

Equazioni goniometriche

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Introduzione

Definizione

Si chiama **equazione goniometrica** ogni equazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante. . .)

Introduzione

Definizione

Si chiama **equazione goniometrica** ogni equazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante. . .)

Il tema delle equazioni goniometriche è un *mare magnum* della trigonometria.

Introduzione

Definizione

Si chiama **equazione goniometrica** ogni equazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante. . .)

Il tema delle equazioni goniometriche è un *mare magnum* della trigonometria. Non è affrontabile nella sua completezza, perché esistono infiniti “casi particolari” che vanno risolti con tecniche *ad hoc*.

Introduzione

Definizione

Si chiama **equazione goniometrica** ogni equazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante. . .)

Il tema delle equazioni goniometriche è un *mare magnum* della trigonometria. Non è affrontabile nella sua completezza, perché esistono infiniti “casi particolari” che vanno risolti con tecniche *ad hoc*. In questi lucidi cercheremo di vedere le classiche tecniche risolutive delle principali famiglie di equazioni, fornendo anche qualche esempio.

Introduzione

Definizione

Si chiama **equazione goniometrica** ogni equazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante. . .)

Il tema delle equazioni goniometriche è un *mare magnum* della trigonometria. Non è affrontabile nella sua completezza, perché esistono infiniti “casi particolari” che vanno risolti con tecniche *ad hoc*.

In questi lucidi cercheremo di vedere le classiche tecniche risolutive delle principali famiglie di equazioni, fornendo anche qualche esempio.

Attenzione! La materia è ostica e forse anche un po' noiosa. Inoltre richiede una buona conoscenza della trigonometria di base (le funzioni goniometriche elementari, le formule principali ecc. ecc.)

Introduzione

Definizione

Si chiama **equazione goniometrica** ogni equazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione goniometrica (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante. . .)

Il tema delle equazioni goniometriche è un *mare magnum* della trigonometria. Non è affrontabile nella sua completezza, perché esistono infiniti “casi particolari” che vanno risolti con tecniche *ad hoc*.

In questi lucidi cercheremo di vedere le classiche tecniche risolutive delle principali famiglie di equazioni, fornendo anche qualche esempio.

Attenzione! La materia è ostica e forse anche un po' noiosa. Inoltre richiede una buona conoscenza della trigonometria di base (le funzioni goniometriche elementari, le formule principali ecc. ecc.)

Quindi preparatevi, e cercate di non cadere addormentati!

Che cosa serve per risolvere un'equazione goniometrica

Abbiamo bisogno di tre ingredienti fondamentali:

Che cosa serve per risolvere un'equazione goniometrica

Abbiamo bisogno di tre ingredienti fondamentali:

- ➊ conoscenza della trigonometria di base e delle formule relative:

Che cosa serve per risolvere un'equazione goniometrica

Abbiamo bisogno di tre ingredienti fondamentali:

- ① conoscenza della trigonometria di base e delle formule relative: non bisogna avere dubbi nell'applicare la formula di duplicazione, né spaventarsi all'idea di usare le formule di prostaferesi. . .

Che cosa serve per risolvere un'equazione goniometrica

Abbiamo bisogno di tre ingredienti fondamentali:

- ① conoscenza della trigonometria di base e delle formule relative: non bisogna avere dubbi nell'applicare la formula di duplicazione, né spaventarsi all'idea di usare le formule di prostaferesi. . .
- ② conoscenza della classificazione delle equazioni goniometriche:

Che cosa serve per risolvere un'equazione goniometrica

Abbiamo bisogno di tre ingredienti fondamentali:

- ① conoscenza della trigonometria di base e delle formule relative: non bisogna avere dubbi nell'applicare la formula di duplicazione, né spaventarsi all'idea di usare le formule di prostaferesi. . .
- ② conoscenza della classificazione delle equazioni goniometriche: come vedremo, esistono alcune grandi famiglie di equazioni (elementari, lineari in seno e coseno, omogenee di secondo grado. . .)
Bisogna imparare a classificare velocemente un'equazione nella famiglia opportuna, per applicare poi la tecnica risolutiva.

Che cosa serve per risolvere un'equazione goniometrica

Abbiamo bisogno di tre ingredienti fondamentali:

- ➊ conoscenza della trigonometria di base e delle formule relative: non bisogna avere dubbi nell'applicare la formula di duplicazione, né spaventarsi all'idea di usare le formule di prostaferesi. . .
- ➋ conoscenza della classificazione delle equazioni goniometriche: come vedremo, esistono alcune grandi famiglie di equazioni (elementari, lineari in seno e coseno, omogenee di secondo grado. . .)
Bisogna imparare a classificare velocemente un'equazione nella famiglia opportuna, per applicare poi la tecnica risolutiva.
- ➌ terzo ingrediente fondamentale: la **FANTASIA**.

Che cosa serve per risolvere un'equazione goniometrica

Abbiamo bisogno di tre ingredienti fondamentali:

- ➊ conoscenza della trigonometria di base e delle formule relative: non bisogna avere dubbi nell'applicare la formula di duplicazione, né spaventarsi all'idea di usare le formule di prostaferesi. . .
- ➋ conoscenza della classificazione delle equazioni goniometriche: come vedremo, esistono alcune grandi famiglie di equazioni (elementari, lineari in seno e coseno, omogenee di secondo grado. . .)
Bisogna imparare a classificare velocemente un'equazione nella famiglia opportuna, per applicare poi la tecnica risolutiva.
- ➌ terzo ingrediente fondamentale: la **FANTASIA**. Per capire il tipo di equazione con cui si ha a che fare, a volte bisogna applicare qualche formula trigonometrica per rimescolare un po' le carte, ma non esistono ricette specifiche. Bisogna imparare a guardare le cose da diversi punti di vista, come un fantasista nel calcio.

Che cosa serve per risolvere un'equazione goniometrica

Abbiamo bisogno di tre ingredienti fondamentali:

- 1 conoscenza della trigonometria di base e delle formule relative: non bisogna avere dubbi nell'applicare la formula di duplicazione, né spaventarsi all'idea di usare le formule di prostaferesi. . .
- 2 conoscenza della classificazione delle equazioni goniometriche: come vedremo, esistono alcune grandi famiglie di equazioni (elementari, lineari in seno e coseno, omogenee di secondo grado. . .)
Bisogna imparare a classificare velocemente un'equazione nella famiglia opportuna, per applicare poi la tecnica risolutiva.
- 3 terzo ingrediente fondamentale: la **FANTASIA**. Per capire il tipo di equazione con cui si ha a che fare, a volte bisogna applicare qualche formula trigonometrica per rimescolare un po' le carte, ma non esistono ricette specifiche. Bisogna imparare a guardare le cose da diversi punti di vista, come un fantasista nel calcio.
(E poi si dice che la matematica è una materia arida. . .)

