

Studio di funzioni trigonometriche

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Premessa

Lo **studio di funzione** è un argomento che richiede di saper usare parecchi strumenti matematici (e non a caso è onnipresente nella prova dell'Esame di Stato). Esso consiste nel trovare le proprietà principali di una data funzione reale; tali proprietà in genere vengono riassunte nel disegno di un grafico che deve descrivere abbastanza dettagliatamente l'andamento della funzione stessa.

Premessa

Lo **studio di funzione** è un argomento che richiede di saper usare parecchi strumenti matematici (e non a caso è onnipresente nella prova dell'Esame di Stato). Esso consiste nel trovare le proprietà principali di una data funzione reale; tali proprietà in genere vengono riassunte nel disegno di un grafico che deve descrivere abbastanza dettagliatamente l'andamento della funzione stessa.

Per essere compiuto, lo studio di funzione prevede svariati passaggi, di solito effettuati in un ben preciso ordine, che permettono di dedurre l'andamento in maniera sempre più precisa.

Premessa

Lo **studio di funzione** è un argomento che richiede di saper usare parecchi strumenti matematici (e non a caso è onnipresente nella prova dell'Esame di Stato). Esso consiste nel trovare le proprietà principali di una data funzione reale; tali proprietà in genere vengono riassunte nel disegno di un grafico che deve descrivere abbastanza dettagliatamente l'andamento della funzione stessa.

Per essere compiuto, lo studio di funzione prevede svariati passaggi, di solito effettuati in un ben preciso ordine, che permettono di dedurre l'andamento in maniera sempre più precisa.

Questi passaggi richiedono la capacità di risolvere equazioni e disequazioni, calcolare limiti, trovare derivate: insomma, bisogna conoscere quasi tutto il programma degli ultimi anni!

Premessa

Lo **studio di funzione** è un argomento che richiede di saper usare parecchi strumenti matematici (e non a caso è onnipresente nella prova dell'Esame di Stato). Esso consiste nel trovare le proprietà principali di una data funzione reale; tali proprietà in genere vengono riassunte nel disegno di un grafico che deve descrivere abbastanza dettagliatamente l'andamento della funzione stessa.

Per essere compiuto, lo studio di funzione prevede svariati passaggi, di solito effettuati in un ben preciso ordine, che permettono di dedurre l'andamento in maniera sempre più precisa.

Questi passaggi richiedono la capacità di risolvere equazioni e disequazioni, calcolare limiti, trovare derivate: insomma, bisogna conoscere quasi tutto il programma degli ultimi anni!

In particolare, nel caso delle funzioni goniometriche bisogna saper risolvere le equazioni e disequazioni *goniometriche*. Ciò verrà dato per scontato in questa lezione: se qualcuno avesse dei problemi, converrà correre ai ripari facendo un veloce ripasso.

Lo schema fondamentale

Consideriamo la funzione denotata da $y = f(x)$. Un modo per effettuarne lo studio è quello di seguire lo schema che andiamo a enunciare:

Lo schema fondamentale

Consideriamo la funzione denotata da $y = f(x)$. Un modo per effettuarne lo studio è quello di seguire lo schema che andiamo a enunciare:

- studio del **campo di esistenza** di f

Lo schema fondamentale

Consideriamo la funzione denotata da $y = f(x)$. Un modo per effettuarne lo studio è quello di seguire lo schema che andiamo a enunciare:

- studio del **campo di esistenza** di f
- studio del **segno** di f

Lo schema fondamentale

Consideriamo la funzione denotata da $y = f(x)$. Un modo per effettuarne lo studio è quello di seguire lo schema che andiamo a enunciare:

- studio del **campo di esistenza** di f
- studio del **segno** di f
- calcolo di eventuali **asintoti** verticali, orizzontali, obliqui (mediante la risoluzione di particolari limiti)

Lo schema fondamentale

Consideriamo la funzione denotata da $y = f(x)$. Un modo per effettuarne lo studio è quello di seguire lo schema che andiamo a enunciare:

- studio del **campo di esistenza** di f
- studio del **segno** di f
- calcolo di eventuali **asintoti** verticali, orizzontali, obliqui (mediante la risoluzione di particolari limiti)
- studio del campo di esistenza e del segno della **derivata prima** f' (per trovare massimi, minimi e pendenza)

Lo schema fondamentale

Consideriamo la funzione denotata da $y = f(x)$. Un modo per effettuarne lo studio è quello di seguire lo schema che andiamo a enunciare:

- studio del **campo di esistenza** di f
- studio del **segno** di f
- calcolo di eventuali **asintoti** verticali, orizzontali, obliqui (mediante la risoluzione di particolari limiti)
- studio del campo di esistenza e del segno della **derivata prima** f' (per trovare massimi, minimi e pendenza)
- studio del campo di esistenza e del segno della **derivata seconda** f'' (per trovare flessi, concavità e convessità)

Le funzioni goniometriche

Intanto andiamo a definire che cos'è una funzione goniometrica:
premettendo che non esiste una definizione univoca di questo concetto,
diremo che

Le funzioni goniometriche

Intanto andiamo a definire che cos'è una funzione goniometrica: premettendo che non esiste una definizione univoca di questo concetto, diremo che

una funzione goniometrica è una funzione in cui la variabile x compare soltanto come argomento di seno e coseno

Le funzioni goniometriche

Intanto andiamo a definire che cos'è una funzione goniometrica: premettendo che non esiste una definizione univoca di questo concetto, diremo che

una funzione goniometrica è una funzione in cui la variabile x compare soltanto come argomento di seno e coseno

(vedremo più avanti una versione un po' più generale di questa definizione).

Le funzioni goniometriche

Intanto andiamo a definire che cos'è una funzione goniometrica: premettendo che non esiste una definizione univoca di questo concetto, diremo che

una funzione goniometrica è una funzione in cui la variabile x compare soltanto come argomento di seno e coseno

(vedremo più avanti una versione un po' più generale di questa definizione).

