numeri reali, ha condotto alla sistemazione della disciplina come ancora oggi viene presentata nei manuali. Peano, nella prima parte della sua attività, si inserì in modo autorevole in questo processo di rigorizzazione e, a partire dal 1890, fu per lungo tempo titolare della cattedra di calcolo infinitesimale all'Università di Torino.

a) L'integrale di Peano

A Peano va attribuita la definizione di *integrale definito* di una funzione f in un intervallo $[a, b]$ secondo la quale

$$\int_a^b f(x)dx$$

è, se esiste, l'elemento di separazione tra le somme

1. Come testimoniato dai tre volumi delle *Opere Scelte* pubblicate a cura dell'Unione Matematica Italiana, i contributi di Peano spaziano in quasi tutti i settori della matematica. Informazioni sulla sua vita e sulle sue opere sono facilmente reperibili in rete. Qui ci limitiamo a segnalare la ricca ed esauriente biografia [1], il volume [2] dedicato ai contributi fondazionali della scuola di Peano e il nostro articolo [3], ai quali rinviamo per ulteriori approfondimenti e riferimenti bibliografici. Segnaliamo infine l'ampio volume [4] che contiene gli Atti di un recente congresso internazionale svoltosi a Torino nel 2008, dove un lettore più esigente può trovare informazioni bibliografiche aggiornate su Peano e di tutti i numerosi esponenti della sua Scuola, e la testimonianza di come i loro contributi siano ancora oggi al centro di intense ricerche.

integrali degli estremi inferiori e superiori di f al variare della suddivisione dell'intervallo di integrazione mediante un numero finito di punti. Nel caso in cui f sia continua in $[a, b]$, gli estremi inferiori e superiori coincidono con i minimi e i massimi assoluti della funzione negli intervalli della suddivisione, ed esiste sempre

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Peano dimostrò l'integrabilità delle funzioni f limitate in $[a, b]$ e dotate di al più un numero finito di punti di discontinuità.

La definizione di Peano, oltre a non richiedere l'operazione di limite, è del tutto svincolata da considerazioni geometriche relative all'area dei trapezoidi. Anzi, è l'area che viene definita mediante l'integrale definito, e non viceversa.

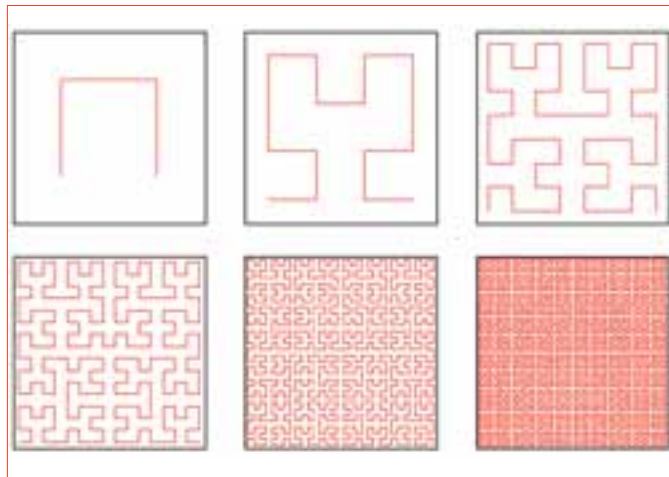
b) La misura delle superfici

La misura delle superfici piane, più generali dei trapezoidi relativi al grafico di una funzione f , viene definita da Peano come l'elemento di separazione, se esiste, tra le misure dei rettangoloidi inscritti e circoscritti alla superficie stessa (*misura di Peano-Jordan*), ossia con un procedimento che generalizza la definizione dell'area di un cerchio come elemento di separazione fra le aree dei poligoni regolari inscritti e circoscritti. Al matematico piemontese si deve la rigorosa estensione del concetto di area alle superfici dello spazio che, prima di lui, non era stata definita in modo soddisfacente.

c) La curva di Peano.

Il risultato più eclatante di Peano è stata la determinazione di una curva continua che passa per tutti i punti di un quadrato. Egli definì due funzioni continue $x = x(t)$ e $y = y(t)$ tali che, al variare di t nell'intervallo $(0, 1)$, si ottengono tutte le coppie (x, y) con $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, e ottenne così una curva che passa per tutti i punti di un quadrato. La costruzione della curva si può visualizzare mediante le approssimazioni successive illustrate in Fig. 2².

Fig. 2. I primi 6 passi della costruzione della curva di Peano.