Alcuni esempi

L'argomento di questi lucidi sarà principalmente quello del punto 2, ovvero la classificazione delle equazioni goniometriche e le relative tecniche risolutive. Vedremo in particolare due grandi famiglie di equazioni: le **equazioni elementari** e le **equazioni lineari**.

Alcuni esempi

L'argomento di questi lucidi sarà principalmente quello del punto 2, ovvero la classificazione delle equazioni goniometriche e le relative tecniche risolutive. Vedremo in particolare due grandi famiglie di equazioni: le **equazioni elementari** e le **equazioni lineari**.

Per quanto riguarda il punto 1 (la conoscenza della trigonometria), invito a fare un ripasso generale.

Alcuni esempi

L'argomento di questi lucidi sarà principalmente quello del punto 2, ovvero la classificazione delle equazioni goniometriche e le relative tecniche risolutive. Vedremo in particolare due grandi famiglie di equazioni: le **equazioni elementari** e le **equazioni lineari**.

Per quanto riguarda il punto 1 (la conoscenza della trigonometria), invito a fare un ripasso generale.

Riguardo al punto 3 (la fantasia), per ora ce la caviamo con un esempio. Consideriamo l'equazione

$$\sin x + \cos 5x = 3.$$

Alcuni esempi

L'argomento di questi lucidi sarà principalmente quello del punto 2, ovvero la classificazione delle equazioni goniometriche e le relative tecniche risolutive. Vedremo in particolare due grandi famiglie di equazioni: le **equazioni elementari** e le **equazioni lineari**.

Per quanto riguarda il punto 1 (la conoscenza della trigonometria), invito a fare un ripasso generale.

Riguardo al punto 3 (la fantasia), per ora ce la caviamo con un esempio. Consideriamo l'equazione

$$\sin x + \cos 5x = 3.$$

Senza alcun conto, ma *conoscendo* il fatto che le funzioni $\sin$ e $\cos$ restituiscono sempre valori compresi tra -1 e 1 (e qui ci si ricollega al primo punto), si può rispondere al volo che l'equazione non ammette soluzioni.

Archi notevoli

Per poter risolvere agevolmente le equazioni elementari dobbiamo conoscere bene gli archi associati ai valori noti di seno, coseno e tangente. Ripassiamone i valori per gli archi più importanti compresi tra 0° e 90° :

	0°	30°	45°	60°	90°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Archi notevoli

Per poter risolvere agevolmente le equazioni elementari dobbiamo conoscere bene gli archi associati ai valori noti di seno, coseno e tangente. Ripassiamone i valori per gli archi più importanti compresi tra 0° e 90° :

	0°	30°	45°	60°	90°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Per archi maggiori di 90° basta ricordare le formule degli archi supplementari ed esplementari.

Archi notevoli

Per poter risolvere agevolmente le equazioni elementari dobbiamo conoscere bene gli archi associati ai valori noti di seno, coseno e tangente. Ripassiamone i valori per gli archi più importanti compresi tra 0° e 90° :

	0°	30°	45°	60°	90°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Per archi maggiori di 90° basta ricordare le formule degli archi supplementari ed esplementari. Ad esempio, se vogliamo trovare l'angolo il cui coseno valga $-\frac{1}{2}$, prima osserviamo che a 60° il coseno vale $\frac{1}{2}$,

Archi notevoli

Per poter risolvere agevolmente le equazioni elementari dobbiamo conoscere bene gli archi associati ai valori noti di seno, coseno e tangente. Ripassiamone i valori per gli archi più importanti compresi tra 0° e 90° :

	0°	30°	45°	60°	90°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Per archi maggiori di 90° basta ricordare le formule degli archi supplementari ed esplementari. Ad esempio, se vogliamo trovare l'angolo il cui coseno valga $-\frac{1}{2}$, prima osserviamo che a 60° il coseno vale $\frac{1}{2}$, e poi, ricordando che $\cos(360^\circ - x) = -\cos x$, troviamo

$$-\frac{1}{2} = -\cos 60^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 300^\circ.$$

Archi notevoli

Nei casi in cui il valore di una funzione goniometrica non corrisponda a un arco noto, lo lasceremo indicato mediante la funzione inversa. Ad esempio, l'angolo il cui seno vale $\frac{1}{3}$ verrà indicato con $\arcsen \frac{1}{3}$;

Archi notevoli

Nei casi in cui il valore di una funzione goniometrica non corrisponda a un arco noto, lo lasceremo indicato mediante la funzione inversa. Ad esempio, l'angolo il cui seno vale $\frac{1}{3}$ verrà indicato con $\arcsen \frac{1}{3}$; l'angolo la cui tangente vale -3 verrà indicato (ricordando che la funzione tangente è dispari) con $-\arctg 3$.

Le equazioni elementari

Equazioni goniometriche elementari

Sono le equazioni della forma

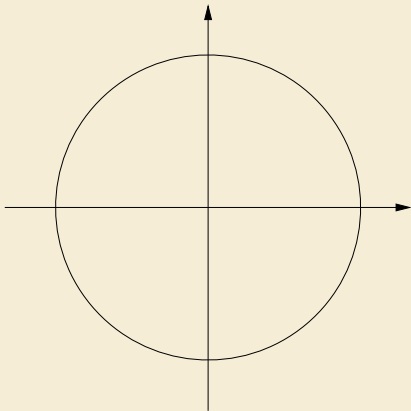
$$\boxed{\text{funzione goniometrica} = \text{numero}}$$

Le equazioni elementari

Equazioni goniometriche elementari

Sono le equazioni della forma $\text{funzione goniometrica} = \text{numero}$

Per risolvere questo tipo di equazioni, ricorriamo alla circonferenza goniometrica. Vediamo un esempio: $\sin x = \frac{1}{2}$.



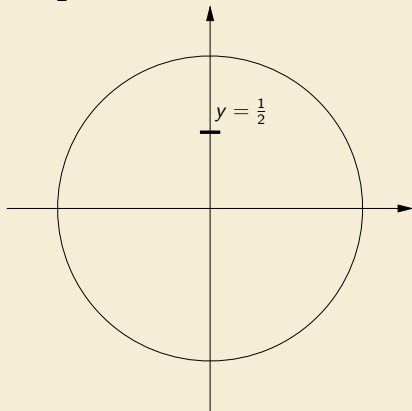
Le equazioni elementari

Equazioni goniometriche elementari

Sono le equazioni della forma $\text{funzione goniometrica} = \text{numero}$

Per risolvere questo tipo di equazioni, ricorriamo alla circonferenza goniometrica. Vediamo un esempio: $\sin x = \frac{1}{2}$.