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

è una funzione goniometrica,

Le funzioni goniometriche

Intanto andiamo a definire che cos'è una funzione goniometrica: premettendo che non esiste una definizione univoca di questo concetto, diremo che

una funzione goniometrica è una funzione in cui la variabile x compare soltanto come argomento di seno e coseno

(vedremo più avanti una versione un po' più generale di questa definizione).

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

è una funzione goniometrica, mentre la funzione

$$f(x) = x - \cos x$$

non è una funzione goniometrica nel senso definito sopra.

Tangente, cotangente, secante, cosecante

Ovviamente, anche le funzioni che coinvolgono tangente, cotangente, secante e cosecante sono funzioni goniometriche, poiché si possono sempre ricondurre a seno e coseno.

Tangente, cotangente, secante, cosecante

Ovviamente, anche le funzioni che coinvolgono tangente, cotangente, secante e cosecante sono funzioni goniometriche, poiché si possono sempre ricondurre a seno e coseno.

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$$

è una funzione goniometrica, perché si può scrivere come

$$f(x) = e^{\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}},$$

Tangente, cotangente, secante, cosecante

Ovviamente, anche le funzioni che coinvolgono tangente, cotangente, secante e cosecante sono funzioni goniometriche, poiché si possono sempre ricondurre a seno e coseno.

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$$

è una funzione goniometrica, perché si può scrivere come

$$f(x) = e^{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}},$$

così come la funzione

$$f(x) = \log(\sec x) = \log\left(\frac{1}{\cos x}\right).$$

Tangente, cotangente, secante, cosecante

Ovviamente, anche le funzioni che coinvolgono tangente, cotangente, secante e cosecante sono funzioni goniometriche, poiché si possono sempre ricondurre a seno e coseno.

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$$

è una funzione goniometrica, perché si può scrivere come

$$f(x) = e^{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}},$$

così come la funzione

$$f(x) = \log(\sec x) = \log\left(\frac{1}{\cos x}\right).$$

Anche la funzione coseno sarebbe riconducibile (parzialmente) al seno, mediante

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x},$$

ma resta sempre un'arbitrarietà sul segno da scegliere per la radice, per cui è meglio evitare questa procedura.

Periodicità

La caratteristica principale delle funzioni goniometriche è la **periodicità**. Essendo l'argomento x sempre all'interno di un seno o di un coseno, le funzioni goniometriche sono periodiche di periodo 2π .

Periodicità

La caratteristica principale delle funzioni goniometriche è la **periodicità**. Essendo l'argomento x sempre all'interno di un seno o di un coseno, le funzioni goniometriche sono periodiche di periodo 2π .

Quindi converrà sempre studiarle in una “finestra” grande 2π ; tipicamente si sceglie di studiarle nell'intervallo $[0, 2\pi]$ o nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Periodicità

La caratteristica principale delle funzioni goniometriche è la **periodicità**. Essendo l'argomento x sempre all'interno di un seno o di un coseno, le funzioni goniometriche sono periodiche di periodo 2π .

Quindi converrà sempre studiarle in una “finestra” grande 2π ; tipicamente si sceglie di studiarle nell'intervallo $[0, 2\pi]$ o nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Questo ci insegna che tutto ciò che succede per una funzione goniometrica, succede **infinite volte**!

Periodicità

La caratteristica principale delle funzioni goniometriche è la **periodicità**. Essendo l'argomento x sempre all'interno di un seno o di un coseno, le funzioni goniometriche sono periodiche di periodo 2π .

Quindi converrà sempre studiarle in una “finestra” grande 2π ; tipicamente si sceglie di studiarle nell'intervallo $[0, 2\pi]$ o nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Questo ci insegna che tutto ciò che succede per una funzione goniometrica, succede **infinite volte**!

Useremo espressioni del tipo

“la funzione $f(x) = \sin x$ ha un solo punto di massimo per $x = \pi/2$ ”,

Periodicità

La caratteristica principale delle funzioni goniometriche è la **periodicità**. Essendo l'argomento x sempre all'interno di un seno o di un coseno, le funzioni goniometriche sono periodiche di periodo 2π .

Quindi converrà sempre studiarle in una “finestra” grande 2π ; tipicamente si sceglie di studiarle nell'intervallo $[0, 2\pi]$ o nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Questo ci insegna che tutto ciò che succede per una funzione goniometrica, succede **infinite volte**!

Useremo espressioni del tipo

“la funzione $f(x) = \sin x$ ha un solo punto di massimo per $x = \pi/2$ ”,
ma in realtà sottintendiamo che la funzione ha infiniti punti di massimo della forma $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e noi la stiamo studiando nell'intervallo di periodicità $[0, 2\pi]$.

Estremi dell'intervallo di studio

Poiché le funzioni goniometriche sono periodiche, non si può calcolare il limite per $x \rightarrow \pm\infty$, quindi

le funzioni goniometriche non hanno asintoti orizzontali od obliqui.

Estremi dell'intervallo di studio

Poiché le funzioni goniometriche sono periodiche, non si può calcolare il limite per $x \rightarrow \pm\infty$, quindi

le funzioni goniometriche non hanno asintoti orizzontali od obliqui.

Invece, una cosa importante da calcolare saranno i valori della funzione e della derivata negli estremi dell'intervallo di periodicità, se esistono.

Estremi dell'intervallo di studio

Poiché le funzioni goniometriche sono periodiche, non si può calcolare il limite per $x \rightarrow \pm\infty$, quindi

le funzioni goniometriche non hanno asintoti orizzontali od obliqui.

Invece, una cosa importante da calcolare saranno i valori della funzione e della derivata negli estremi dell'intervallo di periodicità, se esistono. Se scegliamo di studiare la funzione in $[0, 2\pi]$, è importante trovare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x)$$

e lo stesso per $f'(x)$.

Estremi dell'intervallo di studio

Poiché le funzioni goniometriche sono periodiche, non si può calcolare il limite per $x \rightarrow \pm\infty$, quindi

le funzioni goniometriche non hanno asintoti orizzontali od obliqui.

Invece, una cosa importante da calcolare saranno i valori della funzione e della derivata negli estremi dell'intervallo di periodicità, se esistono. Se scegliamo di studiare la funzione in $[0, 2\pi]$, è importante trovare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x)$$

e lo stesso per $f'(x)$.

