

Una introduzione alle equazioni differenziali

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

Equazioni differenziali e modelli matematici

Le **equazioni differenziali** sono una delle vette più alte raggiunte dalla matematica moderna. Esse sono state introdotte per risolvere problemi della fisica, come trovare le orbite dei pianeti o la forma di una catena appesa ai due estremi, ma si sono presto propagate a tanti altri ambiti tra cui, più recentemente, l'economia, la biologia, e persino la psicologia.

Equazioni differenziali e modelli matematici

Le **equazioni differenziali** sono una delle vette più alte raggiunte dalla matematica moderna. Esse sono state introdotte per risolvere problemi della fisica, come trovare le orbite dei pianeti o la forma di una catena appesa ai due estremi, ma si sono presto propagate a tanti altri ambiti tra cui, più recentemente, l'economia, la biologia, e persino la psicologia.

Attualmente, le equazioni differenziali stanno alla base della maggior parte dei *modelli matematici*, che vengono introdotti per studiare e controllare alcuni fenomeni della realtà.

Equazioni differenziali e modelli matematici

Le **equazioni differenziali** sono una delle vette più alte raggiunte dalla matematica moderna. Esse sono state introdotte per risolvere problemi della fisica, come trovare le orbite dei pianeti o la forma di una catena appesa ai due estremi, ma si sono presto propagate a tanti altri ambiti tra cui, più recentemente, l'economia, la biologia, e persino la psicologia.

Attualmente, le equazioni differenziali stanno alla base della maggior parte dei *modelli matematici*, che vengono introdotti per studiare e controllare alcuni fenomeni della realtà.

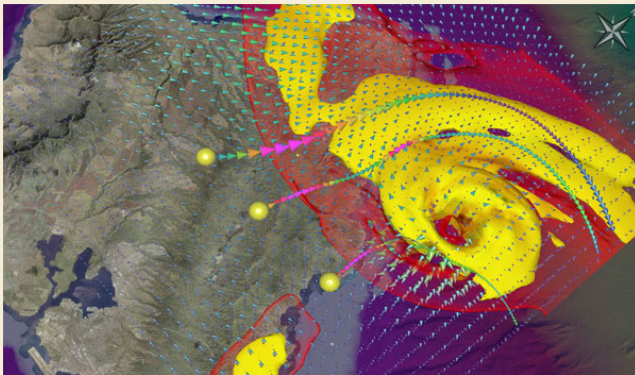
Ad esempio, per costruire un modello matematico in ambito economico, che descriva come varia il prezzo di un bene in funzione della domanda e dell'offerta di quel bene, si cercheranno di trovare delle equazioni differenziali che legano tra loro il prezzo, la domanda e l'offerta, e si andranno poi a risolvere queste equazioni.

Equazioni differenziali e modelli matematici

Anche le simulazioni al calcolatore, quelle ad esempio che disegnano il moto di un fluido o che descrivono l'evoluzione di una perturbazione meteorologica, sono basate su equazioni differenziali, che vengono risolte (anche se solo in modo approssimato) con l'aiuto del computer.

Equazioni differenziali e modelli matematici

Anche le simulazioni al calcolatore, quelle ad esempio che disegnano il moto di un fluido o che descrivono l'evoluzione di una perturbazione meteorologica, sono basate su equazioni differenziali, che vengono risolte (anche se solo in modo approssimato) con l'aiuto del computer.



Cos'è un'equazione differenziale?

Un aspetto difficile delle equazioni differenziali è che l'incognita dell'equazione non è più un numero, come capita nelle equazioni che abbiamo incontrato finora nel nostro percorso scolastico; ora l'incognita è tutta una *funzione*!

Cos'è un'equazione differenziale?

Un aspetto difficile delle equazioni differenziali è che l'incognita dell'equazione non è più un numero, come capita nelle equazioni che abbiamo incontrato finora nel nostro percorso scolastico; ora l'incognita è tutta una *funzione*!

Un'equazione differenziale infatti stabilisce certe relazioni tra una funzione incognita e le derivate della funzione stessa.

Cos'è un'equazione differenziale?

Un aspetto difficile delle equazioni differenziali è che l'incognita dell'equazione non è più un numero, come capita nelle equazioni che abbiamo incontrato finora nel nostro percorso scolastico; ora l'incognita è tutta una *funzione*!

Un'equazione differenziale infatti stabilisce certe relazioni tra una funzione incognita e le derivate della funzione stessa.

Per *formulare* un'equazione differenziale è sufficiente conoscere il concetto di funzione e di derivata di una funzione.

Cos'è un'equazione differenziale?

Un aspetto difficile delle equazioni differenziali è che l'incognita dell'equazione non è più un numero, come capita nelle equazioni che abbiamo incontrato finora nel nostro percorso scolastico; ora l'incognita è tutta una *funzione*!

Un'equazione differenziale infatti stabilisce certe relazioni tra una funzione incognita e le derivate della funzione stessa.

Per *formulare* un'equazione differenziale è sufficiente conoscere il concetto di funzione e di derivata di una funzione.

Per *risolvere* un'equazione differenziale, bisogna invece padroneggiare molto bene il calcolo integrale, e anche avere molta fantasia...

Cos'è un'equazione differenziale?

Un aspetto difficile delle equazioni differenziali è che l'incognita dell'equazione non è più un numero, come capita nelle equazioni che abbiamo incontrato finora nel nostro percorso scolastico; ora l'incognita è tutta una *funzione*!

Un'equazione differenziale infatti stabilisce certe relazioni tra una funzione incognita e le derivate della funzione stessa.

Per *formulare* un'equazione differenziale è sufficiente conoscere il concetto di funzione e di derivata di una funzione.

Per *risolvere* un'equazione differenziale, bisogna invece padroneggiare molto bene il calcolo integrale, e anche avere molta fantasia...

Tante equazioni differenziali, infatti, sono molto difficili da risolvere, parecchie richiedono dei metodi molto specifici e per alcune bisogna per forza accontentarsi di una soluzione *approssimata*.