Poiché il seno è rappresentato dall'ordinata, segniamo il punto $\frac{1}{2}$ sull'asse y .



Le equazioni elementari

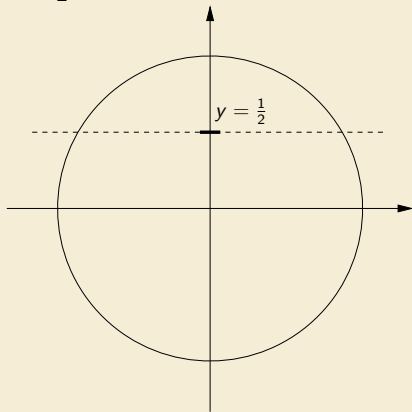
Equazioni goniometriche elementari

Sono le equazioni della forma funzione goniometrica = numero

Per risolvere questo tipo di equazioni, ricorriamo alla circonferenza goniometrica. Vediamo un esempio: $\sin x = \frac{1}{2}$.

Poiché il seno è rappresentato dall'ordinata, segniamo il punto $\frac{1}{2}$ sull'asse y .

Tracciamo poi la retta $y = \frac{1}{2}$.



Le equazioni elementari

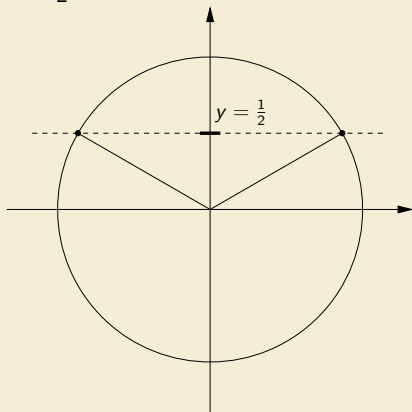
Equazioni goniometriche elementari

Sono le equazioni della forma $\text{funzione goniometrica} = \text{numero}$

Per risolvere questo tipo di equazioni, ricorriamo alla circonferenza goniometrica. Vediamo un esempio: $\sin x = \frac{1}{2}$.

Poiché il seno è rappresentato dall'ordinata, segniamo il punto $\frac{1}{2}$ sull'asse y .

Tracciamo poi la retta $y = \frac{1}{2}$.
Segniamo i punti di intersezione retta-circonferenza.



Le equazioni elementari

Equazioni goniometriche elementari

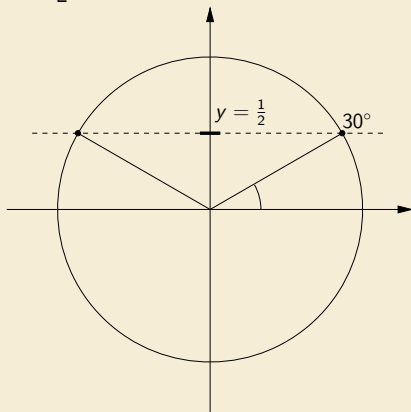
Sono le equazioni della forma $\text{funzione goniometrica} = \text{numero}$

Per risolvere questo tipo di equazioni, ricorriamo alla circonferenza goniometrica. Vediamo un esempio: $\sin x = \frac{1}{2}$.

Poiché il seno è rappresentato dall'ordinata, segniamo il punto $\frac{1}{2}$ sull'asse y .

Tracciamo poi la retta $y = \frac{1}{2}$.
Segniamo i punti di intersezione retta-circonferenza.

Troviamone gli angoli relativi.



Le equazioni elementari

Equazioni goniometriche elementari

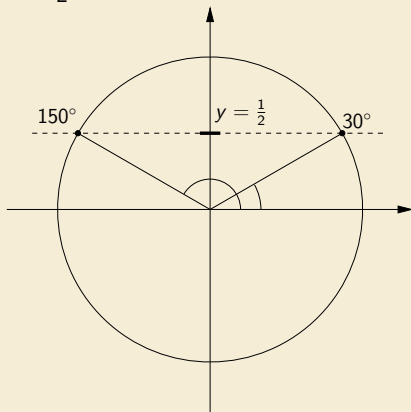
Sono le equazioni della forma $\boxed{\text{funzione goniometrica} = \text{numero}}$

Per risolvere questo tipo di equazioni, ricorriamo alla circonferenza goniometrica. Vediamo un esempio: $\sin x = \frac{1}{2}$.

Poiché il seno è rappresentato dall'ordinata, segniamo il punto $\frac{1}{2}$ sull'asse y .

Tracciamo poi la retta $y = \frac{1}{2}$.
Segniamo i punti di intersezione retta-circonferenza.

Troviamone gli angoli relativi.
(Qui ci viene in aiuto il fatto che $\frac{1}{2}$ è un valore noto per il seno.)



Le equazioni elementari

Abbiamo quindi due soluzioni: $x = 30^\circ$ e $x = 150^\circ$

Le equazioni elementari

Abbiamo quindi due soluzioni: $x = 30^\circ$ e $x = 150^\circ$
(in radianti: $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$).

Le equazioni elementari

Abbiamo quindi due soluzioni: $x = 30^\circ$ e $x = 150^\circ$

(in radianti: $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$).

In realtà, tenendo conto della periodicità della funzione seno, le soluzioni sono infinite e sono tutte e sole della forma

$$x = 30^\circ + k360^\circ, \quad x = 150^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Le equazioni elementari

Abbiamo quindi due soluzioni: $x = 30^\circ$ e $x = 150^\circ$

(in radianti: $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$).

In realtà, tenendo conto della periodicità della funzione seno, le soluzioni sono infinite e sono tutte e sole della forma

$$x = 30^\circ + k360^\circ, \quad x = 150^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(in radianti: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Le equazioni elementari

Abbiamo quindi due soluzioni: $x = 30^\circ$ e $x = 150^\circ$

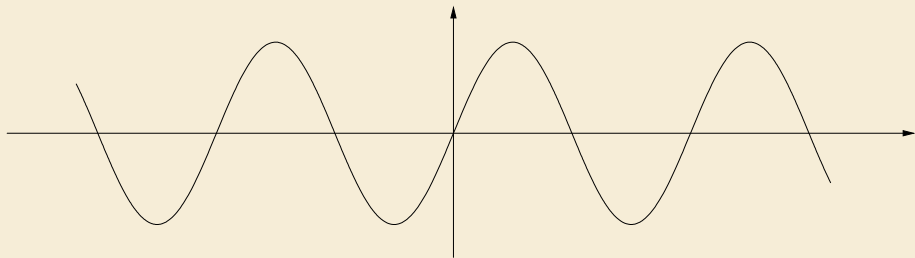
(in radianti: $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$).