In questo modo ci potremo accorgere di eventuali singolarità della funzione nei punti del tipo $2k\pi$, che altrimenti rischierebbero di non essere notate.

Esempio

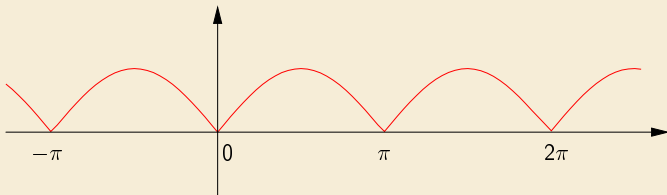
Ad esempio, prendiamo la funzione $f(x) = |\sin x|$.

Studiandola nell'intervallo $[0, 2\pi]$, potrebbe sfuggire il fatto che in 0 c'è un punto angoloso, come si vede facilmente dal grafico:

Esempio

Ad esempio, prendiamo la funzione $f(x) = |\sin x|$.

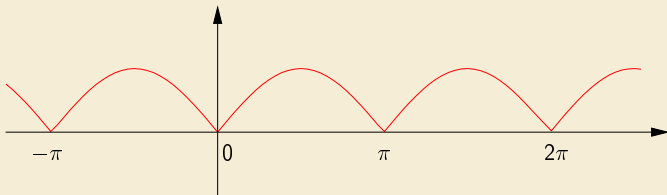
Studiandola nell'intervallo $[0, 2\pi]$, potrebbe sfuggire il fatto che in 0 c'è un punto angoloso, come si vede facilmente dal grafico:



Esempio

Ad esempio, prendiamo la funzione $f(x) = |\sin x|$.

Studiandola nell'intervallo $[0, 2\pi]$, potrebbe sfuggire il fatto che in 0 c'è un punto angoloso, come si vede facilmente dal grafico:



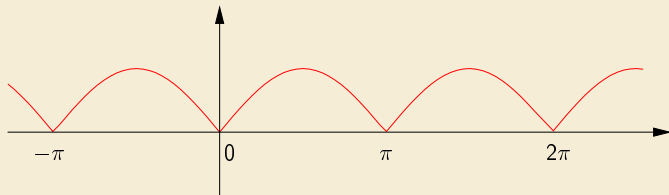
Se invece si calcolano i limiti della derivata prima agli estremi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (|\sin x|)' = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$$

Esempio

Ad esempio, prendiamo la funzione $f(x) = |\sin x|$.

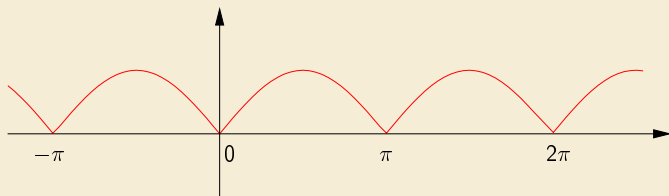
Studiandola nell'intervallo $[0, 2\pi]$, potrebbe sfuggire il fatto che in 0 c'è un punto angoloso, come si vede facilmente dal grafico:



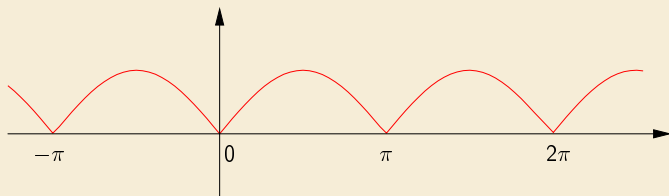
Se invece si calcolano i limiti della derivata prima agli estremi si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} (|\sin x|)' &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} (|\sin x|)' &= \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} (-\sin x)' = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} -\cos x = -1\end{aligned}$$

da cui si evince che in $2k\pi$ ci sono dei punti angolosi.



Naturalmente, nell'esempio precedente anche i punti $x = \pi + 2k\pi$ sono punti angolosi, ma questi rimangono ben all'interno dell'intervallo di studio $[0, 2\pi]$, e quindi vengono individuati senza problemi.



Naturalmente, nell'esempio precedente anche i punti $x = \pi + 2k\pi$ sono punti angolosi, ma questi rimangono ben all'interno dell'intervallo di studio $[0, 2\pi]$, e quindi vengono individuati senza problemi.

Se invece avessimo scelto di studiare la funzione nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, le cose si sarebbero scambiate: i punti angolosi del tipo $2k\pi$ sarebbero risultati evidenti, quelli del tipo $\pi + 2k\pi$ vengono trovati studiando gli estremi dell'intervallo.

Una funzione goniometrica

Quindi abbiamo sottolineato due peculiarità sullo studio delle funzioni goniometriche: la periodicità e l'attenzione agli estremi dell'intervallo di studio.

Una funzione goniometrica

Quindi abbiamo sottolineato due peculiarità sullo studio delle funzioni goniometriche: la periodicità e l'attenzione agli estremi dell'intervallo di studio.

Detto questo, passiamo a un esempio: studiamo la funzione

$$f(x) = 3 - 3 \sin x - 2 \cos^2 x.$$

Una funzione goniometrica

Quindi abbiamo sottolineato due peculiarità sullo studio delle funzioni goniometriche: la periodicità e l'attenzione agli estremi dell'intervallo di studio.

Detto questo, passiamo a un esempio: studiamo la funzione

$$f(x) = 3 - 3 \sin x - 2 \cos^2 x.$$

Per la periodicità, consideriamo la funzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Una funzione goniometrica

Quindi abbiamo sottolineato due peculiarità sullo studio delle funzioni goniometriche: la periodicità e l'attenzione agli estremi dell'intervallo di studio.

Detto questo, passiamo a un esempio: studiamo la funzione

$$f(x) = 3 - 3 \sin x - 2 \cos^2 x.$$

Per la periodicità, consideriamo la funzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

- Campo di esistenza: è tutto l'intervallo $[0, 2\pi]$, e si ha $f(0) = f(2\pi) = 1$.