Primo esempio

Un primo esempio semplice è il seguente:

$$y'(x) = y(x).$$

Primo esempio

Un primo esempio semplice è il seguente:

$$y'(x) = y(x).$$

Ci si sta chiedendo:

Quali sono quelle funzioni che coincidono con la loro derivata prima?

Primo esempio

Un primo esempio semplice è il seguente:

$$y'(x) = y(x).$$

Ci si sta chiedendo:

Quali sono quelle funzioni che coincidono con la loro derivata prima?

Se non è passato troppo tempo dallo studio delle derivate, dovremmo ricordarci che la derivata dell'esponenziale e^x è ancora e^x , quindi

$$y(x) = e^x$$

è una soluzione dell'equazione differenziale.

Primo esempio

Siamo sicuri che ci sia solo quella? Se andiamo a sfogliare il libro e a controllare la tabella delle derivate, non troviamo altre funzioni che coincidano con loro stesse quando vengono derivate.

Primo esempio

Siamo sicuri che ci sia solo quella? Se andiamo a sfogliare il libro e a controllare la tabella delle derivate, non troviamo altre funzioni che coincidano con loro stesse quando vengono derivate.

Ma a pensarci bene, anche la funzione nulla $y(x) = 0$ soddisfa l'equazione, poiché la sua derivata è ancora la funzione nulla.

Primo esempio

Siamo sicuri che ci sia solo quella? Se andiamo a sfogliare il libro e a controllare la tabella delle derivate, non troviamo altre funzioni che coincidano con loro stesse quando vengono derivate.

Ma a pensarci bene, anche la funzione nulla $y(x) = 0$ soddisfa l'equazione, poiché la sua derivata è ancora la funzione nulla.

Ci accorgiamo, inoltre, che pure la funzione $2e^x$, se derivata, restituisce di nuovo $2e^x$.

Primo esempio

Siamo sicuri che ci sia solo quella? Se andiamo a sfogliare il libro e a controllare la tabella delle derivate, non troviamo altre funzioni che coincidano con loro stesse quando vengono derivate.

Ma a pensarci bene, anche la funzione nulla $y(x) = 0$ soddisfa l'equazione, poiché la sua derivata è ancora la funzione nulla.

Ci accorgiamo, inoltre, che pure la funzione $2e^x$, se derivata, restituisce di nuovo $2e^x$.

E questo capita anche se al posto del 2 c'è una qualsiasi altra costante.

Primo esempio

Siamo sicuri che ci sia solo quella? Se andiamo a sfogliare il libro e a controllare la tabella delle derivate, non troviamo altre funzioni che coincidano con loro stesse quando vengono derivate.

Ma a pensarci bene, anche la funzione nulla $y(x) = 0$ soddisfa l'equazione, poiché la sua derivata è ancora la funzione nulla.

Ci accorgiamo, inoltre, che pure la funzione $2e^x$, se derivata, restituisce di nuovo $2e^x$.

E questo capita anche se al posto del 2 c'è una qualsiasi altra costante. Quindi abbiamo trovato tutta una famiglia di soluzioni:

$$y(x) = ke^x, \quad k \in \mathbb{R}$$

Primo esempio

Siamo sicuri che ci sia solo quella? Se andiamo a sfogliare il libro e a controllare la tabella delle derivate, non troviamo altre funzioni che coincidano con loro stesse quando vengono derivate.

Ma a pensarci bene, anche la funzione nulla $y(x) = 0$ soddisfa l'equazione, poiché la sua derivata è ancora la funzione nulla.

Ci accorgiamo, inoltre, che pure la funzione $2e^x$, se derivata, restituisce di nuovo $2e^x$.

E questo capita anche se al posto del 2 c'è una qualsiasi altra costante. Quindi abbiamo trovato tutta una famiglia di soluzioni:

$$y(x) = ke^x, \quad k \in \mathbb{R}$$

(il caso della funzione nulla è dato da $k = 0$).

Primo esempio

Siamo sicuri che ci sia solo quella? Se andiamo a sfogliare il libro e a controllare la tabella delle derivate, non troviamo altre funzioni che coincidano con loro stesse quando vengono derivate.

Ma a pensarci bene, anche la funzione nulla $y(x) = 0$ soddisfa l'equazione, poiché la sua derivata è ancora la funzione nulla.

Ci accorgiamo, inoltre, che pure la funzione $2e^x$, se derivata, restituisce di nuovo $2e^x$.

E questo capita anche se al posto del 2 c'è una qualsiasi altra costante. Quindi abbiamo trovato tutta una famiglia di soluzioni:

$$y(x) = ke^x, \quad k \in \mathbb{R}$$

(il caso della funzione nulla è dato da $k = 0$).

Impareremo fra poco che queste sono le sole soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) = y(x)$. Non ce ne sono altre.

Tante soluzioni

Abbiamo imparato dall'esempio precedente che un'equazione differenziale ammette tante soluzioni.

Tante soluzioni

Abbiamo imparato dall'esempio precedente che un'equazione differenziale ammette tante soluzioni.

Questo fatto non dovrebbe sorprenderci più di tanto, se ricordiamo che la *primitiva* di una funzione contiene sempre una costante arbitraria: questa costante rimane anche nella soluzione delle equazioni differenziali (che in generale coinvolge il calcolo di qualche primitiva).

Tante soluzioni

Abbiamo imparato dall'esempio precedente che un'equazione differenziale ammette tante soluzioni.

Questo fatto non dovrebbe sorprenderci più di tanto, se ricordiamo che la *primitiva* di una funzione contiene sempre una costante arbitraria: questa costante rimane anche nella soluzione delle equazioni differenziali (che in generale coinvolge il calcolo di qualche primitiva).

Un esempio ancora più semplice è il seguente:

$$y'(x) = 2x,$$

ovvero vogliamo trovare quella funzione la cui derivata è $2x$.

Tante soluzioni

Abbiamo imparato dall'esempio precedente che un'equazione differenziale ammette tante soluzioni.

