

FRANGE DI MOIRÉ E BATTIMENTI

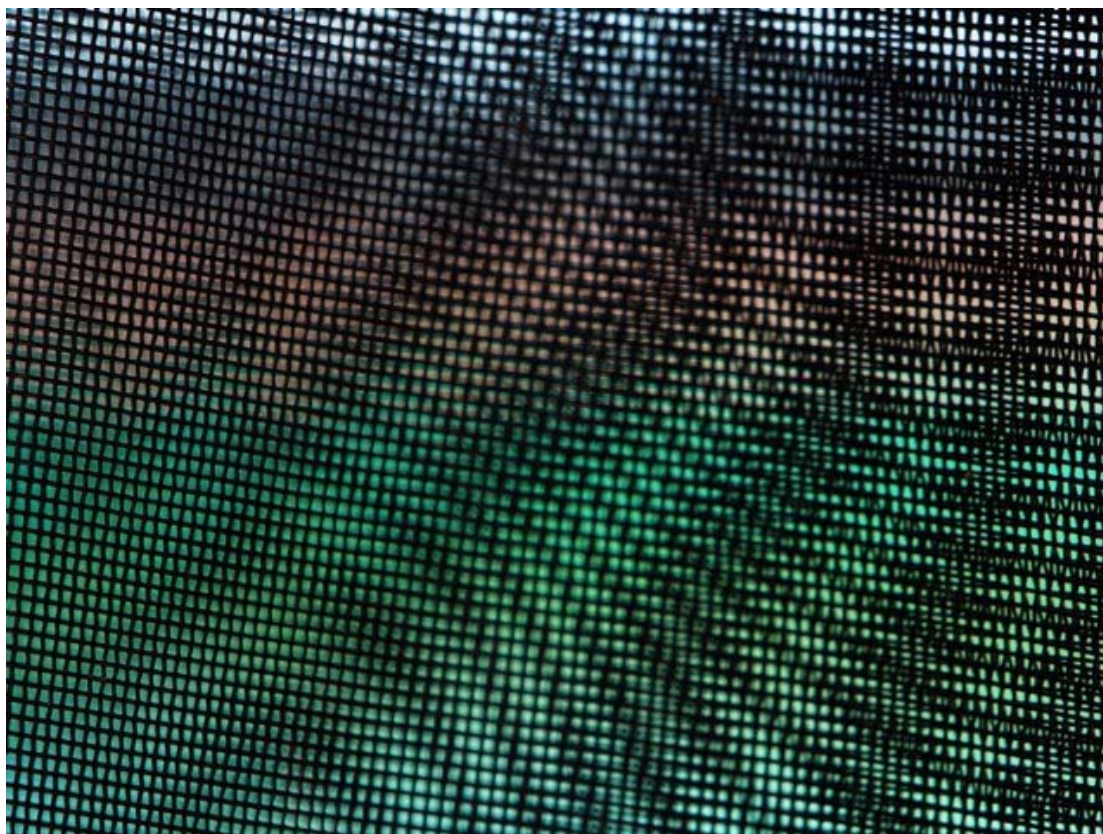
Ledo Stefanini

Capita a tutti di guardare due cancellate uguali poste a distanze diverse sulla stessa linea di vista. Si possono allora osservare delle strisce verticali la cui separazione dipende dalla distanza dell'osservatore.



Fotografia

Analoghi giochi di luce si possono osservare anche disponendo, ad una certa distanza, due pezzi sovrapposti di calze di nylon.