Una funzione goniometrica

Quindi abbiamo sottolineato due peculiarità sullo studio delle funzioni goniometriche: la periodicità e l'attenzione agli estremi dell'intervallo di studio.

Detto questo, passiamo a un esempio: studiamo la funzione

$$f(x) = 3 - 3 \sin x - 2 \cos^2 x.$$

Per la periodicità, consideriamo la funzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

- Campo di esistenza: è tutto l'intervallo $[0, 2\pi]$, e si ha $f(0) = f(2\pi) = 1$.
- Segno: trasformando $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ otteniamo

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 \geq 0$$

che si fattorizza in

$$2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) (\sin x - 1) \geq 0.$$

Il fattore $(\sin x - 1)$ è sempre negativo, quindi resta

$$\sin x \leq \frac{1}{2}.$$

Il fattore $(\sin x - 1)$ è sempre negativo, quindi resta

$$\sin x \leq \frac{1}{2}.$$

Quindi la funzione è positiva per

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad \frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi.$$

Il fattore $(\sin x - 1)$ è sempre negativo, quindi resta

$$\sin x \leq \frac{1}{2}.$$

Quindi la funzione è positiva per

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad \frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi.$$

- Non ci sono asintoti verticali (no “buchi” nel campo di esistenza).

Il fattore $(\sin x - 1)$ è sempre negativo, quindi resta

$$\sin x \leq \frac{1}{2}.$$

Quindi la funzione è positiva per

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad \frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi.$$

- Non ci sono asintoti verticali (no “buchi” nel campo di esistenza).
- Segno della derivata prima:

$$f'(x) = -3 \cos x + 4 \cos x \sin x = \cos x(4 \sin x - 3).$$

Il fattore $(\sin x - 1)$ è sempre negativo, quindi resta

$$\sin x \leq \frac{1}{2}.$$

Quindi la funzione è positiva per

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad \frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi.$$

- Non ci sono asintoti verticali (no “buchi” nel campo di esistenza).
- Segno della derivata prima:

$$f'(x) = -3 \cos x + 4 \cos x \sin x = \cos x(4 \sin x - 3).$$

Studiando il segno dei due fattori si ottiene la tabella

0	α	$\pi/2$	$\pi - \alpha$	$3\pi/2$	2π
-	+	-	+	-	
					
m_1	M_1	m_2	M_2		

dove $\alpha = \arcsin \frac{3}{4}$

Quindi abbiamo trovato due punti di minimo e due di massimo nell'intervallo studiato (attenzione: globalmente i punti di minimo e di massimo sono in numero infinito, per la periodicità).

Quindi abbiamo trovato due punti di minimo e due di massimo nell'intervallo studiato (attenzione: globalmente i punti di minimo e di massimo sono in numero infinito, per la periodicità).

Inoltre si ha

$$f(\alpha) = f(\pi - \alpha) = 3 - 3 \cdot \frac{3}{4} - 2 \left(1 - \frac{9}{16} \right) = -\frac{1}{8},$$

Quindi abbiamo trovato due punti di minimo e due di massimo nell'intervallo studiato (attenzione: globalmente i punti di minimo e di massimo sono in numero infinito, per la periodicità).

Inoltre si ha

$$f(\alpha) = f(\pi - \alpha) = 3 - 3 \cdot \frac{3}{4} - 2 \left(1 - \frac{9}{16} \right) = -\frac{1}{8},$$

$$f(\pi/2) = 0, \quad f(3\pi/2) = 6,$$

Quindi abbiamo trovato due punti di minimo e due di massimo nell'intervallo studiato (attenzione: globalmente i punti di minimo e di massimo sono in numero infinito, per la periodicità).

Inoltre si ha

$$f(\alpha) = f(\pi - \alpha) = 3 - 3 \cdot \frac{3}{4} - 2 \left(1 - \frac{9}{16} \right) = -\frac{1}{8},$$

$$f(\pi/2) = 0, \quad f(3\pi/2) = 6,$$

quindi il minimo assoluto vale $-\frac{1}{8}$ e il massimo assoluto vale 6.

Quindi abbiamo trovato due punti di minimo e due di massimo nell'intervallo studiato (attenzione: globalmente i punti di minimo e di massimo sono in numero infinito, per la periodicità).

Inoltre si ha

$$f(\alpha) = f(\pi - \alpha) = 3 - 3 \cdot \frac{3}{4} - 2 \left(1 - \frac{9}{16}\right) = -\frac{1}{8},$$

$$f(\pi/2) = 0, \quad f(3\pi/2) = 6,$$

quindi il minimo assoluto vale $-\frac{1}{8}$ e il massimo assoluto vale 6.

Infine, agli estremi dell'intervallo si ha $f'(0) = f'(2\pi) = -3$.

Quindi abbiamo trovato due punti di minimo e due di massimo nell'intervallo studiato (attenzione: globalmente i punti di minimo e di massimo sono in numero infinito, per la periodicità).

Inoltre si ha

$$f(\alpha) = f(\pi - \alpha) = 3 - 3 \cdot \frac{3}{4} - 2 \left(1 - \frac{9}{16}\right) = -\frac{1}{8},$$

$$f(\pi/2) = 0, \quad f(3\pi/2) = 6,$$

quindi il minimo assoluto vale $-\frac{1}{8}$ e il massimo assoluto vale 6.

Infine, agli estremi dell'intervallo si ha $f'(0) = f'(2\pi) = -3$.

● Segno della derivata seconda:

$$y'' = 3 \sin x + 4(\cos^2 x - \sin^2 x) = 3 \sin x + 4 - 8 \sin^2 x \geq 0.$$

Quindi abbiamo trovato due punti di minimo e due di massimo nell'intervallo studiato (attenzione: globalmente i punti di minimo e di massimo sono in numero infinito, per la periodicità).

Inoltre si ha

$$f(\alpha) = f(\pi - \alpha) = 3 - 3 \cdot \frac{3}{4} - 2 \left(1 - \frac{9}{16}\right) = -\frac{1}{8},$$

$$f(\pi/2) = 0, \quad f(3\pi/2) = 6,$$

quindi il minimo assoluto vale $-\frac{1}{8}$ e il massimo assoluto vale 6.