Questo fatto non dovrebbe sorprenderci più di tanto, se ricordiamo che la *primitiva* di una funzione contiene sempre una costante arbitraria: questa costante rimane anche nella soluzione delle equazioni differenziali (che in generale coinvolge il calcolo di qualche primitiva).

Un esempio ancora più semplice è il seguente:

$$y'(x) = 2x,$$

ovvero vogliamo trovare quella funzione la cui derivata è $2x$.

Per far questo basta trovare la primitiva di $2x$, che come tutti ricorderanno è $y = x^2$, e ricordarsi di aggiungere la costante additiva.

Tante soluzioni

Abbiamo imparato dall'esempio precedente che un'equazione differenziale ammette tante soluzioni.

Questo fatto non dovrebbe sorprenderci più di tanto, se ricordiamo che la *primitiva* di una funzione contiene sempre una costante arbitraria: questa costante rimane anche nella soluzione delle equazioni differenziali (che in generale coinvolge il calcolo di qualche primitiva).

Un esempio ancora più semplice è il seguente:

$$y'(x) = 2x,$$

ovvero vogliamo trovare quella funzione la cui derivata è $2x$.

Per far questo basta trovare la primitiva di $2x$, che come tutti ricorderanno è $y = x^2$, e ricordarsi di aggiungere la costante additiva.

Quindi le soluzioni sono le funzioni

$$y(x) = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Un esempio più difficile

Vediamo un esempio più difficile del precedente: l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{1}{y(x)} \quad y(x) \neq 0.$$

Un esempio più difficile

Vediamo un esempio più difficile del precedente: l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{1}{y(x)} \quad y(x) \neq 0.$$

Stavolta vogliamo trovare le funzioni la cui derivata sia il reciproco della funzione stessa.

Un esempio più difficile

Vediamo un esempio più difficile del precedente: l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{1}{y(x)} \quad y(x) \neq 0.$$

Stavolta vogliamo trovare le funzioni la cui derivata sia il reciproco della funzione stessa.

Sempre pensando alle derivate delle funzioni elementari, possiamo ricordarci che la derivata di $\sqrt{x}$ è $\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

Un esempio più difficile

Vediamo un esempio più difficile del precedente: l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{1}{y(x)} \quad y(x) \neq 0.$$

Stavolta vogliamo trovare le funzioni la cui derivata sia il reciproco della funzione stessa.

Sempre pensando alle derivate delle funzioni elementari, possiamo ricordarci che la derivata di $\sqrt{x}$ è $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, e dunque la derivata di $\sqrt{2x}$ è $\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Un esempio più difficile

Vediamo un esempio più difficile del precedente: l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{1}{y(x)} \quad y(x) \neq 0.$$

Stavolta vogliamo trovare le funzioni la cui derivata sia il reciproco della funzione stessa.

Sempre pensando alle derivate delle funzioni elementari, possiamo ricordarci che la derivata di $\sqrt{x}$ è $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, e dunque la derivata di $\sqrt{2x}$ è $\frac{1}{\sqrt{2x}}$. Possiamo inoltre aggiungere una costante arbitraria all'interno della radice quadrata, e dunque le soluzioni sono date da

$$y(x) = \sqrt{2x + c}.$$

Un esempio ancora più difficile

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = 2xy(x).$$

Quindi vogliamo trovare quelle funzioni che, una volta derivate, diventano le stesse funzioni moltiplicate per $2x$.

Un esempio ancora più difficile

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = 2xy(x).$$

Quindi vogliamo trovare quelle funzioni che, una volta derivate, diventano le stesse funzioni moltiplicate per $2x$.

Stavolta procedere “per intuito” è più difficile. Però se vi dico che la soluzione è

$$y(x) = ke^{x^2}$$

è facile vedere se ho ragione oppure no: basta derivare.

Un esempio ancora più difficile

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = 2xy(x).$$

Quindi vogliamo trovare quelle funzioni che, una volta derivate, diventano le stesse funzioni moltiplicate per $2x$.

Stavolta procedere “per intuito” è più difficile. Però se vi dico che la soluzione è

$$y(x) = ke^{x^2}$$

è facile vedere se ho ragione oppure no: basta derivare.

La derivata di $y = ke^{x^2}$ è $y' = 2xke^{x^2}$, e quindi è vero che $y' = 2xy$.

Un esempio ancora più difficile

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = 2xy(x).$$

Quindi vogliamo trovare quelle funzioni che, una volta derivate, diventano le stesse funzioni moltiplicate per $2x$.

Stavolta procedere “per intuito” è più difficile. Però se vi dico che la soluzione è

$$y(x) = ke^{x^2}$$

è facile vedere se ho ragione oppure no: basta derivare.

La derivata di $y = ke^{x^2}$ è $y' = 2xke^{x^2}$, e quindi è vero che $y' = 2xy$.

È possibile ottenere la soluzione precedente mediante una formula?

Le equazioni a variabili separabili

I tre esempi che abbiamo visto

$$y' = y, \quad y' = \frac{1}{y}, \quad y' = 2xy$$

hanno qualcosa in comune: sono **a variabili separabili**.

Le equazioni a variabili separabili

I tre esempi che abbiamo visto

$$y' = y, \quad y' = \frac{1}{y}, \quad y' = 2xy$$

hanno qualcosa in comune: sono **a variabili separabili**.

Questo significa che il secondo membro dell'equazione si può scrivere nella forma $a(y)b(x)$, ovvero come prodotto di una funzione di y per una funzione di x .

Le equazioni a variabili separabili

I tre esempi che abbiamo visto

$$y' = y, \quad y' = \frac{1}{y}, \quad y' = 2xy$$

hanno qualcosa in comune: sono **a variabili separabili**.

Questo significa che il secondo membro dell'equazione si può scrivere nella forma $a(y)b(x)$, ovvero come prodotto di una funzione di y per una funzione di x .

Nel primo caso si ha $a(y) = y$ e $b(x) = 1$.