In realtà, tenendo conto della periodicità della funzione seno, le soluzioni sono infinite e sono tutte e sole della forma

$$x = 30^\circ + k360^\circ, \quad x = 150^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(in radianti: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

La stessa cosa si può fare direttamente sul grafico della funzione sen:



Le equazioni elementari

Abbiamo quindi due soluzioni: $x = 30^\circ$ e $x = 150^\circ$

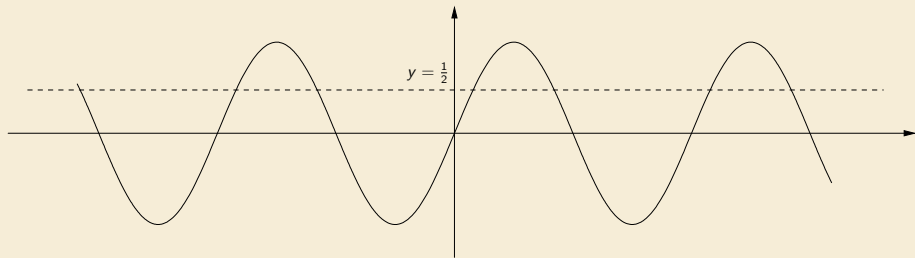
(in radianti: $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$).

In realtà, tenendo conto della periodicità della funzione seno, le soluzioni sono infinite e sono tutte e sole della forma

$$x = 30^\circ + k360^\circ, \quad x = 150^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(in radianti: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

La stessa cosa si può fare direttamente sul grafico della funzione sen:



Le equazioni elementari

Abbiamo quindi due soluzioni: $x = 30^\circ$ e $x = 150^\circ$

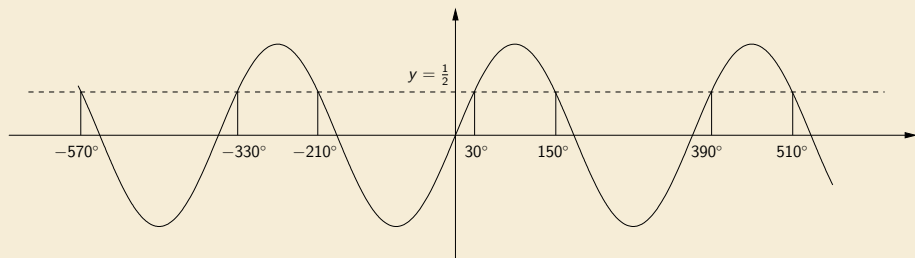
(in radianti: $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$).

In realtà, tenendo conto della periodicità della funzione seno, le soluzioni sono infinite e sono tutte e sole della forma

$$x = 30^\circ + k360^\circ, \quad x = 150^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(in radianti: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

La stessa cosa si può fare direttamente sul grafico della funzione sen:



Equazione elementare con la tangente

Vediamo un esempio con la funzione tangente:

$$\operatorname{tg}(3x) = -\sqrt{3}.$$

Equazione elementare con la tangente

Vediamo un esempio con la funzione tangente:

$$\operatorname{tg}(3x) = -\sqrt{3}.$$

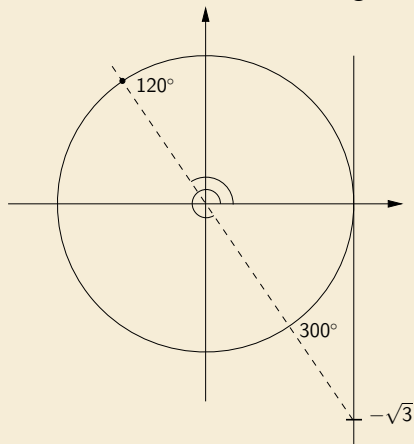
Usando sempre la circonferenza goniometrica, segniamo il valore $-\sqrt{3}$ sulla retta verticale della tangente e individuiamo gli archi associati:

Equazione elementare con la tangente

Vediamo un esempio con la funzione tangente:

$$\operatorname{tg}(3x) = -\sqrt{3}.$$

Usando sempre la circonferenza goniometrica, segniamo il valore $-\sqrt{3}$ sulla retta verticale della tangente e individuiamo gli archi associati:

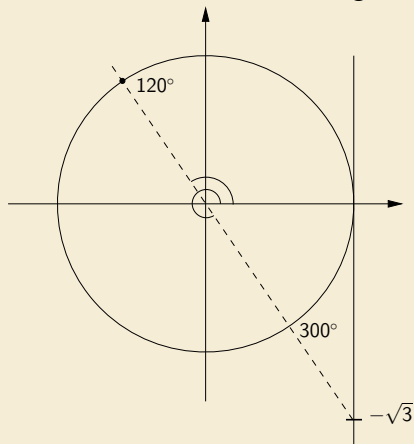


Equazione elementare con la tangente

Vediamo un esempio con la funzione tangente:

$$\operatorname{tg}(3x) = -\sqrt{3}.$$

Usando sempre la circonferenza goniometrica, segniamo il valore $-\sqrt{3}$ sulla retta verticale della tangente e individuiamo gli archi associati:



Poiché l'argomento della funzione è $3x$ e il periodo della tangente è 180° , si ha

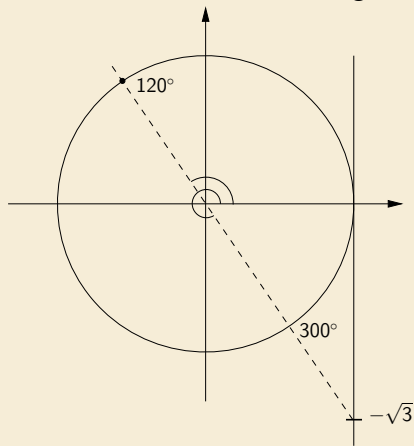
$$3x = 120^\circ + k180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Equazione elementare con la tangente

Vediamo un esempio con la funzione tangente:

$$\operatorname{tg}(3x) = -\sqrt{3}.$$

Usando sempre la circonferenza goniometrica, segniamo il valore $-\sqrt{3}$ sulla retta verticale della tangente e individuiamo gli archi associati:



Poiché l'argomento della funzione è $3x$ e il periodo della tangente è 180° , si ha

$$3x = 120^\circ + k180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

da cui

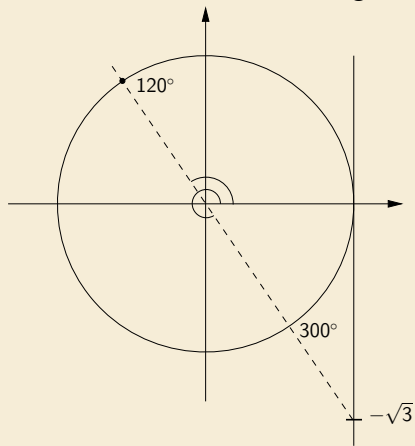
$$x = 40^\circ + k60^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Equazione elementare con la tangente

Vediamo un esempio con la funzione tangente:

$$\operatorname{tg}(3x) = -\sqrt{3}.$$

Usando sempre la circonferenza goniometrica, segniamo il valore $-\sqrt{3}$ sulla retta verticale della tangente e individuiamo gli archi associati:



Poiché l'argomento della funzione è $3x$ e il periodo della tangente è 180° , si ha

$$3x = 120^\circ + k180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

da cui

$$x = 40^\circ + k60^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\text{in rad: } x = \frac{2}{9}\pi + k\frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.)$$

Le equazioni lineari

Definizione

Si chiamano equazioni lineari (in seno e coseno) le equazioni della forma

$$a \cos x + b \sin x = c$$

dove a, b, c sono tre costanti.

Le equazioni lineari

Definizione

Si chiamano equazioni lineari (in seno e coseno) le equazioni della forma

$$a \cos x + b \sin x = c$$

dove a, b, c sono tre costanti.

Per risolvere queste equazioni si usa sempre la circonferenza goniometrica, facendo la sostituzione

$$X = \cos x, \quad Y = \sin x.$$

Le equazioni lineari

Definizione

Si chiamano equazioni lineari (in seno e coseno) le equazioni della forma

$$a \cos x + b \sin x = c$$

dove a, b, c sono tre costanti.

Per risolvere queste equazioni si usa sempre la circonferenza goniometrica, facendo la sostituzione

$$X = \cos x, \quad Y = \sin x.$$

In questo modo si ottiene il sistema di intersezione retta-circonferenza:

$$\begin{cases} aX + bY = c \\ X^2 + Y^2 = 1, \end{cases}$$

dove la seconda equazione è quella della circonferenza goniometrica, e rappresenta la relazione fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Le equazioni lineari

Risolvendo il sistema si ottengono al più due punti sulla circonferenza goniometrica, che corrispondono agli angoli soluzione dell'equazione. Tali angoli andranno poi presi con la loro periodicità.

Le equazioni lineari

Risolvendo il sistema si ottengono al più due punti sulla circonferenza goniometrica, che corrispondono agli angoli soluzione dell'equazione.

Tali angoli andranno poi presi con la loro periodicità.

Vediamo un esempio:

$$\cos x + \sin x = 1.$$

Le equazioni lineari

Risolvendo il sistema si ottengono al più due punti sulla circonferenza goniometrica, che corrispondono agli angoli soluzione dell'equazione.

Tali angoli andranno poi presi con la loro periodicità.

Vediamo un esempio:

$$\cos x + \sin x = 1.$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} X + Y = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1; \end{cases}$$

per sostituzione si ha $Y = 1 - X$, da cui $2X^2 - 2X = 0$, quindi le soluzioni sono $X = 0, Y = 1$ e $X = 1, Y = 0$.

Le equazioni lineari

Quindi le soluzioni sono

$$x = k360^\circ, \quad x = 90^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z},$$

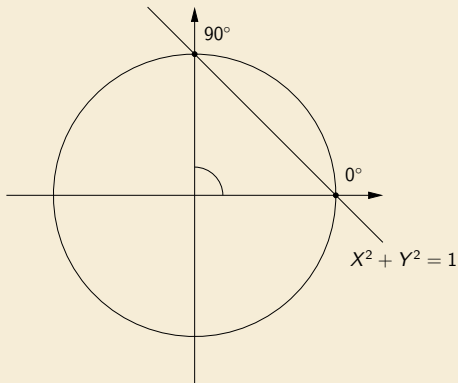
come si può vedere anche facendo un disegno:

Le equazioni lineari

Quindi le soluzioni sono

$$x = k360^\circ, \quad x = 90^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z},$$

come si può vedere anche facendo un disegno:



L'angolo ausiliario

Esiste un secondo metodo per risolvere le equazioni lineari, puramente algebrico, detto **metodo dell'angolo ausiliario**.

L'angolo ausiliario

Esiste un secondo metodo per risolvere le equazioni lineari, puramente algebrico, detto **metodo dell'angolo ausiliario**.

Consideriamo l'equazione lineare generale

$$a \cos x + b \sin x = c$$

L'angolo ausiliario

Esiste un secondo metodo per risolvere le equazioni lineari, puramente algebrico, detto **metodo dell'angolo ausiliario**.

Consideriamo l'equazione lineare generale

$$a \cos x + b \sin x = c$$

Innanzitutto bisogna “normalizzare” l'equazione, dividendo a sinistra e a destra per $\sqrt{a^2 + b^2}$, ottenendo

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

L'angolo ausiliario

Esiste un secondo metodo per risolvere le equazioni lineari, puramente algebrico, detto **metodo dell'angolo ausiliario**.

Consideriamo l'equazione lineare generale

$$a \cos x + b \sin x = c$$

Innanzitutto bisogna “normalizzare” l'equazione, dividendo a sinistra e a destra per $\sqrt{a^2 + b^2}$, ottenendo

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

In questo modo i coefficienti delle funzioni cos e sen sono numeri compresi tra -1 e 1 .

L'angolo ausiliario

Esiste un secondo metodo per risolvere le equazioni lineari, puramente algebrico, detto **metodo dell'angolo ausiliario**.

Consideriamo l'equazione lineare generale

$$a \cos x + b \sin x = c$$

Innanzitutto bisogna “normalizzare” l'equazione, dividendo a sinistra e a destra per $\sqrt{a^2 + b^2}$, ottenendo

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

In questo modo i coefficienti delle funzioni $\cos$ e $\sin$ sono numeri compresi tra -1 e 1 .

Poi si cerca quell'angolo ϕ (l'angolo ausiliario) che verifica

$$\sin \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

L'angolo ausiliario

A questo punto l'equazione si può riscrivere come

$$\sin \phi \cos x + \cos \phi \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Grazie alla formula di addizione del seno, tale equazione diventa l'equazione elementare

$$\sin(x + \phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

che può essere risolta con i metodi visti prima.