La curva di Peano rientra tra quelle continue non dotate di derivata, e quindi di retta tangente, in alcun punto e, contrariamente all'intuizione geometrica di linea, essa riempie l'intero quadrato. Già nell'ambito dei suoi studi in teoria degli insiemi, G. Cantor (1845-1918) aveva dimostrato che un segmento e un quadrato erano costituiti dallo stesso numero infinito di punti, stabilendo così che il concetto intuitivo di dimensione, in base al quale distinguiamo le linee dalle superfici, richiede una definizione più complessa di quanto può essere lecito attendersi. L'esempio di Peano mostra come anche il concetto intuitivo di curva non sia facile da caratterizzare rigorosamente.

Da questi e numerosi altri lavori di carattere tecnico emerge la caratteristica impostazione scientifica di Peano volta a conseguire il massimo rigore deduttivo, a determinare controesempi a proposizioni generalmente accettate, ad individuare ipotesi sufficienti a dimostrarle e cercare poi di ridurre al minimo tali ipotesi³. È in questo spirito di "purificazione deduttiva" della matematica che si collocano i famosi contributi relativi alle assiomatizzazioni dell'aritmetica.

L'ASSIOMATIZZAZIONE DELL'ARITMETICA

Il contributo più famoso di Peano è senza dubbio l'assiomatizzazione dell'aritmetica. In tutto il mondo matematico l'acronimo PA (*Peano Axioms*) indica i celebri cinque assiomi che Peano elaborò a partire dal 1889: Peano sta all'aritmetica come Euclide sta alla geometria (si veda la Scheda). Tutti gli studenti della scuola secondaria dovrebbero sapere, almeno a grandi linee, come l'aritmetica si sviluppa col metodo assiomatico partendo dai soli tre concetti primitivi di zero, numero e successore e dai 5 assiomi (P1)-(P5) e, in particolare, il ruolo dell'assioma (P5) detto *principio di induzione matematica*⁴.

Scheda

Gli assiomi di Peano per l'aritmetica

- (P1) Zero è un numero.
- (P2) Il successore di un numero è un numero.
- (P3) Zero non è successore di alcun numero.
- (P4) Se due numeri hanno uguale successore, allora sono uguali.
- (P5) Se una proprietà vale per zero e, se vale per un numero, allora vale per il successore del numero, allora vale per tutti i numeri naturali.

2. Si vedano, ad esempio, il sito <http://www.vialattea.net/esperti/mat/peano> e i relativi link.

3. Per una rassegna dei contributi all'analisi, tra cui la formula del resto nello sviluppo di Taylor che oggi porta il suo nome e il teorema (oggi detto di Peano-Schwarz) sull'invertibilità delle derivate parziali, si veda [2], pp. 149-163.

4. Sull'assiomatizzazione dell'aritmetica, sul principio di induzione e sulle teorie formali per l'aritmetica rinviamo il lettore interessato a due ampi contributi apparsi pochi anni fa su questa rivista: D. Palladino, P. Bussotti, «Il principio di induzione. 1. Storia e ruolo», *Nuova Secondaria XX*, 2, ott. 2002, pp. 41-51 e D. Palladino, «Il principio di induzione: sviluppo storico e applicativo», *Nuova Secondaria XX*, 6, feb. 2003, pp. 53-63.