Le equazioni a variabili separabili

I tre esempi che abbiamo visto

$$y' = y, \quad y' = \frac{1}{y}, \quad y' = 2xy$$

hanno qualcosa in comune: sono **a variabili separabili**.

Questo significa che il secondo membro dell'equazione si può scrivere nella forma $a(y)b(x)$, ovvero come prodotto di una funzione di y per una funzione di x .

Nel primo caso si ha $a(y) = y$ e $b(x) = 1$.

Nel secondo caso si ha $a(y) = 1/y$ e ancora $b(x) = 1$.

Le equazioni a variabili separabili

I tre esempi che abbiamo visto

$$y' = y, \quad y' = \frac{1}{y}, \quad y' = 2xy$$

hanno qualcosa in comune: sono **a variabili separabili**.

Questo significa che il secondo membro dell'equazione si può scrivere nella forma $a(y)b(x)$, ovvero come prodotto di una funzione di y per una funzione di x .

Nel primo caso si ha $a(y) = y$ e $b(x) = 1$.

Nel secondo caso si ha $a(y) = 1/y$ e ancora $b(x) = 1$.

Nel terzo caso si ha $a(y) = y$ e $b(x) = 2x$ (la costante moltiplicativa 2 può essere messa dove si vuole).

Le equazioni a variabili separabili

In generale quindi un'equazione differenziale a variabili separabili può essere scritta nella forma

$$y' = a(y)b(x)$$

Le equazioni a variabili separabili

In generale quindi un'equazione differenziale a variabili separabili può essere scritta nella forma

$$y' = a(y)b(x)$$

dove $a(y)$ e $b(x)$ sono delle funzioni note, e y è la funzione incognita.

Le equazioni a variabili separabili

In generale quindi un'equazione differenziale a variabili separabili può essere scritta nella forma

$$y' = a(y)b(x)$$

dove $a(y)$ e $b(x)$ sono delle funzioni note, e y è la funzione incognita. Riscriviamo l'equazione dividendo tutto per $a(y)$:

$$\frac{y'}{a(y)} = b(x).$$

Le equazioni a variabili separabili

In generale quindi un'equazione differenziale a variabili separabili può essere scritta nella forma

$$y' = a(y)b(x)$$

dove $a(y)$ e $b(x)$ sono delle funzioni note, e y è la funzione incognita. Riscriviamo l'equazione dividendo tutto per $a(y)$:

$$\frac{y'}{a(y)} = b(x).$$

Ora integriamo i due membri dell'equazione nella variabile x :

$$\int \frac{y'}{a(y)} dx = \int b(x) dx.$$

Le equazioni a variabili separabili

In generale quindi un'equazione differenziale a variabili separabili può essere scritta nella forma

$$y' = a(y)b(x)$$

dove $a(y)$ e $b(x)$ sono delle funzioni note, e y è la funzione incognita. Riscriviamo l'equazione dividendo tutto per $a(y)$:

$$\frac{y'}{a(y)} = b(x).$$

Ora integriamo i due membri dell'equazione nella variabile x :

$$\int \frac{y'}{a(y)} dx = \int b(x) dx.$$

Ricordando la formula del cambio di variabile, a sinistra otteniamo un integrale in y :

$$\int \frac{1}{a(y)} dy = \int b(x) dx.$$

Le equazioni a variabili separabili

Abbiamo ottenuto l'equazione

$$\int \frac{1}{a(y)} dy = \int b(x) dx.$$

Per risolvere le equazioni a variabili separabili, una volta separate le variabili, basta trovare una primitiva di $\frac{1}{a(y)}$ e una primitiva di $b(x)$ (tenendo conto della costante additiva), e poi uguagliare le due primitive.

Le equazioni a variabili separabili

Abbiamo ottenuto l'equazione

$$\int \frac{1}{a(y)} dy = \int b(x) dx.$$

Per risolvere le equazioni a variabili separabili, una volta separate le variabili, basta trovare una primitiva di $\frac{1}{a(y)}$ e una primitiva di $b(x)$ (tenendo conto della costante additiva), e poi uguagliare le due primitive. Infine, dovremo ricavare la y in funzione della x , e avremo trovato la soluzione dell'equazione.

Esempio

Proviamo ad applicare il metodo all'equazione dell'ultimo esempio

$$y' = 2xy.$$

Esempio

Proviamo ad applicare il metodo all'equazione dell'ultimo esempio

$$y' = 2xy.$$

Separiamo le variabili

$$\frac{y'}{y} = 2x$$

e quindi calcoliamo

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx$$

Esempio

Proviamo ad applicare il metodo all'equazione dell'ultimo esempio

$$y' = 2xy.$$

Separiamo le variabili

$$\frac{y'}{y} = 2x$$

e quindi calcoliamo

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx$$

da cui

$$\log |y| = x^2 + c.$$

(dove abbiamo aggiunto una costante additiva).

Esempio

Proviamo ad applicare il metodo all'equazione dell'ultimo esempio

$$y' = 2xy.$$

Separiamo le variabili

$$\frac{y'}{y} = 2x$$

e quindi calcoliamo

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx$$

da cui

$$\log |y| = x^2 + c.$$

(dove abbiamo aggiunto una costante additiva).

Ora ricaviamo la y :

$$y(x) = \pm e^{x^2+c}$$

Esempio

Proviamo ad applicare il metodo all'equazione dell'ultimo esempio

$$y' = 2xy.$$

Separiamo le variabili

$$\frac{y'}{y} = 2x$$

e quindi calcoliamo

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx$$

da cui

$$\log |y| = x^2 + c.$$

(dove abbiamo aggiunto una costante additiva).

Ora ricaviamo la y :

$$y(x) = \pm e^{x^2+c} = \pm e^{x^2} e^c$$

Esempio

Proviamo ad applicare il metodo all'equazione dell'ultimo esempio

$$y' = 2xy.$$

Separiamo le variabili

$$\frac{y'}{y} = 2x$$

e quindi calcoliamo

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx$$

da cui

$$\log |y| = x^2 + c.$$

(dove abbiamo aggiunto una costante additiva).