Infine, agli estremi dell'intervallo si ha $f'(0) = f'(2\pi) = -3$.

● Segno della derivata seconda:

$$y'' = 3 \sin x + 4(\cos^2 x - \sin^2 x) = 3 \sin x + 4 - 8 \sin^2 x \geq 0.$$

Ponendo $t = \sin x$ si ha $8t^2 - 3t - 4 \leq 0$ da cui

$$\frac{3 - \sqrt{137}}{16} \leq \sin x \leq \frac{3 + \sqrt{137}}{16}.$$

Quindi abbiamo trovato due punti di minimo e due di massimo nell'intervallo studiato (attenzione: globalmente i punti di minimo e di massimo sono in numero infinito, per la periodicità).

Inoltre si ha

$$f(\alpha) = f(\pi - \alpha) = 3 - 3 \cdot \frac{3}{4} - 2 \left(1 - \frac{9}{16}\right) = -\frac{1}{8},$$

$$f(\pi/2) = 0, \quad f(3\pi/2) = 6,$$

quindi il minimo assoluto vale $-\frac{1}{8}$ e il massimo assoluto vale 6.

Infine, agli estremi dell'intervallo si ha $f'(0) = f'(2\pi) = -3$.

• Segno della derivata seconda:

$$y'' = 3 \sin x + 4(\cos^2 x - \sin^2 x) = 3 \sin x + 4 - 8 \sin^2 x \geq 0.$$

Ponendo $t = \sin x$ si ha $8t^2 - 3t - 4 \leq 0$ da cui

$$\frac{3 - \sqrt{137}}{16} \leq \sin x \leq \frac{3 + \sqrt{137}}{16}.$$

I valori sono brutti, ma sono comunque compresi tra -1 e 1 , e hanno segno opposto.

Quindi, ponendo

$$\beta = \arcsin \frac{3 + \sqrt{137}}{16},$$

si ha la tabella

0	β	$\pi - \beta$	$\pi + \beta$	$2\pi - \beta$	2π
+	-	+	-	+	
					
	F_1	F_2	F_3	F_4	

Quindi, ponendo

$$\beta = \arcsin \frac{3 + \sqrt{137}}{16},$$

si ha la tabella

0	β	$\pi - \beta$	$\pi + \beta$	$2\pi - \beta$	2π
+	-	+	-	+	
					
	F_1	F_2	F_3	F_4	

Ci sono dunque 4 flessi nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Non calcoliamo l'ordinata dei flessi, perché il conto è un po' noioso.

Quindi, ponendo

$$\beta = \arcsin \frac{3 + \sqrt{137}}{16},$$

si ha la tabella

0	β	$\pi - \beta$	$\pi + \beta$	$2\pi - \beta$	2π
+	-	+	-	+	
					
	F_1	F_2	F_3	F_4	

Ci sono dunque 4 flessi nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Non calcoliamo l'ordinata dei flessi, perché il conto è un po' noioso.

Si noti che in 0 o in 2π non c'è un flesso, poiché la concavità non cambia.

Quindi, ponendo

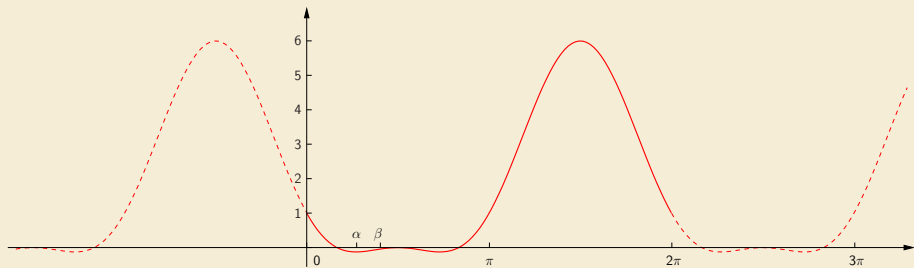
$$\beta = \arcsin \frac{3 + \sqrt{137}}{16},$$

si ha la tabella

0	β	$\pi - \beta$	$\pi + \beta$	$2\pi - \beta$	2π
+	-	+	-	+	
					
	F_1	F_2	F_3	F_4	

Ci sono dunque 4 flessi nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Non calcoliamo l'ordinata dei flessi, perché il conto è un po' noioso.

Si noti che in 0 o in 2π non c'è un flesso, poiché la concavità non cambia. Nel prossimo lucido riportiamo il grafico della funzione.



Funzioni goniometriche inverse

Usando anche le funzioni goniometriche inverse, possono capitare situazioni strane. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \arcsen(\sen x)$$

è goniometrica nel senso della definizione data in precedenza, quindi in particolare è periodica.

Funzioni goniometriche inverse

Usando anche le funzioni goniometriche inverse, possono capitare situazioni strane. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \arcsen(\sen x)$$

è goniometrica nel senso della definizione data in precedenza, quindi in particolare è periodica.

Proviamo a studiare il grafico di questa funzione: restringendoci all'intervallo $[-\pi, \pi]$ abbiamo

$$\begin{cases} \arcsen(\sen x) = -x - \pi & \text{se } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \arcsen(\sen x) = x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \arcsen(\sen x) = \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Funzioni goniometriche inverse

Usando anche le funzioni goniometriche inverse, possono capitare situazioni strane. Ad esempio, la funzione

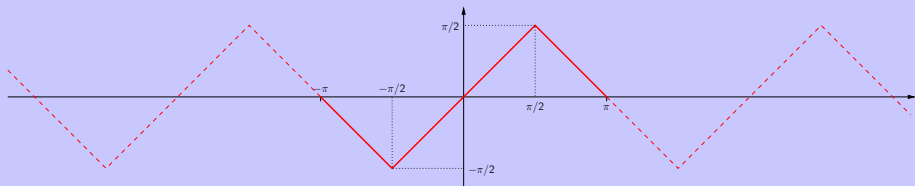
$$f(x) = \arcsen(\sen x)$$

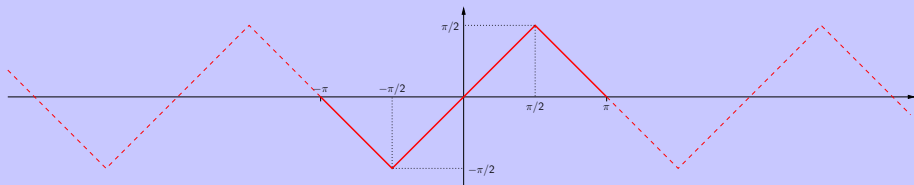
è goniometrica nel senso della definizione data in precedenza, quindi in particolare è periodica.