Esempio con l'angolo ausiliario

Riprendiamo l'equazione

$$\cos x + \sin x = 1,$$

che riscriviamo come

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Esempio con l'angolo ausiliario

Riprendiamo l'equazione

$$\cos x + \sin x = 1,$$

che riscriviamo come

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Risolvendo

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

si ha subito $\phi = 45^\circ$,

Esempio con l'angolo ausiliario

Riprendiamo l'equazione

$$\cos x + \sin x = 1,$$

che riscriviamo come

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Risolvendo

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

si ha subito $\phi = 45^\circ$, per cui l'equazione diventa

$$\sin(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esempio con l'angolo ausiliario

Risolviamo quindi l'equazione elementare

$$\operatorname{sen}(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esempio con l'angolo ausiliario

Risolviamo quindi l'equazione elementare

$$\operatorname{sen}(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

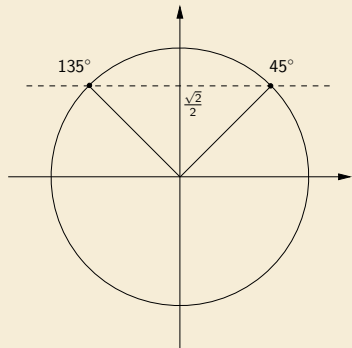
Facendo velocemente un disegno abbiamo

Esempio con l'angolo ausiliario

Risoliamo quindi l'equazione elementare

$$\sin(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Facendo velocemente un disegno abbiamo

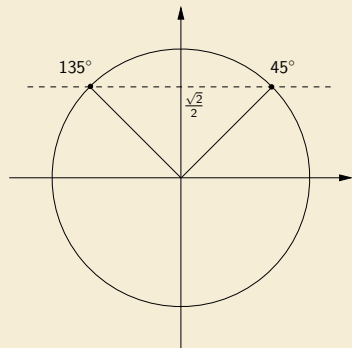


Esempio con l'angolo ausiliario

Risoliamo quindi l'equazione elementare

$$\sin(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Facendo velocemente un disegno abbiamo



da cui

$$x + 45^\circ = 45^\circ + k360^\circ,$$

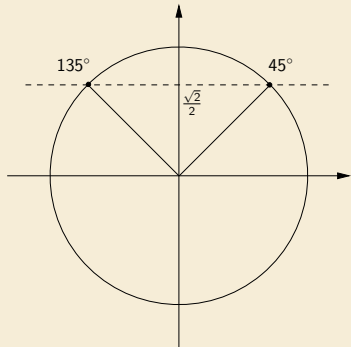
$$x + 45^\circ = 135^\circ + k360^\circ$$

Esempio con l'angolo ausiliario

Risoliamo quindi l'equazione elementare

$$\sin(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Facendo velocemente un disegno abbiamo



da cui

$$x + 45^\circ = 45^\circ + k360^\circ,$$

$$x + 45^\circ = 135^\circ + k360^\circ$$

e ritroviamo

$$x = k360^\circ, \quad x = 90^\circ + k360^\circ.$$

Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

I metodi che vedremo d'ora in poi per risolvere le equazioni goniometriche sono basati essenzialmente su tecniche per ricondurle a una delle due famiglie precedenti, ovvero le equazioni elementari e quelle lineari

Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

I metodi che vedremo d'ora in poi per risolvere le equazioni goniometriche sono basati essenzialmente su tecniche per ricondurle a una delle due famiglie precedenti, ovvero le equazioni elementari e quelle lineari (per dirla tutta, anche il metodo dell'angolo ausiliario per le equazioni lineari è un modo per ricondurre tali equazioni a quelle elementari).

Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

I metodi che vedremo d'ora in poi per risolvere le equazioni goniometriche sono basati essenzialmente su tecniche per ricondurle a una delle due famiglie precedenti, ovvero le equazioni elementari e quelle lineari (per dirla tutta, anche il metodo dell'angolo ausiliario per le equazioni lineari è un modo per ricondurre tali equazioni a quelle elementari).

Un primo esempio di questo tipo è l'equazione

$$2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0,$$

in cui compare solo la funzione $\operatorname{sen} x$.

Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

I metodi che vedremo d'ora in poi per risolvere le equazioni goniometriche sono basati essenzialmente su tecniche per ricondurle a una delle due famiglie precedenti, ovvero le equazioni elementari e quelle lineari (per dirla tutta, anche il metodo dell'angolo ausiliario per le equazioni lineari è un modo per ricondurre tali equazioni a quelle elementari).

Un primo esempio di questo tipo è l'equazione

$$2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0,$$

in cui compare solo la funzione $\operatorname{sen} x$. Con l'ovvia sostituzione $z = \operatorname{sen} x$ si ottiene

$$2z^2 - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1 \pm 3}{4},$$

Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

I metodi che vedremo d'ora in poi per risolvere le equazioni goniometriche sono basati essenzialmente su tecniche per ricondurle a una delle due famiglie precedenti, ovvero le equazioni elementari e quelle lineari (per dirla tutta, anche il metodo dell'angolo ausiliario per le equazioni lineari è un modo per ricondurre tali equazioni a quelle elementari).

Un primo esempio di questo tipo è l'equazione

$$2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0,$$

in cui compare solo la funzione $\operatorname{sen} x$. Con l'ovvia sostituzione $z = \operatorname{sen} x$ si ottiene

$$2z^2 - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1 \pm 3}{4},$$

da cui si trovano le due equazioni elementari

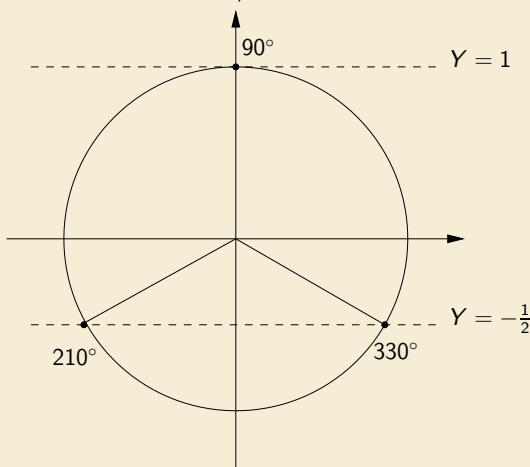
$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen} x = 1.$$

Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

Risolvendo queste due equazioni (facciamo direttamente il disegno) e ricordando che per la funzione seno l'arco associato a $\frac{1}{2}$ è 30° e l'arco associato a 1 è 90° , si ottiene

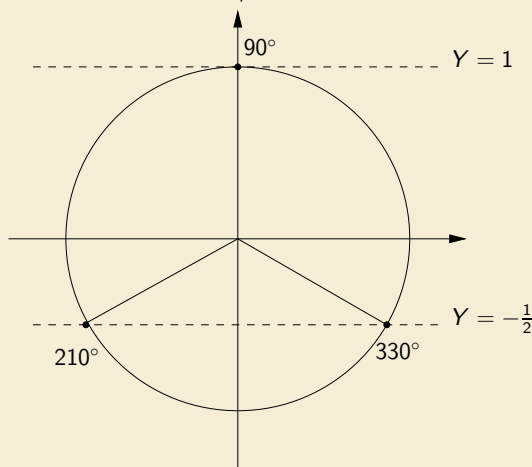
Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

Risolviendo queste due equazioni (facciamo direttamente il disegno) e ricordando che per la funzione seno l'arco associato a $\frac{1}{2}$ è 30° e l'arco associato a 1 è 90° , si ottiene



Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

Risolviendo queste due equazioni (facciamo direttamente il disegno) e ricordando che per la funzione seno l'arco associato a $\frac{1}{2}$ è 30° e l'arco associato a 1 è 90° , si ottiene



quindi le soluzioni sono

$$x = 90^\circ + k360^\circ,$$

$$x = 210^\circ + k360^\circ,$$

$$x = 330^\circ + k360^\circ.$$

Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

Un esempio un po' più sofisticato è l'equazione

$$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0.$$

Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

Un esempio un po' più sofisticato è l'equazione

$$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0.$$

In questo caso si può applicare il prodotto notevole della scomposizione della somma di cubi (somma delle basi per “falso quadrato”) ottenendo

Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

Un esempio un po' più sofisticato è l'equazione

$$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0.$$

In questo caso si può applicare il prodotto notevole della scomposizione della somma di cubi (somma delle basi per “falso quadrato”) ottenendo

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) = 0.$$

Poiché il falso quadrato non si annulla mai, si ottiene l'equazione lineare

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 0,$$

Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

Un esempio un po' più sofisticato è l'equazione

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 0.$$

In questo caso si può applicare il prodotto notevole della scomposizione della somma di cubi (somma delle basi per “falso quadrato”) ottenendo

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 0.$$

Poiché il falso quadrato non si annulla mai, si ottiene l'equazione lineare

$$\sin x + \cos x = 0,$$

che si può anche risolvere velocemente dividendo tutto per $\cos x$ e ottenendo l'equazione elementare

$$\operatorname{tg} x = -1,$$

Equazioni riconducibili a una sola funzione goniometrica

Un esempio un po' più sofisticato è l'equazione

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 0.$$

In questo caso si può applicare il prodotto notevole della scomposizione della somma di cubi (somma delle basi per “falso quadrato”) ottenendo

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 0.$$

Poiché il falso quadrato non si annulla mai, si ottiene l'equazione lineare

$$\sin x + \cos x = 0,$$

che si può anche risolvere velocemente dividendo tutto per $\cos x$ e ottenendo l'equazione elementare

$$\operatorname{tg} x = -1,$$

da cui $x = 135^\circ + k180^\circ$.

Equazioni omogenee in seno e coseno

Definizione

Si chiamano **equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno** le equazioni goniometriche che siano polinomi omogenei di secondo grado in seno e coseno.

Equazioni omogenee in seno e coseno

Definizione

Si chiamano **equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno** le equazioni goniometriche che siano polinomi omogenei di secondo grado in seno e coseno.

Ad esempio, è un'equazione omogenea di secondo grado la seguente:

$$\sin^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 0.$$

Equazioni omogenee in seno e coseno

Definizione

Si chiamano **equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno** le equazioni goniometriche che siano polinomi omogenei di secondo grado in seno e coseno.

Ad esempio, è un'equazione omogenea di secondo grado la seguente:

$$\sin^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 0.$$

Anche l'equazione

$$\sin^2 x + \frac{1}{2} = 2 \sin x \cos x$$

si riconduce immediatamente a una omogenea di secondo grado, anche se contiene il termine noto $\frac{1}{2}$:

Equazioni omogenee in seno e coseno

Definizione

Si chiamano **equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno** le equazioni goniometriche che siano polinomi omogenei di secondo grado in seno e coseno.

Ad esempio, è un'equazione omogenea di secondo grado la seguente:

$$\sin^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 0.$$

Anche l'equazione

$$\sin^2 x + \frac{1}{2} = 2 \sin x \cos x$$

si riconduce immediatamente a una omogenea di secondo grado, anche se contiene il termine noto $\frac{1}{2}$: basta moltiplicare tale termine per la quantità $\sin^2 x + \cos^2 x$ (che tanto è uguale a 1), e si ottiene l'equazione omogenea

$$\frac{3}{2} \sin^2 x + \frac{1}{2} \cos^2 x = 2 \sin x \cos x.$$

Equazioni omogenee in seno e coseno

Le equazioni omogenee di secondo grado si risolvono dividendo tutto per $\cos^2 x$, ottenendo così un'equazione nella sola funzione $\operatorname{tg} x$.

Equazioni omogenee in seno e coseno

Le equazioni omogenee di secondo grado si risolvono dividendo tutto per $\cos^2 x$, ottenendo così un'equazione nella sola funzione $\operatorname{tg} x$.

Consideriamo il primo esempio del lucido precedente:

$$\operatorname{sen}^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0.$$

Equazioni omogenee in seno e coseno

Le equazioni omogenee di secondo grado si risolvono dividendo tutto per $\cos^2 x$, ottenendo così un'equazione nella sola funzione $\operatorname{tg} x$.

Consideriamo il primo esempio del lucido precedente:

$$\operatorname{sen}^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0.$$

Dividendo tutto per $\cos^2 x$ otteniamo

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 + 2 \operatorname{tg} x = 0$$

che è una equazione nella sola funzione $\operatorname{tg} x$.

Equazioni omogenee in seno e coseno

Le equazioni omogenee di secondo grado si risolvono dividendo tutto per $\cos^2 x$, ottenendo così un'equazione nella sola funzione $\operatorname{tg} x$.

Consideriamo il primo esempio del lucido precedente:

$$\operatorname{sen}^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0.$$

Dividendo tutto per $\cos^2 x$ otteniamo

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 + 2 \operatorname{tg} x = 0$$

che è una equazione nella sola funzione $\operatorname{tg} x$. Ponendo $z = \operatorname{tg} x$ otteniamo l'equazione di secondo grado

$$z^2 + 2z - 3 = 0$$

che ha soluzioni $z = -3$ e $z = 1$.

Equazioni omogenee in seno e coseno

Le equazioni omogenee di secondo grado si risolvono dividendo tutto per $\cos^2 x$, ottenendo così un'equazione nella sola funzione $\operatorname{tg} x$.