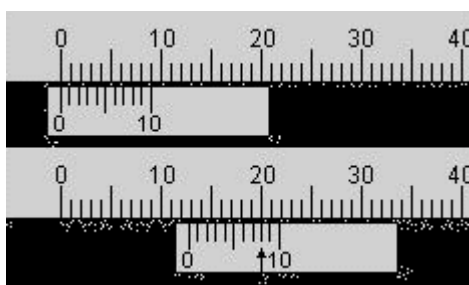
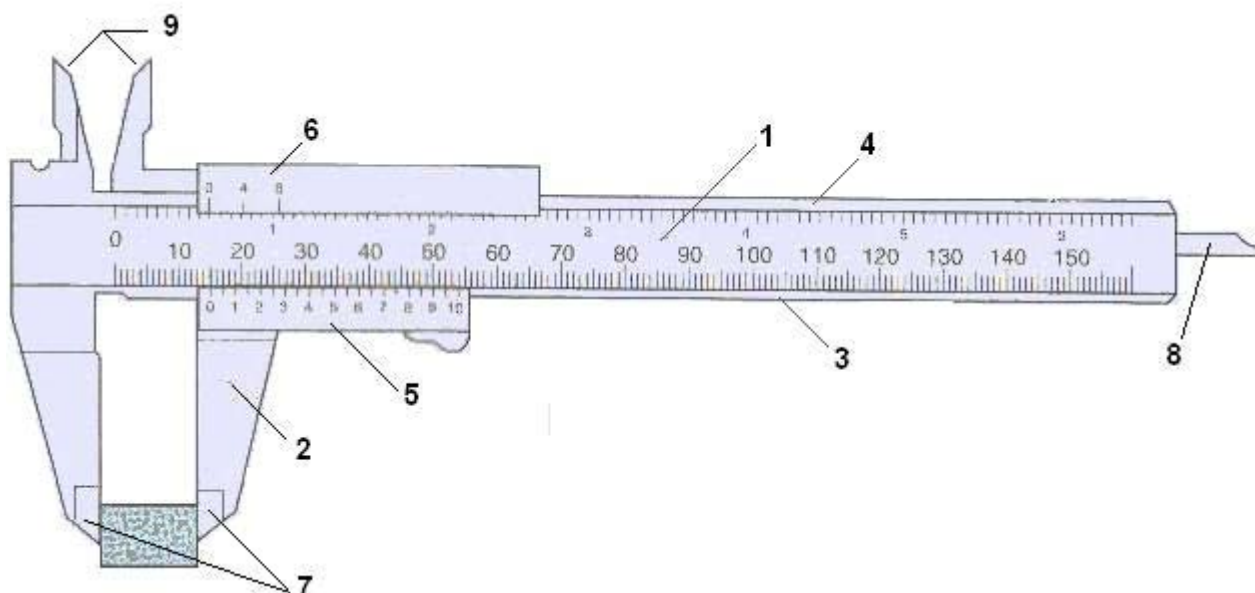


Questi effetti vanno sotto il nome di *frange di Moiré*, dall'espressione francese per designare gli effetti ottici prodotti dall'acqua.

IL CALIBRO A NONIO

La figura sottostante riproduce un comune calibro, strumento utilizzato nelle officine per misure accurate di spessore. Per capire quale relazione ci sia tra il calibro e le figure di Moiré, osserviamo che il calibro presenta due scale: una fissa, tarata in millimetri, ed una mobile tarata in unità leggermente inferiori: 10 di queste unità corrispondono a nove millimetri.

Pertanto, l'unità della scala inferiore corrisponde a $1 u = \frac{9}{10} mm$

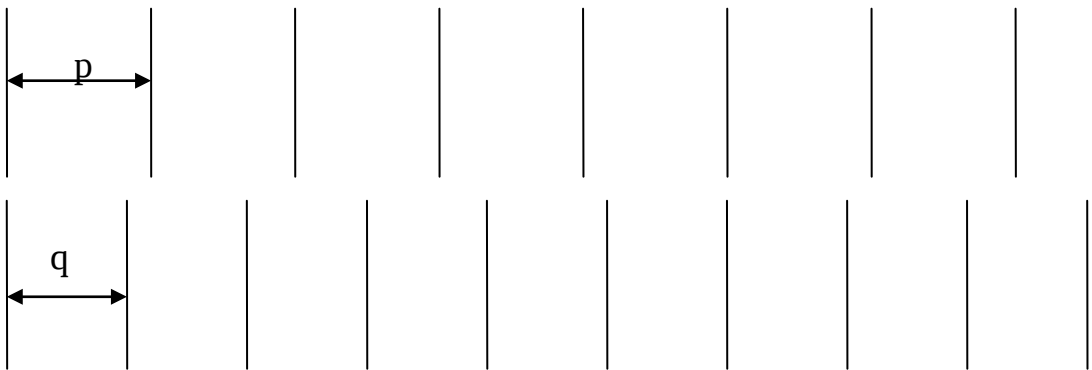


Poniamo di inserire un oggetto tra le ganasce del calibro e sia x il suo spessore. Le linee della scala inferiore sono spostate rispetto a quelle della superiore; tuttavia, scorrendo le scale, si trova che due linee sono allineate. Nell'esempio della figura lo spessore è compreso tra 12 e 13 mm e le linee delle due scale che si corrispondono esattamente sono l'ottava della scala del cursore e la 20-esima della scala di millimetri.

Significa che $x = 20 - 8\left(\frac{9}{10}\right) = 12 + 8 - 8\left(\frac{9}{10}\right) = 12 + 8\left(\frac{1}{10}\right) = 12,8 \text{ mm}$

GENERALIZZAZIONE

Naturalmente, le scale possono essere qualsiasi. Per esempio, consideriamo un reticolo costituito da una successione di aste parallele. La distanza tra due aste successive si chiama *passo* p del reticolo. Insieme a questo, consideriamo un secondo reticolo di passo q leggermente inferiore al primo.



Poniamo che sia $q = \frac{n}{n+1} p$ (1), con n numero intero.

Mettiamo di aver sovrapposto le prime due aste dei reticoli. Ci chiediamo quali aste del reticolo saranno ancora sovrapposte. La sovrapposizione avviene per le aste per le quali

$$(n+1)q = np \quad (2)$$

che è il *passo* π dei battimenti.

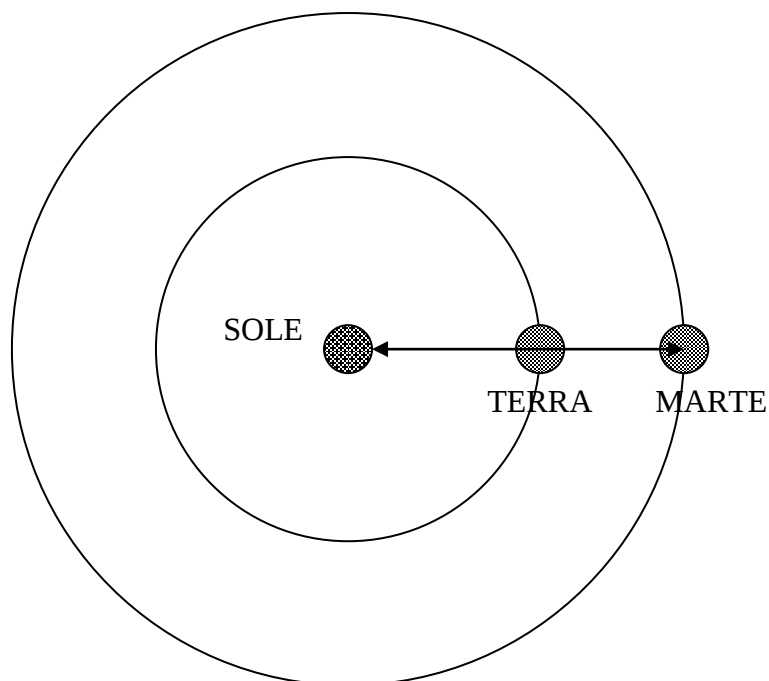
La stessa si può scrivere nella forma $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{\pi}$ (3).

PERIODO DI RIVOLUZIONE

Consideriamo un pianeta (ad es. Marte) che descrive un'orbita (quasi) circolare intorno al Sole. Quando si fornisce il tempo impiegato nella rivoluzione è necessario distinguere tra *Periodo Siderale* e *Periodo Sinodico*.

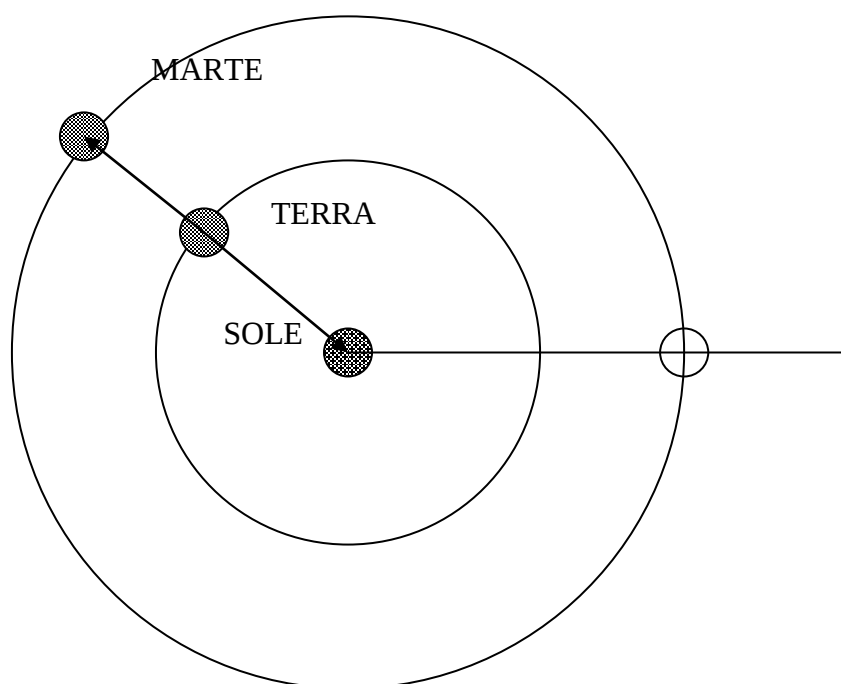
Il Periodo Siderale è il tempo impiegato a descrivere la sua orbita in un riferimento che ha l'origine nel Sole ed è orientato verso le stelle. Per Marte, tale periodo è di 1,88 anni.

Tuttavia, noi osserviamo il pianeta dalla Terra, che percorre un'orbita più piccola.



Poniamo che, ad una certa data, si osservi Marte in opposizione al Sole.

L'opposizione si osserva di nuovo quando la Terra ha compiuto più di una rivoluzione



Precisamente, dopo un tempo τ tale che $\omega_M \tau + 2\pi = \omega_T \tau$ (4),

dove le ω indicano le velocità angolari di Marte e della Terra, rispettivamente.

Se si ricorda che tra la velocità angolare e il periodo sussiste la relazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5)$$

si ricava
$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \quad (6)$$

dove le T indicano i periodi siderali della Terra e di Marte e τ indica il *periodo sinodico*.
È superfluo far notare l'analogia di questa con la (3).

BATTIMENTI SONORI

Una sorgente sonora si può considerare come una sorgente di impulsi che vengono emessi con un periodo caratteristico T o una data frequenza caratteristica $f = \frac{1}{T}$. Consideriamo ora, accanto alla prima, una seconda sorgente caratterizzata da un periodo T' non molto diverso da quello della prima, tanto che possiamo porre

$$T' = T - \Delta T \quad (7)$$

con $\Delta T \ll T$.

Se consideriamo due impulsi emessi simultaneamente, quelli che seguono non lo saranno, se non dopo un tempo

$$\tau = (n-1)T = n(T - \Delta T) \quad (8)$$

da cui si ricava

$$n = \frac{T}{\Delta T} \quad (9)$$

Il tempo τ dato dalla (8) è il *periodo dei battimenti*, cioè il tempo che separa due segnali emessi simultaneamente. In luogo del periodo si può dare la *frequenza dei battimenti*, cioè

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{nT'} \quad (10)$$

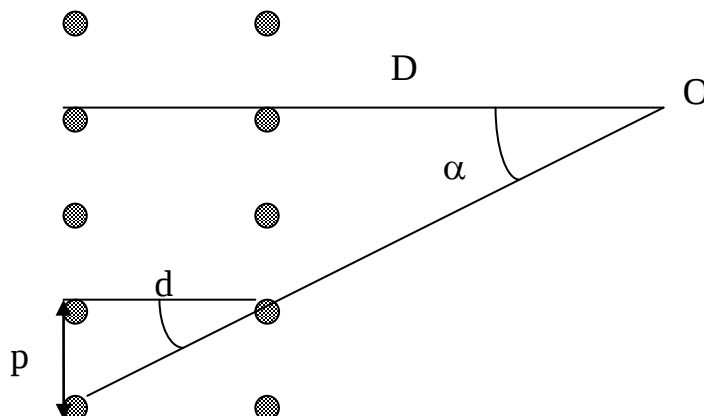
A cui, grazie alla (9) si può dare la forma

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T'} - \frac{1}{T} \quad (11)$$

equivalente alla (3) e alla (6).

FIGURE DI MOIRE' PROPRIAMENTE DETTE

Consideriamo due reticoli dotati dello stesso passo, posti, paralleli, a distanze diverse da un osservatore. In tal caso, risultano diversi i passi angolari..



Se il passo angolare del reticolo più vicino all'osservatore è $\frac{p}{D}$; quello del reticolo più lontano è

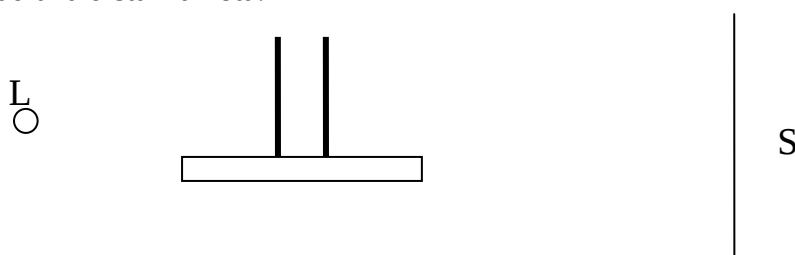
$\frac{p}{D+d}$, essendo d la separazione tra i reticoli.

L'osservatore vede le aste allineate nella direzione α tale che $\tan \alpha = \frac{d}{p}$ (12).

Questo è il passo angolare dei battimenti.

Si ricava anche che $d = \frac{D}{n-1}$ (13).

Per una dimostrazione in classe occorrono due reticoli identici (ad es. da 20 righe/cm) disposti paralleli ad una distanza nota.



Si fronte ai reticoli si dispone una lampada L e su uno schermo S si può osservare l'ombra proiettata: una successione di frange oscure la cui distanza dipende dalla distanza dei reticoli dalla lampada.

Se x è il passo delle frange, misurato sullo schermo e D la distanza dalla lampada, per la (5) sarà

$$\tan \alpha = \frac{x}{D} = \frac{d}{p} \quad (14).$$

Misurando allora, passo delle frange, distanza dello schermo dalla lampada e distanza dei reticoli, si ricava il passo p dei reticoli stessi.

Ledo Stefanini
Università di Mantova - Pavia.