Proviamo a studiare il grafico di questa funzione: restringendoci all'intervallo $[-\pi, \pi]$ abbiamo

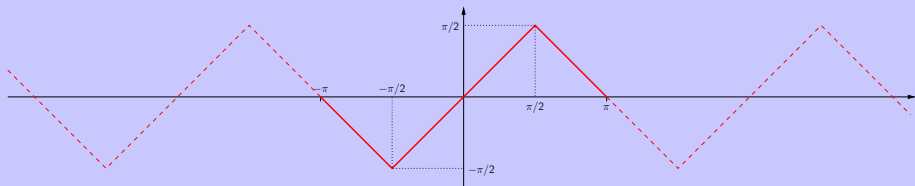
$$\begin{cases} \arcsen(\sen x) = -x - \pi & \text{se } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \arcsen(\sen x) = x & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \arcsen(\sen x) = \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Questa è semplicemente una spezzata, il cui grafico è molto semplice. Estendendolo periodicamente abbiamo il disegno del prossimo lucido.





Si vede che ci sono dei punti di non derivabilità (punti angolosi) per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Infatti, la derivata di $\arcsin x$ è $1/\sqrt{1-x^2}$, e non è definita per $x = \pm 1$.



Si vede che ci sono dei punti di non derivabilità (punti angolosi) per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Infatti, la derivata di $\arcsin x$ è $1/\sqrt{1-x^2}$, e non è definita per $x = \pm 1$.

Poiché nella nostra funzione l'argomento di $\arcsin$ è $\sin x$, ci sono problemi quando

$$\sin x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Periodicità diverse

Abbiamo definito funzione goniometrica ogni funzione in cui la variabile x compare soltanto come argomento di seno e coseno.

Periodicità diverse

Abbiamo definito funzione goniometrica ogni funzione in cui la variabile x compare soltanto come argomento di seno e coseno.

Ma naturalmente non cambia quasi niente se x è moltiplicata per un coefficiente: ad esempio, le funzioni

$$f_1(x) = \sin(2x), \quad f_2(x) = \log(\cos(\sqrt{2}x) + 4), \quad f_3(x) = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}x\right)$$

sono tutte considerate funzioni goniometriche.

Periodicità diverse

Abbiamo definito funzione goniometrica ogni funzione in cui la variabile x compare soltanto come argomento di seno e coseno.

Ma naturalmente non cambia quasi niente se x è moltiplicata per un coefficiente: ad esempio, le funzioni

$$f_1(x) = \sin(2x), \quad f_2(x) = \log(\cos(\sqrt{2}x) + 4), \quad f_3(x) = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}x\right)$$

sono tutte considerate funzioni goniometriche.

Però in questi casi cambia la lunghezza del periodo: la funzione $\sin(ax)$ è periodica di periodo $\frac{2\pi}{a}$, quindi converrà studiarla su un intervallo del tipo $\left[0, \frac{2\pi}{a}\right]$ oppure del tipo $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$.

Periodicità diverse

Abbiamo definito funzione goniometrica ogni funzione in cui la variabile x compare soltanto come argomento di seno e coseno.

Ma naturalmente non cambia quasi niente se x è moltiplicata per un coefficiente: ad esempio, le funzioni

$$f_1(x) = \sin(2x), \quad f_2(x) = \log(\cos(\sqrt{2}x) + 4), \quad f_3(x) = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}x\right)$$

sono tutte considerate funzioni goniometriche.

Però in questi casi cambia la lunghezza del periodo: la funzione $\sin(ax)$ è periodica di periodo $\frac{2\pi}{a}$, quindi converrà studiarla su un intervallo del tipo $\left[0, \frac{2\pi}{a}\right]$ oppure del tipo $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$.

Tornando agli esempi sopra, studieremo f_1 sull'intervallo $[0, \pi]$,

Periodicità diverse

Abbiamo definito funzione goniometrica ogni funzione in cui la variabile x compare soltanto come argomento di seno e coseno.

Ma naturalmente non cambia quasi niente se x è moltiplicata per un coefficiente: ad esempio, le funzioni

$$f_1(x) = \sin(2x), \quad f_2(x) = \log(\cos(\sqrt{2}x) + 4), \quad f_3(x) = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}x\right)$$

sono tutte considerate funzioni goniometriche.

Però in questi casi cambia la lunghezza del periodo: la funzione $\sin(ax)$ è periodica di periodo $\frac{2\pi}{a}$, quindi converrà studiarla su un intervallo del tipo $\left[0, \frac{2\pi}{a}\right]$ oppure del tipo $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$.

Tornando agli esempi sopra, studieremo

f_1 sull'intervallo $[0, \pi]$, f_2 sull'intervallo $[0, \sqrt{2}\pi]$,

Periodicità diverse

Abbiamo definito funzione goniometrica ogni funzione in cui la variabile x compare soltanto come argomento di seno e coseno.

Ma naturalmente non cambia quasi niente se x è moltiplicata per un coefficiente: ad esempio, le funzioni

$$f_1(x) = \sin(2x), \quad f_2(x) = \log(\cos(\sqrt{2}x) + 4), \quad f_3(x) = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}x\right)$$

sono tutte considerate funzioni goniometriche.

Però in questi casi cambia la lunghezza del periodo: la funzione $\sin(ax)$ è periodica di periodo $\frac{2\pi}{a}$, quindi converrà studiarla su un intervallo del tipo $\left[0, \frac{2\pi}{a}\right]$ oppure del tipo $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$.