Nel periodo in cui l'aritmetica è stata assiomatizzata da Peano, il metodo assiomatico ha subito una profonda trasformazione passando dalla concezione cosiddetta *classica* a quella *moderna*, secondo la quale la matematica può essere definita come la scienza delle teorie formali. Più precisamente, gli assiomi sono considerati formule chiuse del linguaggio della logica dei predicati (e quindi né vere, né false): esse divengono vere o false solo dopo che si sono interpretati i concetti primitivi (ossia si è attribuito un significato ai concetti primitivi). Se in base ad un'interpretazione gli assiomi risultano veri, allora si è ottenuto un *modello* della teoria assiomatica. Il metodo della ricerca di modelli è stato sistematicamente impiegato da Peano e dai suoi collaboratori per perfezionare la sistemazione assiomatica dell'aritmetica, della geometria e di altre teorie matematiche. L'essenza del metodo assiomatico consiste nel ridurre al minimo i concetti primitivi e gli assiomi in modo da non assumere inizialmente più di quanto sia strettamente necessario: i concetti primitivi e gli assiomi devono essere *indipendenti*. Per stabilire che un assioma *A* è indipendente dagli altri (ossia non può essere dimostrato a partire dagli altri) basta trovare un'interpretazione dei concetti primitivi che rende veri tutti gli altri assiomi e falso *A*. Per dimostrare che un concetto primitivo *C* è indipendente dagli altri concetti primitivi si può applicare il metodo elaborato da uno dei più importanti collaboratori di Peano, Alessandro Padoa (1868-1937): basta trovare due interpretazioni che sono entrambe modello degli assiomi e che differiscono solo nel modo di interpretare *C* (se *C* fosse definibile a partire dagli altri concetti, il «significato» di *C* sarebbe determinato da quello degli altri concetti, e non potrebbero esistere due interpretazioni con le caratteristiche descritte). Le assiomatizzazioni dell'aritmetica e della geometria sono state condotte con l'esplicito obiettivo di ridurre al minimo il numero dei concetti primitivi e degli assiomi e rientrano nel più vasto programma di Peano volto a esprimere in modo sintetico e puramente deduttivo l'intera matematica. Va detto, per inciso, che l'opera di D. Hilbert (1862-1943) è stata più influente e gli attuali testi di geometria sono largamente ispirati all'impostazione del matematico tedesco. In estrema sintesi, Peano e i suoi collaboratori hanno esposto le teorie matematiche in modo rigorosamente deduttivo secondo i canoni del metodo assiomatico, e il metodo dei modelli era funzionale alla verifica di aver raggiunto quanto auspicato,

**PEANO E I SUOI COLLABORATORI
HANNO CONTRIBUITO IN MODO
DECISIVO ALL'AFFERMARSI
DELLA LOGICA**

ossia l'individuazione del minimo numero di concetti primitivi e di assiomi necessari e sufficienti per sviluppare le varie teorie matematiche classiche. Hilbert, invece, sfruttò le potenzialità della concezione moderna dell'assiomatica introducendo nuove teorie e allargando i confini delle ricerche matematiche.

IL FORMULARIO MATHEMATICUM E LA LOGICA

Il programma di Peano ha ricevuto la sua realizzazione attraverso le successive riedizioni del *Formulario mathematico*, che sono in realtà dei progressivi perfezionamenti verso la stesura definitiva raggiunta nel 1908.

In questa impresa un ruolo fondamentale ha avuto lo studio della logica: Peano e i suoi collaboratori hanno contribuito in modo decisivo all'affermarsi della logica come ambito autonomo di ricerche e sono stati i protagonisti dei primi congressi internazionali dei matematici (Zurigo 1897 e Parigi 1900). Essi hanno sostanzialmente creato il linguaggio della moderna logica matematica aprendo la strada alle ricerche di B. Russell (1872-1970) e di Hilbert che hanno contrassegnato il cosiddetto periodo d'oro degli studi sui fondamenti della matematica. I loro contributi, troppo articolati per essere analizzati in questa sede e per i quali rimandiamo ai testi citati in bibliografia, erano funzionali alla realizzazione del loro programma di rigorizzazione e organizzazione delle teorie matematiche. La concezione della logica di Peano e dei suoi collaboratori, quindi, era unicamente strumentale e pertanto i loro lavori, pur avendo avuto il merito di dare origine alle ricerche successive, hanno rivestito un ruolo limitato all'interno della realizzazione del loro programma culminato con la pubblicazione del *Formulario*.

Dario Palladino - Università di Genova

Bibliografia

- G. Peano**, *Opere scelte*, a cura di U. Cassina, Cremonese, Roma, Vol. I (1957), Vol. II (1958), Vol. III (1959).
G. Peano, *Formulario mathematico*, Bocca, Torino 1908; rist. a cura di U. Cassina, Cremonese, Roma 1960.
 [1] **H.C. Kennedy**, *Peano, Life and Works of Giuseppe Peano*, Reidel, Dordrecht, 1980; trad. it., *Peano, storia di un matematico*, Boringhieri, Torino 1983.
 [2] **M. Borge, P. Freguglia, D. Palladino**, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Franco Angeli, Milano 1985.
 [3] **D. Palladino**, «Il problema dei fondamenti in Peano e nella sua scuola», *Atti del Convegno «Matematica e filosofia: il problema dei fondamenti oggi»* (Mendrisio 16 novembre 2001), *Pristem/Storia, Note di Matematica, Storia, Cultura*, 14-15, 2006, pp. 71-95.
 [4] **C.S. Roero**, *Peano e la sua scuola fra matematica, logica, interlingua*, Atti del Congresso Internazionale di Studi (Torino 6-7 ottobre 2008), Deputazione Subalpina di Storia Patria, Torino, Palazzo Carignano, 2010.