Ora ricaviamo la y :

$$y(x) = \pm e^{x^2+c} = \pm e^{x^2} e^c = k e^{x^2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

dove abbiamo chiamato k la costante arbitraria $\pm e^c$.

Esempio complicato

Ora passiamo ad un esempio decisamente più complicato: trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = y(x) + x.$$

Esempio complicato

Ora passiamo ad un esempio decisamente più complicato: trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = y(x) + x.$$

In questo caso, trovare la soluzione “a occhio” diventa piuttosto difficile. Eppure la soluzione si può scrivere, ed è

$$y(x) = ke^x - x - 1, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Esempio complicato

Ora passiamo ad un esempio decisamente più complicato: trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = y(x) + x.$$

In questo caso, trovare la soluzione “a occhio” diventa piuttosto difficile. Eppure la soluzione si può scrivere, ed è

$$y(x) = ke^x - x - 1, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Infatti è facile fare la verifica: si ha

$$y'(x) = ke^x - 1,$$

Esempio complicato

Ora passiamo ad un esempio decisamente più complicato: trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = y(x) + x.$$

In questo caso, trovare la soluzione “a occhio” diventa piuttosto difficile. Eppure la soluzione si può scrivere, ed è

$$y(x) = ke^x - x - 1, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Infatti è facile fare la verifica: si ha

$$y'(x) = ke^x - 1,$$

$$y(x) + x = ke^x - x - 1 + x = ke^x - 1.$$

Esempio complicato

Ora passiamo ad un esempio decisamente più complicato: trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = y(x) + x.$$

In questo caso, trovare la soluzione “a occhio” diventa piuttosto difficile. Eppure la soluzione si può scrivere, ed è

$$y(x) = ke^x - x - 1, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Infatti è facile fare la verifica: si ha

$$y'(x) = ke^x - 1,$$

$$y(x) + x = ke^x - x - 1 + x = ke^x - 1.$$

Quindi queste funzioni sono tutte soluzioni dell'equazione differenziale.

Equazioni lineari del primo ordine

Come abbiamo fatto a trovare la soluzione dell'esempio precedente?
Quell'equazione differenziale rientra nella famiglia delle **equazioni lineari del primo ordine**, ovvero le equazioni del tipo

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x).$$

Equazioni lineari del primo ordine

Come abbiamo fatto a trovare la soluzione dell'esempio precedente?
Quell'equazione differenziale rientra nella famiglia delle **equazioni lineari del primo ordine**, ovvero le equazioni del tipo

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x).$$

Se indichiamo con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, le soluzioni di queste equazioni sono date da

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(k + \int e^{A(x)} f(x) dx \right), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione della formula

Vediamo una dimostrazione della formula appena citata.

Denotando di nuovo con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, partiamo dalla quantità $y(x)e^{A(x)}$ e facciamone la derivata:

$$(y(x)e^{A(x)})'$$

Dimostrazione della formula

Vediamo una dimostrazione della formula appena citata.

Denotando di nuovo con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, partiamo dalla quantità $y(x)e^{A(x)}$ e facciamone la derivata:

$$(y(x)e^{A(x)})' = y'(x)e^{A(x)} + y(x)a(x)e^{A(x)}$$

Dimostrazione della formula

Vediamo una dimostrazione della formula appena citata.

Denotando di nuovo con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, partiamo dalla quantità $y(x)e^{A(x)}$ e facciamone la derivata:

$$\left(y(x)e^{A(x)}\right)' = y'(x)e^{A(x)} + y(x)a(x)e^{A(x)} = \left(y'(x) + a(x)y(x)\right)e^{A(x)}.$$

Dimostrazione della formula

Vediamo una dimostrazione della formula appena citata.

Denotando di nuovo con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, partiamo dalla quantità $y(x)e^{A(x)}$ e facciamone la derivata:

$$(y(x)e^{A(x)})' = y'(x)e^{A(x)} + y(x)a(x)e^{A(x)} = (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)}.$$

Quindi, poiché l'equazione differenziale di partenza era

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x),$$

abbiamo trovato che

$$(y(x)e^{A(x)})' = f(x)e^{A(x)}.$$

Dimostrazione della formula

Vediamo una dimostrazione della formula appena citata.

Denotando di nuovo con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, partiamo dalla quantità $y(x)e^{A(x)}$ e facciamone la derivata:

$$(y(x)e^{A(x)})' = y'(x)e^{A(x)} + y(x)a(x)e^{A(x)} = (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)}.$$

Quindi, poiché l'equazione differenziale di partenza era

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x),$$

abbiamo trovato che

$$(y(x)e^{A(x)})' = f(x)e^{A(x)}.$$

Ora integriamo i due membri e aggiungiamo la costante di integrazione, trovando

$$y(x)e^{A(x)} = \int f(x)e^{A(x)} dx + k.$$

Dimostrazione della formula

Vediamo una dimostrazione della formula appena citata.

Denotando di nuovo con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, partiamo dalla quantità $y(x)e^{A(x)}$ e facciamone la derivata:

$$(y(x)e^{A(x)})' = y'(x)e^{A(x)} + y(x)a(x)e^{A(x)} = (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)}.$$

Quindi, poiché l'equazione differenziale di partenza era

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x),$$

abbiamo trovato che

$$(y(x)e^{A(x)})' = f(x)e^{A(x)}.$$

Ora integriamo i due membri e aggiungiamo la costante di integrazione, trovando

$$y(x)e^{A(x)} = \int f(x)e^{A(x)} dx + k.$$

Infine, moltiplicando tutto per $e^{-A(x)}$ troviamo la formula finale.