Consideriamo il primo esempio del lucido precedente:

$$\operatorname{sen}^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0.$$

Dividendo tutto per $\cos^2 x$ otteniamo

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 + 2 \operatorname{tg} x = 0$$

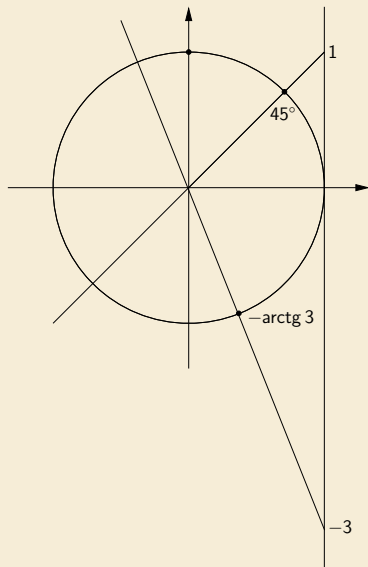
che è una equazione nella sola funzione $\operatorname{tg} x$. Ponendo $z = \operatorname{tg} x$ otteniamo l'equazione di secondo grado

$$z^2 + 2z - 3 = 0$$

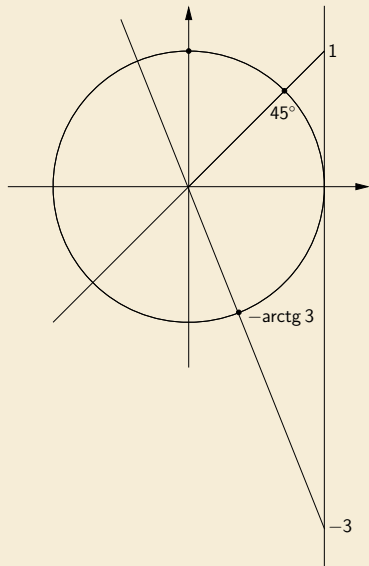
che ha soluzioni $z = -3$ e $z = 1$. Quindi dobbiamo risolvere le equazioni elementari

$$\operatorname{tg} x = -3, \quad \operatorname{tg} x = 1.$$

Equazioni omogenee in seno e coseno



Equazioni omogenee in seno e coseno



Poiché l'arco associato a 1 per la funzione tangente vale 45° , mentre l'arco associato a 3 non è noto (e dunque lasceremo scritto $\arctg 3$), si hanno le soluzioni

$$x = 45^\circ + k180^\circ,$$
$$x = -\arctg 3 + k180^\circ.$$

Ultima spiaggia

Per finire, esiste un metodo da applicare quando abbiamo abbandonato tutte le speranze. . .

Ultima spiaggia

Per finire, esiste un metodo da applicare quando abbiamo abbandonato tutte le speranze. . . e non è quello di chiudere il quaderno e andarsene a fare qualcos'altro!

Ultima spiaggia

Per finire, esiste un metodo da applicare quando abbiamo abbandonato tutte le speranze... **e non è quello di chiudere il quaderno e andarsene a fare qualcos'altro!**

Si tratta di usare le cosiddette **formule parametriche**, ovvero, ponendo $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

In questo modo possiamo ricondurre ogni equazione goniometrica (in cui compaia lo stesso angolo x in tutte le funzioni) a un'equazione polinomiale che, almeno in linea di principio, dovremmo saper risolvere mediante le solite scomposizioni, prodotti notevoli ecc. ecc.

Ultima spiaggia

Per finire, esiste un metodo da applicare quando abbiamo abbandonato tutte le speranze... **e non è quello di chiudere il quaderno e andarsene a fare qualcos'altro!**

Si tratta di usare le cosiddette **formule parametriche**, ovvero, ponendo $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

In questo modo possiamo ricondurre ogni equazione goniometrica (in cui compaia lo stesso angolo x in tutte le funzioni) a un'equazione polinomiale che, almeno in linea di principio, dovremmo saper risolvere mediante le solite scomposizioni, prodotti notevoli ecc. ecc.

Ciò che rende sconsigliabile questa tecnica, e che la relega a ruolo di ultima spiaggia, è che anche nelle situazioni più semplici si ottengono equazioni polinomiali di grado elevato, che in generale è molto difficile, se non impossibile, risolvere.

Formule parametriche

Ad esempio, consideriamo l'equazione

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4}.$$

Formule parametriche

Ad esempio, consideriamo l'equazione

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4}.$$

Se l'affrontiamo con le formule parametriche otteniamo

$$\frac{2t}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{4}$$

Formule parametriche

Ad esempio, consideriamo l'equazione

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4}.$$

Se l'affrontiamo con le formule parametriche otteniamo

$$\frac{2t}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 8t(1-t^2) = (1+t^2)^2,$$

che è un'equazione di **quarto grado!**

Formule parametriche

Ad esempio, consideriamo l'equazione

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4}.$$

Se l'affrontiamo con le formule parametriche otteniamo

$$\frac{2t}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 8t(1-t^2) = (1+t^2)^2,$$

che è un'equazione di **quarto grado!** Riordinando otteniamo

$$t^4 + 8t^3 + 2t^2 - 8t + 1 = 0$$

che però è parecchio difficile da risolvere!

Formule parametriche

Ad esempio, consideriamo l'equazione

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4}.$$

Se l'affrontiamo con le formule parametriche otteniamo

$$\frac{2t}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 8t(1-t^2) = (1+t^2)^2,$$

che è un'equazione di **quarto grado!** Riordinando otteniamo

$$t^4 + 8t^3 + 2t^2 - 8t + 1 = 0$$

che però è parecchio difficile da risolvere!

Con l'uso di una calcolatore (e del programma Maxima) si trova

$$t_{1,2} = -2 + \sqrt{6} \pm \frac{\sqrt{5\sqrt{6}-12}}{\sqrt[4]{6}}, \quad t_{3,4} = -2 - \sqrt{6} \pm \frac{\sqrt{5\sqrt{6}+12}}{\sqrt[4]{6}},$$

e poi dovremmo ancora risolvere $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$!

Formule parametriche

L'equazione di partenza

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

è invece molto più semplice: può essere affrontata ad esempio come una omogenea di secondo grado, oppure ancora più semplicemente applicando la formula di duplicazione del seno (al contrario) ottenendo

$$\frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin 2x = \frac{1}{2}$$

da cui vengono subito le soluzioni

$$2x = 30^\circ + k360^\circ, \quad 2x = 150^\circ + k360^\circ$$

ovvero

$$x = 15^\circ + k180^\circ, \quad x = 75^\circ + k180^\circ.$$