Tornando agli esempi sopra, studieremo

f_1 sull'intervallo $[0, \pi]$, f_2 sull'intervallo $[0, \sqrt{2}\pi]$, f_3 sull'intervallo $\left[0, \frac{4}{3}\pi\right]$.

Nella sessione ordinaria della prova di matematica dell'Esame di stato 2011 per i licei scientifici, nel primo problema (tra le altre cose) si doveva studiare la funzione

$$g(x) = \operatorname{sen}(\pi x).$$

Nella sessione ordinaria della prova di matematica dell'Esame di stato 2011 per i licei scientifici, nel primo problema (tra le altre cose) si doveva studiare la funzione

$$g(x) = \sin(\pi x).$$

Questa è una semplicissima funzione goniometrica, il cui periodo, per quanto visto sopra, è 2, e quindi può essere ristretta all'intervallo $[0, 2]$.

Somme di periodicità diverse

E cosa succede se sommiamo due funzioni goniometriche con periodicità diverse? Per esempio, la funzione

$$f(x) = \sin(ax) + \sin(bx)$$

è goniometrica? È periodica?

Somme di periodicità diverse

E cosa succede se sommiamo due funzioni goniometriche con periodicità diverse? Per esempio, la funzione

$$f(x) = \sin(ax) + \sin(bx)$$

è goniometrica? È periodica?

In generale,

se due funzioni hanno periodi T_1 e T_2 tali che

$$\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q},$$

la somma delle due funzioni è ancora periodica.

Somme di periodicità diverse

E cosa succede se sommiamo due funzioni goniometriche con periodicità diverse? Per esempio, la funzione

$$f(x) = \sin(ax) + \sin(bx)$$

è goniometrica? È periodica?

In generale,

se due funzioni hanno periodi T_1 e T_2 tali che

$$\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q},$$

la somma delle due funzioni è ancora periodica.

Quindi se i due periodi hanno **rapporto razionale**, la somma è ancora periodica, e il periodo è il più piccolo multiplo comune di T_1 e T_2 .

Ma c'è di più: nel caso di esempio

$$f(x) = \sin(ax) + \sin(bx),$$

se $\frac{a}{b}$ è razionale, a forza di lavorare con le formule di addizione si possono scrivere $\sin(ax)$ e $\sin(bx)$ come funzioni goniometriche di uno stesso argomento cx , dove

$\frac{1}{c}$ è il più piccolo multiplo comune di $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$.

Ma c'è di più: nel caso di esempio

$$f(x) = \sin(ax) + \sin(bx),$$

se $\frac{a}{b}$ è razionale, a forza di lavorare con le formule di addizione si possono scrivere $\sin(ax)$ e $\sin(bx)$ come funzioni goniometriche di uno stesso argomento cx , dove

$$\frac{1}{c} \text{ è il più piccolo multiplo comune di } \frac{1}{a}, \frac{1}{b}.$$

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3},$$

a forza di formule goniometriche può essere ricondotta a una funzione goniometrica di argomento $\frac{x}{6}$:

Ma c'è di più: nel caso di esempio

$$f(x) = \sin(ax) + \sin(bx),$$

se $\frac{a}{b}$ è razionale, a forza di lavorare con le formule di addizione si possono scrivere $\sin(ax)$ e $\sin(bx)$ come funzioni goniometriche di uno stesso argomento cx , dove

$$\frac{1}{c} \text{ è il più piccolo multiplo comune di } \frac{1}{a}, \frac{1}{b}.$$

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3},$$

a forza di formule goniometriche può essere ricondotta a una funzione goniometrica di argomento $\frac{x}{6}$:

$$\sin \frac{x}{2} = 3 \cos^2 \frac{x}{6} \sin \frac{x}{6} - \sin^3 \frac{x}{6},$$

Ma c'è di più: nel caso di esempio

$$f(x) = \sin(ax) + \sin(bx),$$

se $\frac{a}{b}$ è razionale, a forza di lavorare con le formule di addizione si possono scrivere $\sin(ax)$ e $\sin(bx)$ come funzioni goniometriche di uno stesso argomento cx , dove

$$\frac{1}{c} \text{ è il più piccolo multiplo comune di } \frac{1}{a}, \frac{1}{b}.$$

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3},$$

a forza di formule goniometriche può essere ricondotta a una funzione goniometrica di argomento $\frac{x}{6}$:

$$\sin \frac{x}{2} = 3 \cos^2 \frac{x}{6} \sin \frac{x}{6} - \sin^3 \frac{x}{6}, \quad \sin \frac{x}{3} = 2 \cos \frac{x}{6} \sin \frac{x}{6}.$$

Quindi possiamo generalizzare un po' la definizione di funzione goniometrica:

Quindi possiamo generalizzare un po' la definizione di funzione goniometrica:

una funzione goniometrica è una funzione in cui la variabile x compare soltanto in espressioni del tipo

$$\sin(a_i x), \quad \cos(a_j x),$$

dove tutti gli a_i, a_j stanno in rapporto razionale tra loro.

Quindi possiamo generalizzare un po' la definizione di funzione goniometrica:

una funzione goniometrica è una funzione in cui la variabile x compare soltanto in espressioni del tipo

$$\sin(a_i x), \quad \cos(a_j x),$$

dove tutti gli a_i, a_j stanno in rapporto razionale tra loro.

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \cos(\sqrt{2}x) \operatorname{tg}(3\sqrt{2}x)$$

è una funzione goniometrica (esercizio: che periodo ha?),

Quindi possiamo generalizzare un po' la definizione di funzione goniometrica:

una funzione goniometrica è una funzione in cui la variabile x compare soltanto in espressioni del tipo

$$\sin(a_i x), \quad \cos(a_j x),$$

dove tutti gli a_i, a_j stanno in rapporto razionale tra loro.

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \cos(\sqrt{2}x) \operatorname{tg}(3\sqrt{2}x)$$

è una funzione goniometrica (esercizio: che periodo ha?), mentre la funzione

$$g(x) = e^{\sin x} \cos(\pi x)$$

non rispetta la nostra definizione.