Applicazione della formula

Applichiamo la formula all'equazione vista in precedenza

$$y'(x) = y(x) + x.$$

Applicazione della formula

Applichiamo la formula all'equazione vista in precedenza

$$y'(x) = y(x) + x.$$

Innanzitutto dobbiamo riscriverla portando le y a sinistra:

$$y'(x) - y(x) = x.$$

Applicazione della formula

Applichiamo la formula all'equazione vista in precedenza

$$y'(x) = y(x) + x.$$

Innanzitutto dobbiamo riscriverla portando le y a sinistra:

$$y'(x) - y(x) = x.$$

Poiché $a(x) = -1$, si ha $A(x) = -x$ e la formula diventa

$$y(x) = e^x \left(k + \int x e^{-x} dx \right).$$

Applicazione della formula

Applichiamo la formula all'equazione vista in precedenza

$$y'(x) = y(x) + x.$$

Innanzitutto dobbiamo riscriverla portando le y a sinistra:

$$y'(x) - y(x) = x.$$

Poiché $a(x) = -1$, si ha $A(x) = -x$ e la formula diventa

$$y(x) = e^x \left(k + \int x e^{-x} dx \right).$$

L'integrale si calcola per parti e risulta $(-x - 1)e^{-x}$, quindi

$$y(x) = e^x \left(k + (-x - 1)e^x \right)$$

Applicazione della formula

Applichiamo la formula all'equazione vista in precedenza

$$y'(x) = y(x) + x.$$

Innanzitutto dobbiamo riscriverla portando le y a sinistra:

$$y'(x) - y(x) = x.$$

Poiché $a(x) = -1$, si ha $A(x) = -x$ e la formula diventa

$$y(x) = e^x \left(k + \int x e^{-x} dx \right).$$

L'integrale si calcola per parti e risulta $(-x - 1)e^{-x}$, quindi

$$y(x) = e^x \left(k + (-x - 1)e^{-x} \right) = ke^x - x - 1.$$

Il problema di Cauchy

Abbiamo visto che la soluzione di un'equazione differenziale non è mai unica, perché c'è sempre di mezzo una costante arbitraria.

Il problema di Cauchy

Abbiamo visto che la soluzione di un'equazione differenziale non è mai unica, perché c'è sempre di mezzo una costante arbitraria.

Un modo per formulare un problema che abbia una sola soluzione è quello di chiedere che la funzione, oltre a soddisfare l'equazione differenziale, assuma anche un dato valore in un punto fissato.

Il problema di Cauchy

Abbiamo visto che la soluzione di un'equazione differenziale non è mai unica, perché c'è sempre di mezzo una costante arbitraria.

Un modo per formulare un problema che abbia una sola soluzione è quello di chiedere che la funzione, oltre a soddisfare l'equazione differenziale, assuma anche un dato valore in un punto fissato.

Ad esempio, il problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ha esattamente una soluzione: $y(x) = e^x$.

Il problema di Cauchy

Abbiamo visto che la soluzione di un'equazione differenziale non è mai unica, perché c'è sempre di mezzo una costante arbitraria.

Un modo per formulare un problema che abbia una sola soluzione è quello di chiedere che la funzione, oltre a soddisfare l'equazione differenziale, assuma anche un dato valore in un punto fissato.

Ad esempio, il problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ha esattamente una soluzione: $y(x) = e^x$.

Infatti le soluzioni dell'equazione sono date da $y(x) = ke^x$, e tra queste soltanto quella per $k = 1$ soddisfa la condizione aggiuntiva.

Il problema di Cauchy

Abbiamo visto che la soluzione di un'equazione differenziale non è mai unica, perché c'è sempre di mezzo una costante arbitraria.

Un modo per formulare un problema che abbia una sola soluzione è quello di chiedere che la funzione, oltre a soddisfare l'equazione differenziale, assuma anche un dato valore in un punto fissato.

Ad esempio, il problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

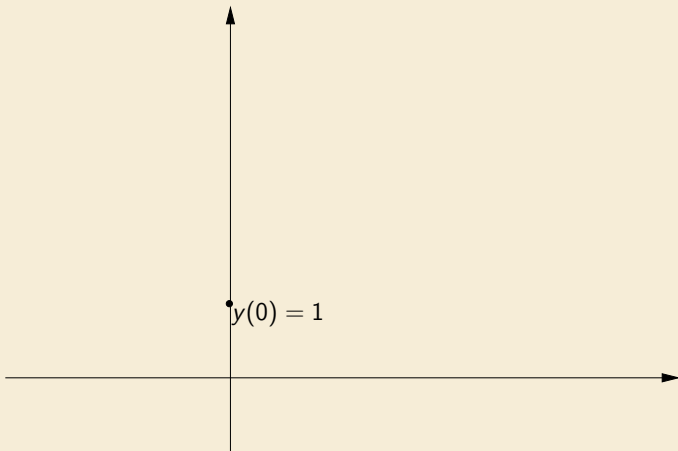
ha esattamente una soluzione: $y(x) = e^x$.

Infatti le soluzioni dell'equazione sono date da $y(x) = ke^x$, e tra queste soltanto quella per $k = 1$ soddisfa la condizione aggiuntiva.

Questo tipo di problema si chiama **problema di Cauchy**.

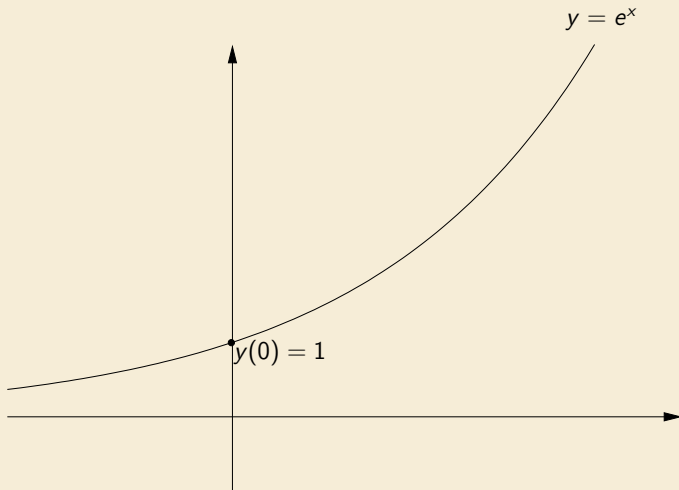
Il problema di Cauchy

La condizione di aggiuntiva di Cauchy può essere interpretata in modo geometrico: per ogni punto $(x_0; y_0)$ del piano esiste esattamente una funzione che risolve l'equazione differenziale e che *passa* per quel punto.



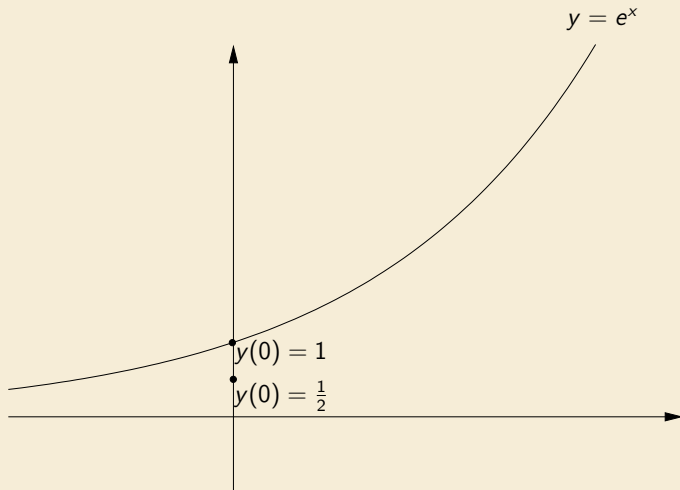
Il problema di Cauchy

La condizione di aggiuntiva di Cauchy può essere interpretata in modo geometrico: per ogni punto $(x_0; y_0)$ del piano esiste esattamente una funzione che risolve l'equazione differenziale e che *passa* per quel punto.



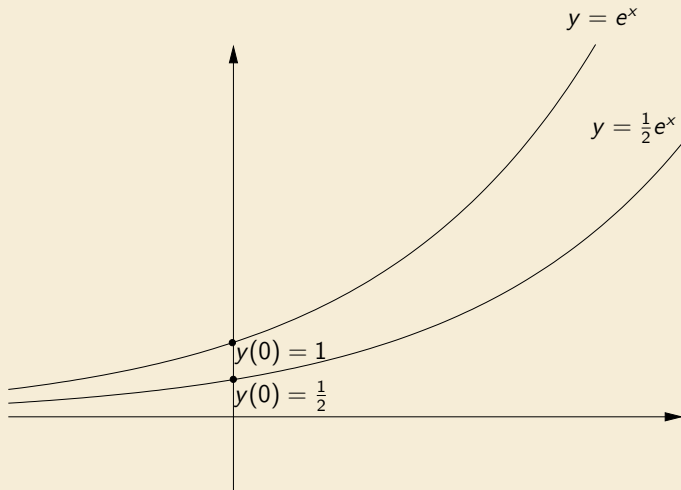
Il problema di Cauchy

La condizione di aggiuntiva di Cauchy può essere interpretata in modo geometrico: per ogni punto $(x_0; y_0)$ del piano esiste esattamente una funzione che risolve l'equazione differenziale e che *passa* per quel punto.



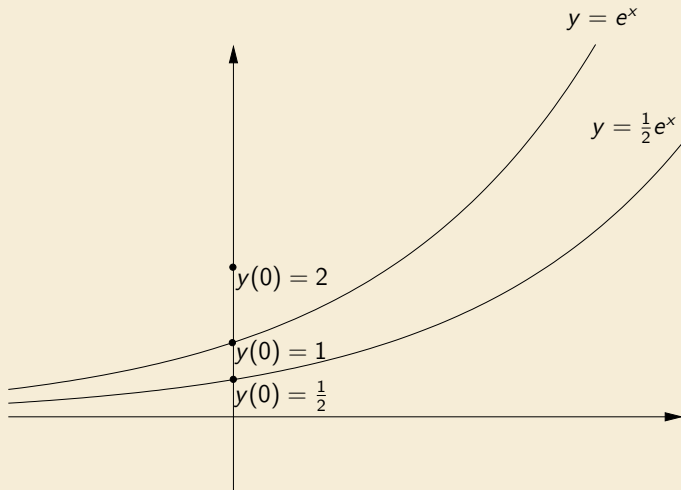
Il problema di Cauchy

La condizione di aggiuntiva di Cauchy può essere interpretata in modo geometrico: per ogni punto $(x_0; y_0)$ del piano esiste esattamente una funzione che risolve l'equazione differenziale e che *passa* per quel punto.



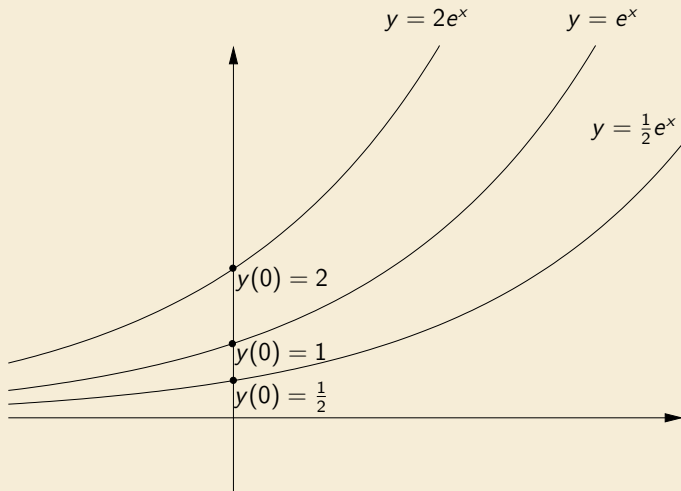
Il problema di Cauchy

La condizione di aggiuntiva di Cauchy può essere interpretata in modo geometrico: per ogni punto $(x_0; y_0)$ del piano esiste esattamente una funzione che risolve l'equazione differenziale e che *passa* per quel punto.



Il problema di Cauchy

La condizione di aggiuntiva di Cauchy può essere interpretata in modo geometrico: per ogni punto $(x_0; y_0)$ del piano esiste esattamente una funzione che risolve l'equazione differenziale e che *passa* per quel punto.



Condizione iniziale

La condizione aggiuntiva del problema di Cauchy si chiama anche *condizione iniziale*.

Condizione iniziale

La condizione aggiuntiva del problema di Cauchy si chiama anche *condizione iniziale*.

Nella maggior parte dei problemi fisici, soprattutto in quelli legati alla *meccanica*, la variabile x rappresenta il tempo e la variabile y lo spazio percorso.

Condizione iniziale

La condizione aggiuntiva del problema di Cauchy si chiama anche *condizione iniziale*.

Nella maggior parte dei problemi fisici, soprattutto in quelli legati alla *meccanica*, la variabile x rappresenta il tempo e la variabile y lo spazio percorso.

Spesso si preferisce usare la lettera t al posto della x , e la lettera s al posto della y :

$$s'(t) = f(t, s(t)).$$

Condizione iniziale

La condizione aggiuntiva del problema di Cauchy si chiama anche *condizione iniziale*.

Nella maggior parte dei problemi fisici, soprattutto in quelli legati alla *meccanica*, la variabile x rappresenta il tempo e la variabile y lo spazio percorso.

Spesso si preferisce usare la lettera t al posto della x , e la lettera s al posto della y :

$$s'(t) = f(t, s(t)).$$

Quindi fissare un valore per la s in un certo istante t significa dichiarare la *posizione iniziale* di un punto.

Equazioni differenziali del secondo ordine

Si possono introdurre anche le equazioni differenziali di **ordine** più elevato: l'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della derivata più alta che compare nell'equazione.

Equazioni differenziali del secondo ordine

Si possono introdurre anche le equazioni differenziali di **ordine** più elevato: l'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della derivata più alta che compare nell'equazione.

Tra queste spiccano le equazioni differenziali del **secondo ordine**, che sono molto legate ai problemi di Fisica.

Equazioni differenziali del secondo ordine

Si possono introdurre anche le equazioni differenziali di **ordine** più elevato: l'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della derivata più alta che compare nell'equazione.

Tra queste spiccano le equazioni differenziali del **secondo ordine**, che sono molto legate ai problemi di Fisica.

Il secondo principio della dinamica, infatti, quello che stabilisce un'uguaglianza tra la forza applicata e la quantità "massa per accelerazione" $F = ma$,

Equazioni differenziali del secondo ordine

Si possono introdurre anche le equazioni differenziali di **ordine** più elevato: l'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della derivata più alta che compare nell'equazione.

Tra queste spiccano le equazioni differenziali del **secondo ordine**, che sono molto legate ai problemi di Fisica.

Il secondo principio della dinamica, infatti, quello che stabilisce un'uguaglianza tra la forza applicata e la quantità "massa per accelerazione" $F = ma$, può essere visto proprio come un'equazione differenziale del secondo ordine.

Equazioni differenziali del secondo ordine

Si possono introdurre anche le equazioni differenziali di **ordine** più elevato: l'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della derivata più alta che compare nell'equazione.

Tra queste spiccano le equazioni differenziali del **secondo ordine**, che sono molto legate ai problemi di Fisica.

Il secondo principio della dinamica, infatti, quello che stabilisce un'uguaglianza tra la forza applicata e la quantità "massa per accelerazione" $F = ma$, può essere visto proprio come un'equazione differenziale del secondo ordine.

Se l'incognita è lo spazio percorso s , la velocità è data da s' e l'accelerazione da s'' , quindi il secondo principio si scrive come

$$ms'' = F(t, s, s'),$$

in cui si suppone che la forza sia una funzione nota dipendente dal tempo, dallo spazio percorso e dalla velocità.

Equazioni differenziali del secondo ordine

Si possono introdurre anche le equazioni differenziali di **ordine** più elevato: l'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della derivata più alta che compare nell'equazione.

Tra queste spiccano le equazioni differenziali del **secondo ordine**, che sono molto legate ai problemi di Fisica.

Il secondo principio della dinamica, infatti, quello che stabilisce un'uguaglianza tra la forza applicata e la quantità "massa per accelerazione" $F = ma$, può essere visto proprio come un'equazione differenziale del secondo ordine.

Se l'incognita è lo spazio percorso s , la velocità è data da s' e l'accelerazione da s'' , quindi il secondo principio si scrive come

$$ms'' = F(t, s, s'),$$

in cui si suppone che la forza sia una funzione nota dipendente dal tempo, dallo spazio percorso e dalla velocità.

Questa è proprio una equazione differenziale del secondo ordine.

Equazioni differenziali del secondo ordine

Per le equazioni del secondo ordine non basta più specificare la posizione iniziale: le soluzioni infatti dipendono da *due* costanti, perché in qualche senso bisogna fare due integrazioni per risolverle.

Equazioni differenziali del secondo ordine

Per le equazioni del secondo ordine non basta più specificare la posizione iniziale: le soluzioni infatti dipendono da *due* costanti, perché in qualche senso bisogna fare due integrazioni per risolverle.

Il problema di Cauchy, in questo caso, si costruisce fornendo la posizione e la *derivata prima* in un certo istante (per esempio l'istante 0):

$$\begin{cases} ms'' = F(t, s, s') \\ s(0) = s_0 \\ s'(0) = v_0. \end{cases}$$

Equazioni differenziali del secondo ordine

Per le equazioni del secondo ordine non basta più specificare la posizione iniziale: le soluzioni infatti dipendono da *due* costanti, perché in qualche senso bisogna fare due integrazioni per risolverle.

Il problema di Cauchy, in questo caso, si costruisce fornendo la posizione e la *derivata prima* in un certo istante (per esempio l'istante 0):

$$\begin{cases} ms'' = F(t, s, s') \\ s(0) = s_0 \\ s'(0) = v_0. \end{cases}$$

Questo fatto rende conto del ben noto principio fisico per cui, per conoscere il moto di un punto, bisogna assegnare non solo la posizione, ma anche la velocità iniziale.