Un esempio più difficile

Concludiamo questa rassegna con un esempio un po' più difficile, che non rientra propriamente nella nostra definizione (ma che potrebbe comunque capitare nell'Esame di Stato).

Un esempio più difficile

Concludiamo questa rassegna con un esempio un po' più difficile, che non rientra propriamente nella nostra definizione (ma che potrebbe comunque capitare nell'Esame di Stato).

Vogliamo disegnare la funzione

$$f(x) = x - \sin x.$$

Questa non è una funzione goniometrica, e non è neppure periodica. Però si può intuire facilmente il suo grafico: ci sarà la bisettrice $y=x$ che fa da “guida”, e attorno a questa retta “ondeggerà” la funzione $-\sin x$.

Un esempio più difficile

Concludiamo questa rassegna con un esempio un po' più difficile, che non rientra propriamente nella nostra definizione (ma che potrebbe comunque capitare nell'Esame di Stato).

Vogliamo disegnare la funzione

$$f(x) = x - \sin x.$$

Questa non è una funzione goniometrica, e non è neppure periodica. Però si può intuire facilmente il suo grafico: ci sarà la bisettrice $y=x$ che fa da “guida”, e attorno a questa retta “ondeggerà” la funzione $-\sin x$. Proviamo a essere più precisi.

Un esempio più difficile

Concludiamo questa rassegna con un esempio un po' più difficile, che non rientra propriamente nella nostra definizione (ma che potrebbe comunque capitare nell'Esame di Stato).

Vogliamo disegnare la funzione

$$f(x) = x - \sin x.$$

Questa non è una funzione goniometrica, e non è neppure periodica. Però si può intuire facilmente il suo grafico: ci sarà la bisettrice $y=x$ che fa da “guida”, e attorno a questa retta “ondeggerà” la funzione $-\sin x$. Proviamo a essere più precisi.

- Il campo di esistenza è tutto $\mathbb{R}$.

Un esempio più difficile

Concludiamo questa rassegna con un esempio un po' più difficile, che non rientra propriamente nella nostra definizione (ma che potrebbe comunque capitare nell'Esame di Stato).

Vogliamo disegnare la funzione

$$f(x) = x - \sin x.$$

Questa non è una funzione goniometrica, e non è neppure periodica. Però si può intuire facilmente il suo grafico: ci sarà la bisettrice $y=x$ che fa da “guida”, e attorno a questa retta “ondeggerà” la funzione $-\sin x$. Proviamo a essere più precisi.

- Il campo di esistenza è tutto $\mathbb{R}$.
- Lo studio del segno è problematico, perché la disequazione

$$x - \sin x \geq 0$$

mescola polinomi e funzioni trigonometriche.

Se però ci ricordiamo le approssimazioni che di solito si fanno nello studio del limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

dovremmo anche ricordarci che

$$\sin x \leq x \quad \text{per } x \geq 0, \quad \sin x \geq x \quad \text{per } x \leq 0.$$

Se però ci ricordiamo le approssimazioni che di solito si fanno nello studio del limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

dovremmo anche ricordarci che

$$\sin x \leq x \quad \text{per } x \geq 0, \quad \sin x \geq x \quad \text{per } x \leq 0.$$

Quindi la funzione è negativa prima di 0 e positiva dopo lo 0.

Se però ci ricordiamo le approssimazioni che di solito si fanno nello studio del limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

dovremmo anche ricordarci che

$$\sin x \leq x \quad \text{per } x \geq 0, \quad \sin x \geq x \quad \text{per } x \leq 0.$$

Quindi la funzione è negativa prima di 0 e positiva dopo lo 0.

- Lasciamo per esercizio di provare che non ci sono asintoti orizzontali od obliqui (il caso degli asintoti obliqui è interessante: si trova un coefficiente angolare m candidato, ma non si riesce a trovare il corrispondente termine noto q).

Se però ci ricordiamo le approssimazioni che di solito si fanno nello studio del limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

dovremmo anche ricordarci che

$$\sin x \leq x \quad \text{per } x \geq 0, \quad \sin x \geq x \quad \text{per } x \leq 0.$$

Quindi la funzione è negativa prima di 0 e positiva dopo lo 0.

- Lasciamo per esercizio di provare che non ci sono asintoti orizzontali od obliqui (il caso degli asintoti obliqui è interessante: si trova un coefficiente angolare m candidato, ma non si riesce a trovare il corrispondente termine noto q).
- Segno della derivata prima: qui le cose tornano semplici. Si ha

$$f'(x) = 1 - \cos x,$$

quindi è sempre $f' \geq 0$ e non ci sono massimi e minimi.

Se però ci ricordiamo le approssimazioni che di solito si fanno nello studio del limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

dovremmo anche ricordarci che

$$\sin x \leq x \quad \text{per } x \geq 0, \quad \sin x \geq x \quad \text{per } x \leq 0.$$

Quindi la funzione è negativa prima di 0 e positiva dopo lo 0.

- Lasciamo per esercizio di provare che non ci sono asintoti orizzontali od obliqui (il caso degli asintoti obliqui è interessante: si trova un coefficiente angolare m candidato, ma non si riesce a trovare il corrispondente termine noto q).
- Segno della derivata prima: qui le cose tornano semplici. Si ha

$$f'(x) = 1 - \cos x,$$

quindi è sempre $f' \geq 0$ e non ci sono massimi e minimi.

Poiché però si ha $f'(x) = 0$ per $x = 2k\pi$, avremo infiniti flessi ascendenti a tangente orizzontale.

- Segno della derivata seconda:

$$f''(x) = \sin x$$

per cui $f'' \geq 0$ su $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$.

- Segno della derivata seconda:

$$f''(x) = \sin x$$

per cui $f'' \geq 0$ su $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$.

Troviamo quindi infiniti altri flessi (a tangente obliqua) nei punti $x = \pi + 2k\pi$.

- Segno della derivata seconda:

$$f''(x) = \sin x$$

per cui $f'' \geq 0$ su $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$.

Troviamo quindi infiniti altri flessi (a tangente obliqua) nei punti $x = \pi + 2k\pi$.

Il grafico è il seguente:

