

Equazioni di grado superiore al secondo

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

- 1 Metodo di Ruffini
- 2 Equazioni binomie
- 3 Trinomie
- 4 Biquadratiche
- 5 Reciproche
- 6 Approfondimento

Se c'è una cosa facile nelle equazioni di grado superiore al secondo, questa è la definizione.

Se c'è una cosa facile nelle equazioni di grado superiore al secondo, questa è la definizione.

Un'equazione di grado superiore al secondo è infatti un'equazione algebrica in una variabile di grado maggiore di 2.

Se c'è una cosa facile nelle equazioni di grado superiore al secondo, questa è la definizione.

Un'equazione di grado superiore al secondo è infatti un'equazione algebrica in una variabile di grado maggiore di 2.

Prima di addentrarci nei tipi più frequenti di queste equazioni, però, ripassiamo alcuni concetti di base.

La legge di annullamento del prodotto

La legge di annullamento del prodotto

Un classico teorema sui numeri reali (e anche razionali o interi) è il seguente:

La legge di annullamento del prodotto

Un classico teorema sui numeri reali (e anche razionali o interi) è il seguente:

Teorema

Il prodotto di due o più numeri reali è zero se e solo se almeno uno di questi è zero.

La legge di annullamento del prodotto

Un classico teorema sui numeri reali (e anche razionali o interi) è il seguente:

Teorema

Il prodotto di due o più numeri reali è zero se e solo se almeno uno di questi è zero.

Da qui segue che

La legge di annullamento del prodotto

Un classico teorema sui numeri reali (e anche razionali o interi) è il seguente:

Teorema

Il prodotto di due o più numeri reali è zero se e solo se almeno uno di questi è zero.

Da qui segue che

Teorema

Se si hanno più polinomi $P[x], Q[x], \dots, Z[x]$ nell'incognita x e si deve risolvere l'equazione

La legge di annullamento del prodotto

Un classico teorema sui numeri reali (e anche razionali o interi) è il seguente:

Teorema

Il prodotto di due o più numeri reali è zero se e solo se almeno uno di questi è zero.

Da qui segue che

Teorema

Se si hanno più polinomi $P[x], Q[x], \dots, Z[x]$ nell'incognita x e si deve risolvere l'equazione

$$P[x] \cdot Q[x] \cdot \dots \cdot Z[x] = 0$$

La legge di annullamento del prodotto

Un classico teorema sui numeri reali (e anche razionali o interi) è il seguente:

Teorema

Il prodotto di due o più numeri reali è zero se e solo se almeno uno di questi è zero.

Da qui segue che

Teorema

Se si hanno più polinomi $P[x], Q[x], \dots, Z[x]$ nell'incognita x e si deve risolvere l'equazione

$$P[x] \cdot Q[x] \cdot \dots \cdot Z[x] = 0$$

allora le soluzioni sono tutti e soli i numeri che annullano almeno uno dei polinomi.

Dimostrazione. Supponiamo che un numero a annulli uno dei polinomi, per esempio Q .

Dimostrazione. Supponiamo che un numero a annulli uno dei polinomi, per esempio Q . Allora $Q[a] = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che un numero a annulli uno dei polinomi, per esempio Q . Allora $Q[a] = 0$.
Dunque, il prodotto

Dimostrazione. Supponiamo che un numero a annulli uno dei polinomi, per esempio Q . Allora $Q[a] = 0$.
Dunque, il prodotto

$$P[a] \cdot Q[a] \cdot \dots \cdot Z[a]$$

Dimostrazione. Supponiamo che un numero a annulli uno dei polinomi, per esempio Q . Allora $Q[a] = 0$.
Dunque, il prodotto

$$P[a] \cdot Q[a] \cdot \dots \cdot Z[a]$$

è zero perché un fattore è zero.

Dimostrazione. Supponiamo che un numero a annulli uno dei polinomi, per esempio Q . Allora $Q[a] = 0$.
Dunque, il prodotto

$$P[a] \cdot Q[a] \cdot \dots \cdot Z[a]$$

è zero perché un fattore è zero.

Viceversa, se a è una soluzione dell'equazione

$$P[x] \cdot Q[x] \cdot \dots \cdot Z[x] = 0,$$

Dimostrazione. Supponiamo che un numero a annulli uno dei polinomi, per esempio Q . Allora $Q[a] = 0$.
Dunque, il prodotto

$$P[a] \cdot Q[a] \cdot \dots \cdot Z[a]$$

è zero perché un fattore è zero.

Viceversa, se a è una soluzione dell'equazione

$$P[x] \cdot Q[x] \cdot \dots \cdot Z[x] = 0,$$

vediamo che esso deve annullare almeno un polinomio.

Dimostrazione. Supponiamo che un numero a annulli uno dei polinomi, per esempio Q . Allora $Q[a] = 0$.
Dunque, il prodotto

$$P[a] \cdot Q[a] \cdot \dots \cdot Z[a]$$

è zero perché un fattore è zero.

Viceversa, se a è una soluzione dell'equazione

$$P[x] \cdot Q[x] \cdot \dots \cdot Z[x] = 0,$$

vediamo che esso deve annullare almeno un polinomio. Se infatti per assurdo non ne annullasse nessuno, tutti i numeri $P[a], Q[a], \dots, Z[a]$ non sarebbero nulli,

Dimostrazione. Supponiamo che un numero a annulli uno dei polinomi, per esempio Q . Allora $Q[a] = 0$.
Dunque, il prodotto

$$P[a] \cdot Q[a] \cdot \dots \cdot Z[a]$$

è zero perché un fattore è zero.

Viceversa, se a è una soluzione dell'equazione

$$P[x] \cdot Q[x] \cdot \dots \cdot Z[x] = 0,$$

vediamo che esso deve annullare almeno un polinomio. Se infatti per assurdo non ne annullasse nessuno, tutti i numeri $P[a], Q[a], \dots, Z[a]$ non sarebbero nulli, e quindi neanche il loro prodotto sarebbe zero,

Dimostrazione. Supponiamo che un numero a annulli uno dei polinomi, per esempio Q . Allora $Q[a] = 0$.
Dunque, il prodotto

$$P[a] \cdot Q[a] \cdot \dots \cdot Z[a]$$

è zero perché un fattore è zero.

Viceversa, se a è una soluzione dell'equazione

$$P[x] \cdot Q[x] \cdot \dots \cdot Z[x] = 0,$$

vediamo che esso deve annullare almeno un polinomio. Se infatti per assurdo non ne annullasse nessuno, tutti i numeri $P[a], Q[a], \dots, Z[a]$ non sarebbero nulli, e quindi neanche il loro prodotto sarebbe zero, e allora a non sarebbe una soluzione dell'equazione data. ■

Esempio

Risolvi l'equazione

Esempio

RisolviAMO l'equazione

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 6x + 5) = 0.$$

Esempio

RisolviAMO l'equazione

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 6x + 5) = 0.$$

Qui abbiamo tre polinomi:

Esempio

Risolvi l'equazione

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 6x + 5) = 0.$$

Qui abbiamo tre polinomi:

$$P[x] = x, \quad Q[x] = x^2 - 1, \quad R[x] = x^2 - 6x + 5.$$

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 6x + 5) = 0.$$

Qui abbiamo tre polinomi:

$$P[x] = x, \quad Q[x] = x^2 - 1, \quad R[x] = x^2 - 6x + 5.$$

Le soluzioni si troveranno tutte quindi uguagliando a zero i tre polinomi, e quindi

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 6x + 5) = 0.$$

Qui abbiamo tre polinomi:

$$P[x] = x, \quad Q[x] = x^2 - 1, \quad R[x] = x^2 - 6x + 5.$$

Le soluzioni si troveranno tutte quindi uguagliando a zero i tre polinomi, e quindi

$$P[x] = 0 \Rightarrow x = 0$$

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 6x + 5) = 0.$$

Qui abbiamo tre polinomi:

$$P[x] = x, \quad Q[x] = x^2 - 1, \quad R[x] = x^2 - 6x + 5.$$

Le soluzioni si troveranno tutte quindi uguagliando a zero i tre polinomi, e quindi

$$P[x] = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$Q[x] = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0$$

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 6x + 5) = 0.$$

Qui abbiamo tre polinomi:

$$P[x] = x, \quad Q[x] = x^2 - 1, \quad R[x] = x^2 - 6x + 5.$$

Le soluzioni si troveranno tutte quindi uguagliando a zero i tre polinomi, e quindi

$$P[x] = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$Q[x] = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 6x + 5) = 0.$$

Qui abbiamo tre polinomi:

$$P[x] = x, \quad Q[x] = x^2 - 1, \quad R[x] = x^2 - 6x + 5.$$

Le soluzioni si troveranno tutte quindi uguagliando a zero i tre polinomi, e quindi

$$P[x] = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$Q[x] = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$R[x] = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 6x + 5) = 0.$$

Qui abbiamo tre polinomi:

$$P[x] = x, \quad Q[x] = x^2 - 1, \quad R[x] = x^2 - 6x + 5.$$

Le soluzioni si troveranno tutte quindi uguagliando a zero i tre polinomi, e quindi

$$P[x] = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$Q[x] = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$R[x] = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5.$$

L'esempio appena visto mostra che le soluzioni si possono ripetere: In questo caso esse si dicono *multiple*.

L'esempio appena visto mostra che le soluzioni si possono ripetere: In questo caso esse si dicono *multiple*.

Sappiamo anche che se un polinomio in una variabile (ad esempio x) ha il termine di grado zero (il “termina noto”) pari a zero, esso si può scomporre raccogliendo x , o una sua potenza più alta.

L'esempio appena visto mostra che le soluzioni si possono ripetere: In questo caso esse si dicono *multiple*.

Sappiamo anche che se un polinomio in una variabile (ad esempio x) ha il termine di grado zero (il “termina noto”) pari a zero, esso si può scomporre raccogliendo x , o una sua potenza più alta. Quindi un'equazione con termine noto nullo ammette sempre la soluzione $x = 0$.

L'esempio appena visto mostra che le soluzioni si possono ripetere: In questo caso esse si dicono *multiple*.

Sappiamo anche che se un polinomio in una variabile (ad esempio x) ha il termine di grado zero (il "termina noto") pari a zero, esso si può scomporre raccogliendo x , o una sua potenza più alta. Quindi un'equazione con termine noto nullo ammette sempre la soluzione $x = 0$.

Esempio

L'equazione

L'esempio appena visto mostra che le soluzioni si possono ripetere: In questo caso esse si dicono *multiple*.

Sappiamo anche che se un polinomio in una variabile (ad esempio x) ha il termine di grado zero (il "termina noto") pari a zero, esso si può scomporre raccogliendo x , o una sua potenza più alta. Quindi un'equazione con termine noto nullo ammette sempre la soluzione $x = 0$.

Esempio

L'equazione

$$x^4 - 2x^2 = 0$$

L'esempio appena visto mostra che le soluzioni si possono ripetere: In questo caso esse si dicono *multiple*.

Sappiamo anche che se un polinomio in una variabile (ad esempio x) ha il termine di grado zero (il "termina noto") pari a zero, esso si può scomporre raccogliendo x , o una sua potenza più alta. Quindi un'equazione con termine noto nullo ammette sempre la soluzione $x = 0$.

Esempio

L'equazione

$$x^4 - 2x^2 = 0$$

si può riscrivere

L'esempio appena visto mostra che le soluzioni si possono ripetere: In questo caso esse si dicono *multiple*.

Sappiamo anche che se un polinomio in una variabile (ad esempio x) ha il termine di grado zero (il "termina noto") pari a zero, esso si può scomporre raccogliendo x , o una sua potenza più alta. Quindi un'equazione con termine noto nullo ammette sempre la soluzione $x = 0$.

Esempio

L'equazione

$$x^4 - 2x^2 = 0$$

si può riscrivere

$$x^2(x^2 - 2) = 0$$

L'esempio appena visto mostra che le soluzioni si possono ripetere: In questo caso esse si dicono *multiple*.

Sappiamo anche che se un polinomio in una variabile (ad esempio x) ha il termine di grado zero (il "termina noto") pari a zero, esso si può scomporre raccogliendo x , o una sua potenza più alta. Quindi un'equazione con termine noto nullo ammette sempre la soluzione $x = 0$.

Esempio

L'equazione

$$x^4 - 2x^2 = 0$$

si può riscrivere

$$x^2(x^2 - 2) = 0$$

e quindi le sue soluzioni sono

L'esempio appena visto mostra che le soluzioni si possono ripetere: In questo caso esse si dicono *multiple*.

Sappiamo anche che se un polinomio in una variabile (ad esempio x) ha il termine di grado zero (il "termina noto") pari a zero, esso si può scomporre raccogliendo x , o una sua potenza più alta. Quindi un'equazione con termine noto nullo ammette sempre la soluzione $x = 0$.

Esempio

L'equazione

$$x^4 - 2x^2 = 0$$

si può riscrivere

$$x^2(x^2 - 2) = 0$$

e quindi le sue soluzioni sono

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

L'esempio appena visto mostra che le soluzioni si possono ripetere: In questo caso esse si dicono *multiple*.

Sappiamo anche che se un polinomio in una variabile (ad esempio x) ha il termine di grado zero (il "termina noto") pari a zero, esso si può scomporre raccogliendo x , o una sua potenza più alta. Quindi un'equazione con termine noto nullo ammette sempre la soluzione $x = 0$.

Esempio

L'equazione

$$x^4 - 2x^2 = 0$$

si può riscrivere

$$x^2(x^2 - 2) = 0$$

e quindi le sue soluzioni sono

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

L'esempio appena visto mostra che le soluzioni si possono ripetere: In questo caso esse si dicono *multiple*.

Sappiamo anche che se un polinomio in una variabile (ad esempio x) ha il termine di grado zero (il "termina noto") pari a zero, esso si può scomporre raccogliendo x , o una sua potenza più alta. Quindi un'equazione con termine noto nullo ammette sempre la soluzione $x = 0$.

Esempio

L'equazione

$$x^4 - 2x^2 = 0$$

si può riscrivere

$$x^2(x^2 - 2) = 0$$

e quindi le sue soluzioni sono

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

La soluzione $x = 0$ è doppia, perché proviene da due polinomi di primo grado moltiplicati ($x \cdot x$).

Ovviamente è vero anche il viceversa: se un'equazione algebrica di grado n ammette la soluzione $x = 0$, allora il suo polinomio ha il termine noto nullo.

Ovviamente è vero anche il viceversa: se un'equazione algebrica di grado n ammette la soluzione $x = 0$, allora il suo polinomio ha il termine noto nullo. Infatti, se $x = 0$ è una soluzione dell'equazione

Ovviamente è vero anche il viceversa: se un'equazione algebrica di grado n ammette la soluzione $x = 0$, allora il suo polinomio ha il termine noto nullo. Infatti, se $x = 0$ è una soluzione dell'equazione

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + zx^n = 0,$$

Ovviamente è vero anche il viceversa: se un'equazione algebrica di grado n ammette la soluzione $x = 0$, allora il suo polinomio ha il termine noto nullo. Infatti, se $x = 0$ è una soluzione dell'equazione

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + zx^n = 0,$$

sostituendo 0 ad x in ogni termine, tutti i termini tranne l'ultimo si annullano e resta $a = 0$.

Ovviamente è vero anche il viceversa: se un'equazione algebrica di grado n ammette la soluzione $x = 0$, allora il suo polinomio ha il termine noto nullo. Infatti, se $x = 0$ è una soluzione dell'equazione

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + zx^n = 0,$$

sostituendo 0 ad x in ogni termine, tutti i termini tranne l'ultimo si annullano e resta $a = 0$.

Nel seguito, quindi, supporremo sempre che l'equazione non abbia il termine noto pari a zero, perché in questo caso possiamo sempre pensare di raccogliere x ad una opportuna potenza e aggiungere $x = 0$ alle soluzioni che troveremo.

A volte, per risolvere un'equazione di grado maggiore di due, si può tentare di sostituire dei valori.

A volte, per risolvere un'equazione di grado maggiore di due, si può tentare di sostituire dei valori. Se per caso si trova una soluzione, il teorema di Ruffini permette di scomporre il polinomio e trovare un'equazione di grado inferiore che forse è più semplice da risolvere.

A volte, per risolvere un'equazione di grado maggiore di due, si può tentare di sostituire dei valori. Se per caso si trova una soluzione, il teorema di Ruffini permette di scomporre il polinomio e trovare un'equazione di grado inferiore che forse è più semplice da risolvere. Non bisogna dimenticare, nel caso di equazioni a coefficienti interi, che le soluzioni razionali possono solo essere rapporti tra i divisori del termine noto e quelli del primo coefficiente.

Esempio

Risolvere l'equazione

$$3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Esempio

Risolvere l'equazione

$$3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$$

I divisori del primo coefficiente sono $\pm 1, \pm 3$ e quelli del termine noto ± 1 .
Le possibili soluzioni razionali sono allora tutti i possibili rapporti dei primi con i secondi, ossia ± 1 e $\pm 1/3$.

Esempio

Risolvere l'equazione

$$3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$$

I divisori del primo coefficiente sono $\pm 1, \pm 3$ e quelli del termine noto ± 1 .
Le possibili soluzioni razionali sono allora tutti i possibili rapporti dei primi con i secondi, ossia ± 1 e $\pm 1/3$.

Con infinita pazienza si scopre che $P(1/3) = 0$.

Esempio

Risolvere l'equazione

$$3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$$

I divisori del primo coefficiente sono $\pm 1, \pm 3$ e quelli del termine noto ± 1 .
Le possibili soluzioni razionali sono allora tutti i possibili rapporti dei primi con i secondi, ossia ± 1 e $\pm 1/3$.

Con infinita pazienza si scopre che $P(1/3) = 0$. Applichiamo allora il metodo di Ruffini:

Esempio

Risolvere l'equazione

$$3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$$

I divisori del primo coefficiente sono $\pm 1, \pm 3$ e quelli del termine noto ± 1 .
Le possibili soluzioni razionali sono allora tutti i possibili rapporti dei primi con i secondi, ossia ± 1 e $\pm 1/3$.

Con infinita pazienza si scopre che $P(1/3) = 0$. Applichiamo allora il metodo di Ruffini:

	3	+2	-4	+1
1/3		1	1	-1
	3	3	-3	0

Ne segue che l'equazione si scompone in

Ne segue che l'equazione si scompone in

$$3(x^2 + x - 1) \left(x - \frac{1}{3} \right) = (x^2 + x - 1)(3x - 1) = 0.$$

Ne segue che l'equazione si scompone in

$$3(x^2 + x - 1) \left(x - \frac{1}{3} \right) = (x^2 + x - 1)(3x - 1) = 0.$$

Le altre due soluzioni si trovano allora risolvendo l'equazione di secondo grado

Ne segue che l'equazione si scompone in

$$3(x^2 + x - 1) \left(x - \frac{1}{3} \right) = (x^2 + x - 1)(3x - 1) = 0.$$

Le altre due soluzioni si trovano allora risolvendo l'equazione di secondo grado

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Ne segue che l'equazione si scompone in

$$3(x^2 + x - 1) \left(x - \frac{1}{3}\right) = (x^2 + x - 1)(3x - 1) = 0.$$

Le altre due soluzioni si trovano allora risolvendo l'equazione di secondo grado

$$x^2 + x - 1 = 0$$

e sono

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Equazioni binomie

Definizione

Un'equazione binomia è un'equazione algebrica in x contenente due monomi, dei quali uno costante.

Equazioni binomie

Definizione

Un'equazione binomia è un'equazione algebrica in x contenente due monomi, dei quali uno costante.

Per farla semplice, un'equazione binomia è del tipo

Equazioni binomie

Definizione

Un'equazione binomia è un'equazione algebrica in x contenente due monomi, dei quali uno costante.

Per farla semplice, un'equazione binomia è del tipo

$$ax^n + b = 0$$

Equazioni binomie

Definizione

Un'equazione binomia è un'equazione algebrica in x contenente due monomi, dei quali uno costante.

Per farla semplice, un'equazione binomia è del tipo

$$ax^n + b = 0$$

con $a \neq 0$.

Equazioni binomie

Definizione

Un'equazione binomia è un'equazione algebrica in x contenente due monomi, dei quali uno costante.

Per farla semplice, un'equazione binomia è del tipo

$$ax^n + b = 0$$

con $a \neq 0$.

Siccome poi abbiamo supposto di aver già raccolto e trovato le eventuali soluzioni nulle, avremo anche $b \neq 0$

Equazioni binomie

Definizione

Un'equazione binomia è un'equazione algebrica in x contenente due monomi, dei quali uno costante.

Per farla semplice, un'equazione binomia è del tipo

$$ax^n + b = 0$$

con $a \neq 0$.

Siccome poi abbiamo supposto di aver già raccolto e trovato le eventuali soluzioni nulle, avremo anche $b \neq 0$ (e in effetti è arduo chiamare "binomia" l'equazione $2x^3 = 0$).

Equazioni binomie

Definizione

Un'equazione binomia è un'equazione algebrica in x contenente due monomi, dei quali uno costante.

Per farla semplice, un'equazione binomia è del tipo

$$ax^n + b = 0$$

con $a \neq 0$.

Siccome poi abbiamo supposto di aver già raccolto e trovato le eventuali soluzioni nulle, avremo anche $b \neq 0$ (e in effetti è arduo chiamare "binomia" l'equazione $2x^3 = 0$).

Esempi di equazioni binomie sono

Equazioni binomie

Definizione

Un'equazione binomia è un'equazione algebrica in x contenente due monomi, dei quali uno costante.

Per farla semplice, un'equazione binomia è del tipo

$$ax^n + b = 0$$

con $a \neq 0$.

Siccome poi abbiamo supposto di aver già raccolto e trovato le eventuali soluzioni nulle, avremo anche $b \neq 0$ (e in effetti è arduo chiamare "binomia" l'equazione $2x^3 = 0$).

Esempi di equazioni binomie sono

$$x^3 + 1 = 0, \quad x^5 - 6 = 0, \quad 4x^8 - 77 = 0, \quad \sqrt{2}x^6 + 1 = 0.$$

Equazioni binomie

Definizione

Un'equazione binomia è un'equazione algebrica in x contenente due monomi, dei quali uno costante.

Per farla semplice, un'equazione binomia è del tipo

$$ax^n + b = 0$$

con $a \neq 0$.

Siccome poi abbiamo supposto di aver già raccolto e trovato le eventuali soluzioni nulle, avremo anche $b \neq 0$ (e in effetti è arduo chiamare "binomia" l'equazione $2x^3 = 0$).

Esempi di equazioni binomie sono

$$x^3 + 1 = 0, \quad x^5 - 6 = 0, \quad 4x^8 - 77 = 0, \quad \sqrt{2}x^6 + 1 = 0.$$

Le equazioni binomie si comportano in maniera differente a seconda che n , il grado dell'equazione, sia pari o dispari.

Teorema

Data l'equazione binomia

$$ax^n + b = 0$$

Teorema

Data l'equazione binomia

$$ax^n + b = 0$$

poniamo $q = -b/a$. Allora

Teorema

Data l'equazione binomia

$$ax^n + b = 0$$

poniamo $q = -b/a$. Allora

- 1 *se n è dispari, vi è un'unica soluzione reale $x = \sqrt[n]{q}$, che ha il segno di q .*

Teorema

Data l'equazione binomia

$$ax^n + b = 0$$

poniamo $q = -b/a$. Allora

- ❶ *se n è dispari, vi è un'unica soluzione reale $x = \sqrt[n]{q}$, che ha il segno di q .*
- ❷ *se n è pari, allora se $q > 0$ vi sono esattamente due soluzioni reali $x = \pm \sqrt[n]{q}$,*

Teorema

Data l'equazione binomia

$$ax^n + b = 0$$

poniamo $q = -b/a$. Allora

- ❶ *se n è dispari, vi è un'unica soluzione reale $x = \sqrt[n]{q}$, che ha il segno di q .*
- ❷ *se n è pari, allora se $q > 0$ vi sono esattamente due soluzioni reali $x = \pm \sqrt[n]{q}$, mentre se $q < 0$ non vi sono soluzioni reali.*

Teorema

Data l'equazione binomia

$$ax^n + b = 0$$

poniamo $q = -b/a$. Allora

- ❶ *se n è dispari, vi è un'unica soluzione reale $x = \sqrt[n]{q}$, che ha il segno di q .*
- ❷ *se n è pari, allora se $q > 0$ vi sono esattamente due soluzioni reali $x = \pm \sqrt[n]{q}$, mentre se $q < 0$ non vi sono soluzioni reali.*

Osserviamo che q esiste ed è non nullo perché abbiamo supposto $a, b \neq 0$.

Dimostrazione. Dall'equazione segue

Dimostrazione. Dall'equazione segue

$$x^n = -\frac{b}{a} = q.$$

Dimostrazione. Dall'equazione segue

$$x^n = -\frac{b}{a} = q.$$

Quindi, se n è dispari, si deve avere $x = \sqrt[n]{q}$, e questa soluzione è unica perché è unica la radice n -esima algebrica (con n dispari) di un qualsiasi numero reale.

Dimostrazione. Dall'equazione segue

$$x^n = -\frac{b}{a} = q.$$

Quindi, se n è dispari, si deve avere $x = \sqrt[n]{q}$, e questa soluzione è unica perché è unica la radice n -esima algebrica (con n dispari) di un qualsiasi numero reale. Questa radice ha anche il segno di q .

Dimostrazione. Dall'equazione segue

$$x^n = -\frac{b}{a} = q.$$

Quindi, se n è dispari, si deve avere $x = \sqrt[n]{q}$, e questa soluzione è unica perché è unica la radice n -esima algebrica (con n dispari) di un qualsiasi numero reale. Questa radice ha anche il segno di q .

Invece, se n è pari e $q < 0$, l'equazione è impossibile perché x^n è di fatto un quadrato (es. x^4, x^6 , ecc.) e dunque sempre positivo, e non può mai essere uguale a un numero $q < 0$.

Dimostrazione. Dall'equazione segue

$$x^n = -\frac{b}{a} = q.$$

Quindi, se n è dispari, si deve avere $x = \sqrt[n]{q}$, e questa soluzione è unica perché è unica la radice n -esima algebrica (con n dispari) di un qualsiasi numero reale. Questa radice ha anche il segno di q .

Invece, se n è pari e $q < 0$, l'equazione è impossibile perché x^n è di fatto un quadrato (es. x^4, x^6 , ecc.) e dunque sempre positivo, e non può mai essere uguale a un numero $q < 0$.

Infine, sempre se n è pari e $q > 0$, $x = \sqrt[n]{q}$ è l'unica soluzione positiva dell'equazione, per l'unicità della radice n -esima aritmetica di q . Ma evidentemente anche $-\sqrt[n]{q}$ è una soluzione, ed è l'unica negativa per lo stesso motivo.

Dimostrazione. Dall'equazione segue

$$x^n = -\frac{b}{a} = q.$$

Quindi, se n è dispari, si deve avere $x = \sqrt[n]{q}$, e questa soluzione è unica perché è unica la radice n -esima algebrica (con n dispari) di un qualsiasi numero reale. Questa radice ha anche il segno di q .

Invece, se n è pari e $q < 0$, l'equazione è impossibile perché x^n è di fatto un quadrato (es. x^4, x^6 , ecc.) e dunque sempre positivo, e non può mai essere uguale a un numero $q < 0$.

Infine, sempre se n è pari e $q > 0$, $x = \sqrt[n]{q}$ è l'unica soluzione positiva dell'equazione, per l'unicità della radice n -esima aritmetica di q . Ma evidentemente anche $-\sqrt[n]{q}$ è una soluzione, ed è l'unica negativa per lo stesso motivo. Questo completa la dimostrazione. ■

In pratica, il teorema dice di ricavare x^n dall'equazione come se fosse di primo grado, e poi analizzare la possibilità di estrarre la radice n -esima.

In pratica, il teorema dice di ricavare x^n dall'equazione come se fosse di primo grado, e poi analizzare la possibilità di estrarre la radice n -esima.

Esempi

RisolviAMO l'equazione binomia

In pratica, il teorema dice di ricavare x^n dall'equazione come se fosse di primo grado, e poi analizzare la possibilità di estrarre la radice n -esima.

Esempi

RisolviAMO l'equazione binomia

$$x^5 + 243 = 0.$$

In pratica, il teorema dice di ricavare x^n dall'equazione come se fosse di primo grado, e poi analizzare la possibilità di estrarre la radice n -esima.

Esempi

RisolviAMO l'equazione binomia

$$x^5 + 243 = 0.$$

Abbiamo

$$x^5 = -243$$

In pratica, il teorema dice di ricavare x^n dall'equazione come se fosse di primo grado, e poi analizzare la possibilità di estrarre la radice n -esima.

Esempi

RisolviAMO l'equazione binomia

$$x^5 + 243 = 0.$$

Abbiamo

$$x^5 = -243$$

per cui $x = \sqrt[5]{-243} = -3.$

In pratica, il teorema dice di ricavare x^n dall'equazione come se fosse di primo grado, e poi analizzare la possibilità di estrarre la radice n -esima.

Esempi

RisolviAMO l'equazione binomia

$$x^5 + 243 = 0.$$

Abbiamo

$$x^5 = -243$$

per cui $x = \sqrt[5]{-243} = -3$.

Data invece l'equazione

$$81x^4 - 32 = 0$$

In pratica, il teorema dice di ricavare x^n dall'equazione come se fosse di primo grado, e poi analizzare la possibilità di estrarre la radice n -esima.

Esempi

Risolviamo l'equazione binomia

$$x^5 + 243 = 0.$$

Abbiamo

$$x^5 = -243$$

per cui $x = \sqrt[5]{-243} = -3$.

Data invece l'equazione

$$81x^4 - 32 = 0$$

troviamo

$$x^4 = \frac{32}{81}.$$

In pratica, il teorema dice di ricavare x^n dall'equazione come se fosse di primo grado, e poi analizzare la possibilità di estrarre la radice n -esima.

Esempi

Risolviamo l'equazione binomia

$$x^5 + 243 = 0.$$

Abbiamo

$$x^5 = -243$$

per cui $x = \sqrt[5]{-243} = -3$.

Data invece l'equazione

$$81x^4 - 32 = 0$$

troviamo

$$x^4 = \frac{32}{81}.$$

Qui $q = 32/81 > 0$ e $n = 4$ è pari, per cui avremo due soluzioni reali

In pratica, il teorema dice di ricavare x^n dall'equazione come se fosse di primo grado, e poi analizzare la possibilità di estrarre la radice n -esima.

Esempi

Risolviamo l'equazione binomia

$$x^5 + 243 = 0.$$

Abbiamo

$$x^5 = -243$$

per cui $x = \sqrt[5]{-243} = -3$.

Data invece l'equazione

$$81x^4 - 32 = 0$$

troviamo

$$x^4 = \frac{32}{81}.$$

Qui $q = 32/81 > 0$ e $n = 4$ è pari, per cui avremo due soluzioni reali

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{32}{81}} = \pm \frac{2\sqrt[4]{2}}{3}.$$

Esempi

Risolviamo l'equazione binomia

Esempi

Risolviamo l'equazione binomia

$$8x^3 - 1 = 0.$$

Esempi

Risolvi l'equazione binomia

$$8x^3 - 1 = 0.$$

Abbiamo

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

Esempi

Risolviamo l'equazione binomia

$$8x^3 - 1 = 0.$$

Abbiamo

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

per cui $x = 1/2$.

Esempi

Risolviamo l'equazione binomia

$$8x^3 - 1 = 0.$$

Abbiamo

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

per cui $x = 1/2$.

Data invece l'equazione

$$2x^6 + 21 = 0$$

Esempi

Risolviamo l'equazione binomia

$$8x^3 - 1 = 0.$$

Abbiamo

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

per cui $x = 1/2$.

Data invece l'equazione

$$2x^6 + 21 = 0$$

troviamo

$$x^4 = -\frac{21}{2}.$$

Esempi

Risolvi l'equazione binomia

$$8x^3 - 1 = 0.$$

Abbiamo

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

per cui $x = 1/2$.

Data invece l'equazione

$$2x^6 + 21 = 0$$

troviamo

$$x^4 = -\frac{21}{2}.$$

Qui $q = 21/2 < 0$ e $n = 4$ è pari, per cui non ci sono soluzioni reali.

Se le equazioni sono letterali, bisognerà distinguere i vari casi in cui q sarà positivo o negativo quando n è pari.

Se le equazioni sono letterali, bisognerà distinguere i vari casi in cui q sarà positivo o negativo quando n è pari. Per esempio, nell'equazione

Se le equazioni sono letterali, bisognerà distinguere i vari casi in cui q sarà positivo o negativo quando n è pari. Per esempio, nell'equazione

$$x^4 + a - 3 = 0$$

Se le equazioni sono letterali, bisognerà distinguere i vari casi in cui q sarà positivo o negativo quando n è pari. Per esempio, nell'equazione

$$x^4 + a - 3 = 0$$

si deve avere

$$x^4 = 3 - a.$$

Dunque, se $3 - a \geq 0$, cioè se $a \leq 3$, le soluzioni sono $x = \pm \sqrt[4]{3 - a}$, mentre se $a > 3$ non vi sono soluzioni reali.

Se le equazioni sono letterali, bisognerà distinguere i vari casi in cui q sarà positivo o negativo quando n è pari. Per esempio, nell'equazione

$$x^4 + a - 3 = 0$$

si deve avere

$$x^4 = 3 - a.$$

Dunque, se $3 - a \geq 0$, cioè se $a \leq 3$, le soluzioni sono $x = \pm \sqrt[4]{3 - a}$, mentre se $a > 3$ non vi sono soluzioni reali. (In questo caso dobbiamo usare il ≥ 0 perché $a - 3$ potrebbe essere anche nullo e va comunque considerato, anche se a rigore per $a = 3$ l'equazione non è "binomia").

Alcune equazioni si possono trasformare in equazioni binomie con un'opportuna sostituzione. Ne diamo qui sotto un esempio.

Alcune equazioni si possono trasformare in equazioni binomie con un'opportuna sostituzione. Ne diamo qui sotto un esempio.

Esempio

Risolvere l'equazione

$$(x^2 - 3x)^3 + 8 = 0.$$

Alcune equazioni si possono trasformare in equazioni binomie con un'opportuna sostituzione. Ne diamo qui sotto un esempio.

Esempio

Risolvere l'equazione

$$(x^2 - 3x)^3 + 8 = 0.$$

Poniamo $y = x^2 - 3x$, e l'equazione si trasforma in

$$y^3 + 8 = 0.$$

Alcune equazioni si possono trasformare in equazioni binomie con un'opportuna sostituzione. Ne diamo qui sotto un esempio.

Esempio

Risolvere l'equazione

$$(x^2 - 3x)^3 + 8 = 0.$$

Poniamo $y = x^2 - 3x$, e l'equazione si trasforma in

$$y^3 + 8 = 0.$$

Da qui segue $y^3 = -8$ e dunque, siccome $n = 3$ è dispari, $y = -2$.

Alcune equazioni si possono trasformare in equazioni binomie con un'opportuna sostituzione. Ne diamo qui sotto un esempio.

Esempio

Risolvere l'equazione

$$(x^2 - 3x)^3 + 8 = 0.$$

Poniamo $y = x^2 - 3x$, e l'equazione si trasforma in

$$y^3 + 8 = 0.$$

Da qui segue $y^3 = -8$ e dunque, siccome $n = 3$ è dispari, $y = -2$.

Adesso, siccome $y = -2$, resta da risolvere l'equazione

Alcune equazioni si possono trasformare in equazioni binomie con un'opportuna sostituzione. Ne diamo qui sotto un esempio.

Esempio

Risolvere l'equazione

$$(x^2 - 3x)^3 + 8 = 0.$$

Poniamo $y = x^2 - 3x$, e l'equazione si trasforma in

$$y^3 + 8 = 0.$$

Da qui segue $y^3 = -8$ e dunque, siccome $n = 3$ è dispari, $y = -2$.

Adesso, siccome $y = -2$, resta da risolvere l'equazione

$$\underbrace{x^2 - 3x}_y = -2.$$

Alcune equazioni si possono trasformare in equazioni binomie con un'opportuna sostituzione. Ne diamo qui sotto un esempio.

Esempio

Risolvere l'equazione

$$(x^2 - 3x)^3 + 8 = 0.$$

Poniamo $y = x^2 - 3x$, e l'equazione si trasforma in

$$y^3 + 8 = 0.$$

Da qui segue $y^3 = -8$ e dunque, siccome $n = 3$ è dispari, $y = -2$.

Adesso, siccome $y = -2$, resta da risolvere l'equazione

$$\underbrace{x^2 - 3x}_y = -2.$$

Questa è un'equazione di secondo grado che risolta, fornisce le due soluzioni $x = 1, x = 2$.

Equazioni trinomie

Definizione

Equazioni trinomie

Definizione

Un'equazione trinomia è un'equazione algebrica di grado maggiore di 2 in x riconducibile, con la sostituzione $x^n = y$, a un'equazione di secondo grado in y .

Equazioni trinomie

Definizione

Un'equazione trinomia è un'equazione algebrica di grado maggiore di 2 in x riconducibile, con la sostituzione $x^n = y$, a un'equazione di secondo grado in y .

In altre parole, un'equazione trinomia è della forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

dove $a \neq 0$ e, se vogliamo escludere soluzioni nulle già considerate, anche $c \neq 0$.

Equazioni trinomie

Definizione

Un'equazione trinomia è un'equazione algebrica di grado maggiore di 2 in x riconducibile, con la sostituzione $x^n = y$, a un'equazione di secondo grado in y .

In altre parole, un'equazione trinomia è della forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

dove $a \neq 0$ e, se vogliamo escludere soluzioni nulle già considerate, anche $c \neq 0$. Osserviamo che se $b = 0$ l'equazione diventa binomia, per cui, volendo, possiamo anche supporre $b \neq 0$.

Equazioni trinomie

Definizione

Un'equazione trinomia è un'equazione algebrica di grado maggiore di 2 in x riconducibile, con la sostituzione $x^n = y$, a un'equazione di secondo grado in y .

In altre parole, un'equazione trinomia è della forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

dove $a \neq 0$ e, se vogliamo escludere soluzioni nulle già considerate, anche $c \neq 0$. Osserviamo che se $b = 0$ l'equazione diventa binomia, per cui, volendo, possiamo anche supporre $b \neq 0$.

In ogni caso, la sostituzione $x^n = y$ conduce all'equazione di secondo grado completa

Equazioni trinomie

Definizione

Un'equazione trinomia è un'equazione algebrica di grado maggiore di 2 in x riconducibile, con la sostituzione $x^n = y$, a un'equazione di secondo grado in y .

In altre parole, un'equazione trinomia è della forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

dove $a \neq 0$ e, se vogliamo escludere soluzioni nulle già considerate, anche $c \neq 0$. Osserviamo che se $b = 0$ l'equazione diventa binomia, per cui, volendo, possiamo anche supporre $b \neq 0$.

In ogni caso, la sostituzione $x^n = y$ conduce all'equazione di secondo grado completa

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Equazioni trinomie

Definizione

Un'equazione trinomia è un'equazione algebrica di grado maggiore di 2 in x riconducibile, con la sostituzione $x^n = y$, a un'equazione di secondo grado in y .

In altre parole, un'equazione trinomia è della forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

dove $a \neq 0$ e, se vogliamo escludere soluzioni nulle già considerate, anche $c \neq 0$. Osserviamo che se $b = 0$ l'equazione diventa binomia, per cui, volendo, possiamo anche supporre $b \neq 0$.

In ogni caso, la sostituzione $x^n = y$ conduce all'equazione di secondo grado completa

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Una volta risolta questa e trovatene le soluzioni reali y_1, y_2 , se ci sono, si tratterà di risolvere le due equazioni binomie

Equazioni trinomie

Definizione

Un'equazione trinomia è un'equazione algebrica di grado maggiore di 2 in x riconducibile, con la sostituzione $x^n = y$, a un'equazione di secondo grado in y .

In altre parole, un'equazione trinomia è della forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

dove $a \neq 0$ e, se vogliamo escludere soluzioni nulle già considerate, anche $c \neq 0$. Osserviamo che se $b = 0$ l'equazione diventa binomia, per cui, volendo, possiamo anche supporre $b \neq 0$.

In ogni caso, la sostituzione $x^n = y$ conduce all'equazione di secondo grado completa

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Una volta risolta questa e trovatene le soluzioni reali y_1, y_2 , se ci sono, si tratterà di risolvere le due equazioni binomie

$$x^n = y_1 \quad \text{e} \quad x^n = y_2.$$

Osserviamo che una generica equazione formata da un trinomio non è sempre un'equazione trinomia:

Osserviamo che una generica equazione formata da un trinomio non è sempre un'equazione trinomia: per esempio, l'equazione

$$x^3 + x - 1 = 0$$

Osserviamo che una generica equazione formata da un trinomio non è sempre un'equazione trinomia: per esempio, l'equazione

$$x^3 + x - 1 = 0$$

non è trinomia.

Osserviamo che una generica equazione formata da un trinomio non è sempre un'equazione trinomia: per esempio, l'equazione

$$x^3 + x - 1 = 0$$

non è trinomia. In un'equazione trinomia ordinata per grado decrescente, il grado del primo monomio deve essere il doppio del grado del secondo termine.

Osserviamo che una generica equazione formata da un trinomio non è sempre un'equazione trinomia: per esempio, l'equazione

$$x^3 + x - 1 = 0$$

non è trinomia. In un'equazione trinomia ordinata per grado decrescente, il grado del primo monomio deve essere il doppio del grado del secondo termine.

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$3x^6 - 2x^3 - 1 = 0.$$

Osserviamo che una generica equazione formata da un trinomio non è sempre un'equazione trinomia: per esempio, l'equazione

$$x^3 + x - 1 = 0$$

non è trinomia. In un'equazione trinomia ordinata per grado decrescente, il grado del primo monomio deve essere il doppio del grado del secondo termine.

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$3x^6 - 2x^3 - 1 = 0.$$

Poniamo $x^3 = y$ e otteniamo l'equazione

Osserviamo che una generica equazione formata da un trinomio non è sempre un'equazione trinomia: per esempio, l'equazione

$$x^3 + x - 1 = 0$$

non è trinomia. In un'equazione trinomia ordinata per grado decrescente, il grado del primo monomio deve essere il doppio del grado del secondo termine.

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$3x^6 - 2x^3 - 1 = 0.$$

Poniamo $x^3 = y$ e otteniamo l'equazione

$$3y^2 - 2y - 1 = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione di secondo grado sono

$$y_{1,2} =$$

Le soluzioni di questa equazione di secondo grado sono

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3}$$

Le soluzioni di questa equazione di secondo grado sono

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3} =$$

Le soluzioni di questa equazione di secondo grado sono

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3} = \nearrow y_1 = -\frac{1}{3}$$

Le soluzioni di questa equazione di secondo grado sono

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3} =$$

$y_1 = -\frac{1}{3}$

$y_2 = 1.$

e dunque dobbiamo risolvere le equazioni binomie

e dunque dobbiamo risolvere le equazioni binomie

$$x^3 = -\frac{1}{3} \quad x^3 = 1.$$

e dunque dobbiamo risolvere le equazioni binomie

$$x^3 = -\frac{1}{3} \quad x^3 = 1.$$

La prima fornisce, con i metodi già visti,

$$x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

e dunque dobbiamo risolvere le equazioni binomie

$$x^3 = -\frac{1}{3} \quad x^3 = 1.$$

La prima fornisce, con i metodi già visti,

$$x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

e la seconda $x = 1$.

Osserviamo che le equazioni trinomie conducono sempre ad equazioni di secondo grado in y .

Osserviamo che le equazioni trinomie conducono sempre ad equazioni di secondo grado in y . Dunque, se queste equazioni non ammettono soluzioni reali, neanche le equazioni binomie che si determineranno ammetteranno soluzioni reali.

Osserviamo che le equazioni trinomie conducono sempre ad equazioni di secondo grado in y . Dunque, se queste equazioni non ammettono soluzioni reali, neanche le equazioni binomie che si determineranno ammetteranno soluzioni reali.

Questo avviene perché se, per esempio, per assurdo y_1 non fosse fosse reale mentre x sì, anche x^n sarebbe reale, e quindi anche y_1 sarebbe reale, contro l'ipotesi.

Osserviamo che le equazioni trinomie conducono sempre ad equazioni di secondo grado in y . Dunque, se queste equazioni non ammettono soluzioni reali, neanche le equazioni binomie che si determineranno ammetteranno soluzioni reali.

Questo avviene perché se, per esempio, per assurdo y_1 non fosse fosse reale mentre x sì, anche x^n sarebbe reale, e quindi anche y_1 sarebbe reale, contro l'ipotesi.

Dunque, se in una equazione trinomina si ha $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, allora sicuramente l'equazione trinomina non ha soluzioni reali.

Osserviamo che le equazioni trinomie conducono sempre ad equazioni di secondo grado in y . Dunque, se queste equazioni non ammettono soluzioni reali, neanche le equazioni binomie che si determineranno ammetteranno soluzioni reali.

Questo avviene perché se, per esempio, per assurdo y_1 non fosse fosse reale mentre x sì, anche x^n sarebbe reale, e quindi anche y_1 sarebbe reale, contro l'ipotesi.

Dunque, se in una equazione trinomia si ha $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, allora sicuramente l'equazione trinomia non ha soluzioni reali.

In ogni caso, anche se l'equazione trinomia è risolubile nel campo reale, non è detto che le equazioni binomie che si vengano a determinare ammettano soluzioni reali, come mostra il prossimo esempio.

Esempio

Risolviamo l'equazione trinomia

$$x^8 - 15x^4 - 16 = 0.$$

Esempio

Risolviamo l'equazione trinomia

$$x^8 - 15x^4 - 16 = 0.$$

Posto come sopra $x^4 = y$, troviamo l'equazione di secondo grado

$$y^2 - 15y - 16 = 0$$

Esempio

RisolviAMO l'equazione trinomia

$$x^8 - 15x^4 - 16 = 0.$$

Posto come sopra $x^4 = y$, troviamo l'equazione di secondo grado

$$y^2 - 15y - 16 = 0$$

che ammette le soluzioni $y_1 = -1, y_2 = 16$.

Esempio

Risolviamo l'equazione trinomia

$$x^8 - 15x^4 - 16 = 0.$$

Posto come sopra $x^4 = y$, troviamo l'equazione di secondo grado

$$y^2 - 15y - 16 = 0$$

che ammette le soluzioni $y_1 = -1, y_2 = 16$.

Ora, delle due equazioni binomie

$$x^4 = -1 \quad \text{e} \quad x^4 = 16$$

Esempio

Risolviamo l'equazione trinomia

$$x^8 - 15x^4 - 16 = 0.$$

Posto come sopra $x^4 = y$, troviamo l'equazione di secondo grado

$$y^2 - 15y - 16 = 0$$

che ammette le soluzioni $y_1 = -1, y_2 = 16$.

Ora, delle due equazioni binomie

$$x^4 = -1 \quad \text{e} \quad x^4 = 16$$

solo la seconda ammette soluzioni reali $x = \pm 2$.

Da quanto detto emerge chiaro che un'equazione trinomia non può ammettere più di quattro soluzioni reali distinte, che corrisponde al caso in cui ognuna delle due equazioni binomie che si ottengono ammetta due soluzioni reali, diverse dalle altre due.

Da quanto detto emerge chiaro che un'equazione trinomia non può ammettere più di quattro soluzioni reali distinte, che corrisponde al caso in cui ognuna delle due equazioni binomie che si ottengono ammetta due soluzioni reali, diverse dalle altre due.

Una proprietà simpatica delle soluzioni delle equazioni trinomie con n pari (tra cui le biquadratiche che vedremo tra poco) è che la somma delle loro soluzioni è sempre zero.

Per vedere questo, limitiamoci al caso di soluzioni reali, e osserviamo che se x è soluzione, anche $-x$ è sicuramente soluzione. Se x e $-x$ sono diversi, è chiaro che la loro somma è zero.

Da quanto detto emerge chiaro che un'equazione trinomia non può ammettere più di quattro soluzioni reali distinte, che corrisponde al caso in cui ognuna delle due equazioni binomie che si ottengono ammetta due soluzioni reali, diverse dalle altre due.

Una proprietà simpatica delle soluzioni delle equazioni trinomie con n pari (tra cui le biquadratiche che vedremo tra poco) è che la somma delle loro soluzioni è sempre zero.

Per vedere questo, limitiamoci al caso di soluzioni reali, e osserviamo che se x è soluzione, anche $-x$ è sicuramente soluzione. Se x e $-x$ sono diversi, è chiaro che la loro somma è zero. Se invece x e $-x$ coincidono, allora $x = 0$ e la somma è ancora zero.

Da quanto detto emerge chiaro che un'equazione trinomia non può ammettere più di quattro soluzioni reali distinte, che corrisponde al caso in cui ognuna delle due equazioni binomie che si ottengono ammetta due soluzioni reali, diverse dalle altre due.

Una proprietà simpatica delle soluzioni delle equazioni trinomie con n pari (tra cui le biquadratiche che vedremo tra poco) è che la somma delle loro soluzioni è sempre zero.

Per vedere questo, limitiamoci al caso di soluzioni reali, e osserviamo che se x è soluzione, anche $-x$ è sicuramente soluzione. Se x e $-x$ sono diversi, è chiaro che la loro somma è zero. Se invece x e $-x$ coincidono, allora $x = 0$ e la somma è ancora zero.

Questa proprietà è vera anche se le soluzioni sono complesse.

Le equazioni trinomie di quarto grado si chiamano anche **biquadratiche**, ma si trattano come tutte le altre equazioni trinomie.

Le equazioni trinomie di quarto grado si chiamano anche **biquadratiche**, ma si trattano come tutte le altre equazioni trinomie.
La forma generale di un'equazione biquadratica è

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

Le equazioni trinomie di quarto grado si chiamano anche **biquadratiche**, ma si trattano come tutte le altre equazioni trinomie.
La forma generale di un'equazione biquadratica è

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

che si trasforma, con la sostituzione $x^2 = y$, in

Le equazioni trinomie di quarto grado si chiamano anche **biquadratiche**, ma si trattano come tutte le altre equazioni trinomie.
La forma generale di un'equazione biquadratica è

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

che si trasforma, con la sostituzione $x^2 = y$, in

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Una proprietà aggiuntiva delle equazioni biquadratiche è che il prodotto delle quattro è pari a c/a , come nelle equazioni di secondo grado.

Una proprietà aggiuntiva delle equazioni biquadratiche è che il prodotto delle quattro è pari a c/a , come nelle equazioni di secondo grado. Infatti, le soluzioni verificano le equazioni

Una proprietà aggiuntiva delle equazioni biquadratiche è che il prodotto delle quattro è pari a c/a , come nelle equazioni di secondo grado. Infatti, le soluzioni verificano le equazioni

$$x^2 - y_1 = 0, \quad x^2 - y_2 = 0$$

Una proprietà aggiuntiva delle equazioni biquadratiche è che il prodotto delle quattro è pari a c/a , come nelle equazioni di secondo grado. Infatti, le soluzioni verificano le equazioni

$$x^2 - y_1 = 0, \quad x^2 - y_2 = 0$$

e quindi, applicando a queste equazioni la formula del prodotto delle soluzioni

Una proprietà aggiuntiva delle equazioni biquadratiche è che il prodotto delle quattro è pari a c/a , come nelle equazioni di secondo grado. Infatti, le soluzioni verificano le equazioni

$$x^2 - y_1 = 0, \quad x^2 - y_2 = 0$$

e quindi, applicando a queste equazioni la formula del prodotto delle soluzioni

$$x_1 x_2 = -y_1, \quad x_3 x_4 = -y_2$$

Una proprietà aggiuntiva delle equazioni biquadratiche è che il prodotto delle quattro è pari a c/a , come nelle equazioni di secondo grado. Infatti, le soluzioni verificano le equazioni

$$x^2 - y_1 = 0, \quad x^2 - y_2 = 0$$

e quindi, applicando a queste equazioni la formula del prodotto delle soluzioni

$$x_1 x_2 = -y_1, \quad x_3 x_4 = -y_2$$

per cui alla fine

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = y_1 y_2.$$

Una proprietà aggiuntiva delle equazioni biquadratiche è che il prodotto delle quattro è pari a c/a , come nelle equazioni di secondo grado. Infatti, le soluzioni verificano le equazioni

$$x^2 - y_1 = 0, \quad x^2 - y_2 = 0$$

e quindi, applicando a queste equazioni la formula del prodotto delle soluzioni

$$x_1 x_2 = -y_1, \quad x_3 x_4 = -y_2$$

per cui alla fine

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = y_1 y_2.$$

Siccome y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione di secondo grado $ay^2 + by + c = 0$, applicando ad esse la formula del prodotto pari a c/a , troviamo infine

Una proprietà aggiuntiva delle equazioni biquadratiche è che il prodotto delle quattro è pari a c/a , come nelle equazioni di secondo grado. Infatti, le soluzioni verificano le equazioni

$$x^2 - y_1 = 0, \quad x^2 - y_2 = 0$$

e quindi, applicando a queste equazioni la formula del prodotto delle soluzioni

$$x_1 x_2 = -y_1, \quad x_3 x_4 = -y_2$$

per cui alla fine

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = y_1 y_2.$$

Siccome y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione di secondo grado $ay^2 + by + c = 0$, applicando ad esse la formula del prodotto pari a c/a , troviamo infine

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{c}{a}.$$

Equazioni reciproche

Definizione

Un'equazione reciproca è un'equazione che, se ammette una soluzione x_1 , deve ammettere anche la soluzione $x_2 = 1/x_1$.

Equazioni reciproche

Definizione

Un'equazione reciproca è un'equazione che, se ammette una soluzione x_1 , deve ammettere anche la soluzione $x_2 = 1/x_1$.

Vediamo subito le equazioni reciproche più facili: quelle di secondo grado della forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Equazioni reciproche

Definizione

Un'equazione reciproca è un'equazione che, se ammette una soluzione x_1 , deve ammettere anche la soluzione $x_2 = 1/x_1$.

Vediamo subito le equazioni reciproche più facili: quelle di secondo grado della forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Siccome le soluzioni sono reciproche, il loro prodotto deve essere pari a 1, quindi $c/a = 1$ e quindi $c = a$.

Equazioni reciproche

Definizione

Un'equazione reciproca è un'equazione che, se ammette una soluzione x_1 , deve ammettere anche la soluzione $x_2 = 1/x_1$.

Vediamo subito le equazioni reciproche più facili: quelle di secondo grado della forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Siccome le soluzioni sono reciproche, il loro prodotto deve essere pari a 1, quindi $c/a = 1$ e quindi $c = a$.

L'equazione è quindi della forma

Equazioni reciproche

Definizione

Un'equazione reciproca è un'equazione che, se ammette una soluzione x_1 , deve ammettere anche la soluzione $x_2 = 1/x_1$.

Vediamo subito le equazioni reciproche più facili: quelle di secondo grado della forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Siccome le soluzioni sono reciproche, il loro prodotto deve essere pari a 1, quindi $c/a = 1$ e quindi $c = a$.

L'equazione è quindi della forma

$$ax^2 + bx + a = 0,$$

Equazioni reciproche

Definizione

Un'equazione reciproca è un'equazione che, se ammette una soluzione x_1 , deve ammettere anche la soluzione $x_2 = 1/x_1$.

Vediamo subito le equazioni reciproche più facili: quelle di secondo grado della forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Siccome le soluzioni sono reciproche, il loro prodotto deve essere pari a 1, quindi $c/a = 1$ e quindi $c = a$.

L'equazione è quindi della forma

$$ax^2 + bx + a = 0,$$

ossia ha i coefficienti simmetrici (a, b, a) .

Notiamo anche che essa si può scrivere nella forma, dividendo per x (che non può essere nullo perché il prodotto delle soluzioni è 1)

Notiamo anche che essa si può scrivere nella forma, dividendo per x (che non può essere nullo perché il prodotto delle soluzioni è 1)

$$ax + b + \frac{a}{x} = 0$$

Notiamo anche che essa si può scrivere nella forma, dividendo per x (che non può essere nullo perché il prodotto delle soluzioni è 1)

$$ax + b + \frac{a}{x} = 0$$

cioè

$$a \left(x + \frac{1}{x} \right) = -b$$

Notiamo anche che essa si può scrivere nella forma, dividendo per x (che non può essere nullo perché il prodotto delle soluzioni è 1)

$$ax + b + \frac{a}{x} = 0$$

cioè

$$a \left(x + \frac{1}{x} \right) = -b$$

e infine, siccome $a \neq 0$,

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{b}{a}.$$

Notiamo anche che essa si può scrivere nella forma, dividendo per x (che non può essere nullo perché il prodotto delle soluzioni è 1)

$$ax + b + \frac{a}{x} = 0$$

cioè

$$a \left(x + \frac{1}{x} \right) = -b$$

e infine, siccome $a \neq 0$,

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{b}{a}.$$

L'espressione

$$x + \frac{1}{x}$$

ricorre spesso nelle equazioni reciproche e la incontreremo nuovamente.

Equazioni reciproche di III grado

Cominciamo con un semplice teorema.

Equazioni reciproche di III grado

Cominciamo con un semplice teorema.

Teorema

Un'equazione reciproca di terzo grado ammette sempre la soluzione $x = 1$ oppure la soluzione $x = -1$.

Equazioni reciproche di III grado

Cominciamo con un semplice teorema.

Teorema

Un'equazione reciproca di terzo grado ammette sempre la soluzione $x = 1$ oppure la soluzione $x = -1$.

Dimostrazione. Supponiamo che x_1 sia una soluzione. Allora anche $x_2 = 1/x_1$ è soluzione, perché l'equazione è reciproca.

Equazioni reciproche di III grado

Cominciamo con un semplice teorema.

Teorema

Un'equazione reciproca di terzo grado ammette sempre la soluzione $x = 1$ oppure la soluzione $x = -1$.

Dimostrazione. Supponiamo che x_1 sia una soluzione. Allora anche $x_2 = 1/x_1$ è soluzione, perché l'equazione è reciproca. A questo punto, se $x_1 = 1$ o $x_1 = -1$, il teorema è dimostrato. Altrimenti, nessuna di queste due soluzioni è 1 o -1.

Equazioni reciproche di III grado

Cominciamo con un semplice teorema.

Teorema

Un'equazione reciproca di terzo grado ammette sempre la soluzione $x = 1$ oppure la soluzione $x = -1$.

Dimostrazione. Supponiamo che x_1 sia una soluzione. Allora anche $x_2 = 1/x_1$ è soluzione, perché l'equazione è reciproca. A questo punto, se $x_1 = 1$ o $x_1 = -1$, il teorema è dimostrato. Altrimenti, nessuna di queste due soluzioni è 1 o -1 . A questo punto, la terza soluzione x_3 non può essere uguale a nessuna delle due precedenti, perché altrimenti dovrebbe essere soluzione anche $1/x_3$, e quindi si avrebbero quattro soluzioni, cosa che un'equazione di terzo grado non può avere.

L'unica possibilità è che x_3 sia la reciproca di se stessa, ossia

L'unica possibilità è che x_3 sia la reciproca di se stessa, ossia

$$x_3 = \frac{1}{x_3}$$

L'unica possibilità è che x_3 sia la reciproca di se stessa, ossia

$$x_3 = \frac{1}{x_3}$$

da cui

L'unica possibilità è che x_3 sia la reciproca di se stessa, ossia

$$x_3 = \frac{1}{x_3}$$

da cui

$$x_3^2 = 1$$

L'unica possibilità è che x_3 sia la reciproca di se stessa, ossia

$$x_3 = \frac{1}{x_3}$$

da cui

$$x_3^2 = 1$$

ossia $x_3 = \pm 1$.

L'unica possibilità è che x_3 sia la reciproca di se stessa, ossia

$$x_3 = \frac{1}{x_3}$$

da cui

$$x_3^2 = 1$$

ossia $x_3 = \pm 1$. Dunque in ogni caso una soluzione è 1 oppure -1 . ■

L'unica possibilità è che x_3 sia la reciproca di se stessa, ossia

$$x_3 = \frac{1}{x_3}$$

da cui

$$x_3^2 = 1$$

ossia $x_3 = \pm 1$. Dunque in ogni caso una soluzione è 1 oppure -1 . ■

Naturalmente è ben possibile che un'equazione di terzo grado ammetta sia la soluzione $x = 1$, sia la soluzione $x = -1$

L'unica possibilità è che x_3 sia la reciproca di se stessa, ossia

$$x_3 = \frac{1}{x_3}$$

da cui

$$x_3^2 = 1$$

ossia $x_3 = \pm 1$. Dunque in ogni caso una soluzione è 1 oppure -1 . ■

Naturalmente è ben possibile che un'equazione di terzo grado ammetta *sia* la soluzione $x = 1$, *sia* la soluzione $x = -1$ (e in questo caso la terza soluzione deve coincidere con una di queste due).

Teorema

Un'equazione di terzo grado è reciproca se e solo se è della forma

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (\text{simmetrica})$$

Teorema

Un'equazione di terzo grado è reciproca se e solo se è della forma

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (\text{simmetrica})$$

oppure

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0 \quad (\text{antisimmetrica}).$$

Dimostrazione (Approfondimento)

Supponiamo che x_1, x_2, x_3 siano le tre soluzioni dell'equazione. Allora, per il teorema di Ruffini, l'equazione si scrive, scomposta in fattori, nella forma

Teorema

Un'equazione di terzo grado è reciproca se e solo se è della forma

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (\text{simmetrica})$$

oppure

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0 \quad (\text{antisimmetrica}).$$

Dimostrazione (Approfondimento)

Supponiamo che x_1, x_2, x_3 siano le tre soluzioni dell'equazione. Allora, per il teorema di Ruffini, l'equazione si scrive, scomposta in fattori, nella forma

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

Teorema

Un'equazione di terzo grado è reciproca se e solo se è della forma

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (\text{simmetrica})$$

oppure

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0 \quad (\text{antisimmetrica}).$$

Dimostrazione (Approfondimento)

Supponiamo che x_1, x_2, x_3 siano le tre soluzioni dell'equazione. Allora, per il teorema di Ruffini, l'equazione si scrive, scomposta in fattori, nella forma

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

Supponiamo che l'equazione sia reciproca.

Teorema

Un'equazione di terzo grado è reciproca se e solo se è della forma

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (\text{simmetrica})$$

oppure

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0 \quad (\text{antisimmetrica}).$$

Dimostrazione (Approfondimento)

Supponiamo che x_1, x_2, x_3 siano le tre soluzioni dell'equazione. Allora, per il teorema di Ruffini, l'equazione si scrive, scomposta in fattori, nella forma

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

Supponiamo che l'equazione sia reciproca. Allora sappiamo già che una soluzione è $x = 1$ o $x = -1$.

Supponiamo allora $x_3 = 1$, per cui l'equazione è

Supponiamo allora $x_3 = 1$, per cui l'equazione è

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - 1) = 0.$$

Supponiamo allora $x_3 = 1$, per cui l'equazione è

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - 1) = 0.$$

Sviluppiamo il prodotto dei primi due polinomi e troviamo

$$a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x - 1) = 0.$$

Supponiamo allora $x_3 = 1$, per cui l'equazione è

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - 1) = 0.$$

Sviluppiamo il prodotto dei primi due polinomi e troviamo

$$a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x - 1) = 0.$$

Siccome l'equazione è reciproca, il prodotto x_1x_2 è pari a 1. Poniamo allora $x_1 + x_2 = s$ e riscriviamo il tutto:

Supponiamo allora $x_3 = 1$, per cui l'equazione è

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - 1) = 0.$$

Sviluppiamo il prodotto dei primi due polinomi e troviamo

$$a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x - 1) = 0.$$

Siccome l'equazione è reciproca, il prodotto x_1x_2 è pari a 1. Poniamo allora $x_1 + x_2 = s$ e riscriviamo il tutto:

$$a(x^2 - sx + 1)(x - 1) = 0.$$

Supponiamo allora $x_3 = 1$, per cui l'equazione è

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - 1) = 0.$$

Sviluppiamo il prodotto dei primi due polinomi e troviamo

$$a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x - 1) = 0.$$

Siccome l'equazione è reciproca, il prodotto x_1x_2 è pari a 1. Poniamo allora $x_1 + x_2 = s$ e riscriviamo il tutto:

$$a(x^2 - sx + 1)(x - 1) = 0.$$

Sviluppiamo i calcoli e troviamo

Supponiamo allora $x_3 = 1$, per cui l'equazione è

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - 1) = 0.$$

Sviluppiamo il prodotto dei primi due polinomi e troviamo

$$a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x - 1) = 0.$$

Siccome l'equazione è reciproca, il prodotto x_1x_2 è pari a 1. Poniamo allora $x_1 + x_2 = s$ e riscriviamo il tutto:

$$a(x^2 - sx + 1)(x - 1) = 0.$$

Sviluppiamo i calcoli e troviamo

$$a(x^3 - (s+1)x^2 + (s+1)x - 1) = ax^3 - \underbrace{a(s+1)}_{-b}x^2 + \underbrace{a(s+1)}_bx - a = 0.$$

Come vediamo, i coefficienti sono simmetrici con segni opposti, ossia il polinomio è antisimmetrico.

Supponiamo invece $x_3 = -1$, per cui l'equazione è

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x + 1) = 0.$$

Supponiamo invece $x_3 = -1$, per cui l'equazione è

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x + 1) = 0.$$

Sviluppiamo il prodotto dei primi due polinomi e troviamo come prima

$$a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x + 1) = 0.$$

Supponiamo invece $x_3 = -1$, per cui l'equazione è

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x + 1) = 0.$$

Sviluppiamo il prodotto dei primi due polinomi e troviamo come prima

$$a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x + 1) = 0.$$

Siccome l'equazione è reciproca, avremo $x_1x_2 = 1$. Poniamo allora $x_1 + x_2 = s$ e riscriviamo il tutto:

Supponiamo invece $x_3 = -1$, per cui l'equazione è

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x + 1) = 0.$$

Sviluppiamo il prodotto dei primi due polinomi e troviamo come prima

$$a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x + 1) = 0.$$

Siccome l'equazione è reciproca, avremo $x_1x_2 = 1$. Poniamo allora $x_1 + x_2 = s$ e riscriviamo il tutto:

$$a(x^2 - sx + 1)(x + 1) = 0.$$

Supponiamo invece $x_3 = -1$, per cui l'equazione è

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x + 1) = 0.$$

Sviluppiamo il prodotto dei primi due polinomi e troviamo come prima

$$a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x + 1) = 0.$$

Siccome l'equazione è reciproca, avremo $x_1x_2 = 1$. Poniamo allora $x_1 + x_2 = s$ e riscriviamo il tutto:

$$a(x^2 - sx + 1)(x + 1) = 0.$$

Sviluppiamo i calcoli e troviamo

Supponiamo invece $x_3 = -1$, per cui l'equazione è

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x + 1) = 0.$$

Sviluppiamo il prodotto dei primi due polinomi e troviamo come prima

$$a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)(x + 1) = 0.$$

Siccome l'equazione è reciproca, avremo $x_1x_2 = 1$. Poniamo allora $x_1 + x_2 = s$ e riscriviamo il tutto:

$$a(x^2 - sx + 1)(x + 1) = 0.$$

Sviluppiamo i calcoli e troviamo

$$a(x^3 + (1 - s)x^2 + (1 - s)x - 1) = ax^3 + \underbrace{a(1 - s)}_b x^2 + \underbrace{a(1 - s)}_b x + a = 0.$$

Come vediamo, stavolta i coefficienti sono simmetrici con segni uguali, cioè il polinomio è simmetrico.

Viceversa, supponiamo che sia data l'equazione antisimmetrica

Viceversa, supponiamo che sia data l'equazione antisimmetrica

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$$

Viceversa, supponiamo che sia data l'equazione antisimmetrica

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$$

Osserviamo che $x = 1$ è una soluzione.

Viceversa, supponiamo che sia data l'equazione antisimmetrica

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$$

Osserviamo che $x = 1$ è una soluzione. Infatti

$$P(1) = a + b - b - a = 0.$$

Allora procediamo con il metodo di Ruffini e troviamo

Viceversa, supponiamo che sia data l'equazione antisimmetrica

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$$

Osserviamo che $x = 1$ è una soluzione. Infatti

$$P(1) = a + b - b - a = 0.$$

Allora procediamo con il metodo di Ruffini e troviamo

1	a	b	$-b$	$-a$
	a	$a + b$	$a + b$	a
	a	$a + b$	a	0

Riassumendo, troviamo l'equazione scomposta

$$(ax^2 + (a + b)x + a)(x - 1) = 0.$$

Riassumendo, troviamo l'equazione scomposta

$$(ax^2 + (a + b)x + a)(x - 1) = 0.$$

Le altre due soluzioni verificano l'equazione

$$ax^2 + (a + b)x + a = 0$$

Riassumendo, troviamo l'equazione scomposta

$$(ax^2 + (a + b)x + a)(x - 1) = 0.$$

Le altre due soluzioni verificano l'equazione

$$ax^2 + (a + b)x + a = 0$$

e sono reciproche, perché il loro prodotto è $a/a = 1$.

Riassumendo, troviamo l'equazione scomposta

$$(ax^2 + (a + b)x + a)(x - 1) = 0.$$

Le altre due soluzioni verificano l'equazione

$$ax^2 + (a + b)x + a = 0$$

e sono reciproche, perché il loro prodotto è $a/a = 1$.

Se invece l'equazione è simmetrica

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

Riassumendo, troviamo l'equazione scomposta

$$(ax^2 + (a + b)x + a)(x - 1) = 0.$$

Le altre due soluzioni verificano l'equazione

$$ax^2 + (a + b)x + a = 0$$

e sono reciproche, perché il loro prodotto è $a/a = 1$.

Se invece l'equazione è simmetrica

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

il calcolo è simile ma stavolta la soluzione è $x = -1$.

Riassumendo, troviamo l'equazione scomposta

$$(ax^2 + (a + b)x + a)(x - 1) = 0.$$

Le altre due soluzioni verificano l'equazione

$$ax^2 + (a + b)x + a = 0$$

e sono reciproche, perché il loro prodotto è $a/a = 1$.

Se invece l'equazione è simmetrica

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

il calcolo è simile ma stavolta la soluzione è $x = -1$. Infatti

$$P(-1) = -a + b - b + a = 0$$

e il metodo di Ruffini dà stavolta

$$\begin{array}{r|rrrr} & a & b & b & a \\ -1 & & -a & a-b & -a \\ \hline & a & b-a & a & 0 \end{array}$$

e il metodo di Ruffini dà stavolta

$$\begin{array}{r|rrr|r} & a & b & b & a \\ -1 & & -a & a-b & -a \\ \hline & a & b-a & a & 0 \end{array}$$

per cui resta da risolvere l'equazione

$$ax^2 + (b-a)x + a = 0$$

e il metodo di Ruffini dà stavolta

$$\begin{array}{r|rrr|r} & a & b & b & a \\ -1 & & -a & a-b & -a \\ \hline & a & b-a & a & 0 \end{array}$$

per cui resta da risolvere l'equazione

$$ax^2 + (b-a)x + a = 0$$

che fornisce ancora una volta soluzioni reciproche.

e il metodo di Ruffini dà stavolta

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & a & b & b & a \\
 -1 & & -a & a-b & -a \\
 \hline
 & a & b-a & a & 0
 \end{array}$$

per cui resta da risolvere l'equazione

$$ax^2 + (b-a)x + a = 0$$

che fornisce ancora una volta soluzioni reciproche. Il teorema è così completamente dimostrato. ■

e il metodo di Ruffini dà stavolta

$$\begin{array}{r|rrrr} & a & b & b & a \\ -1 & & -a & a-b & -a \\ \hline & a & b-a & a & 0 \end{array}$$

per cui resta da risolvere l'equazione

$$ax^2 + (b-a)x + a = 0$$

che fornisce ancora una volta soluzioni reciproche. Il teorema è così completamente dimostrato. ■

Nel seguito chiameremo *simmetrici* e *antisimmetrici* dei polinomi a coefficienti simmetrici, rispettivamente con segni uguali od opposti in posizione simmetrica, come

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \quad (\text{simmetrico})$$

$$8x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x - 8 \quad (\text{antisimmetrico}).$$

Il teorema offre anche un metodo per risolvere le equazioni di terzo grado reciproche, in quanto una soluzione è sempre $+1$ o -1 , a seconda che sia antisimmetrica o simmetrica rispettivamente.

Il teorema offre anche un metodo per risolvere le equazioni di terzo grado reciproche, in quanto una soluzione è sempre $+1$ o -1 , a seconda che sia antisimmetrica o simmetrica rispettivamente.

Esempio

Risolvere l'equazione reciproca di terzo grado

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0.$$

Il teorema offre anche un metodo per risolvere le equazioni di terzo grado reciproche, in quanto una soluzione è sempre $+1$ o -1 , a seconda che sia antisimmetrica o simmetrica rispettivamente.

Esempio

Risolvere l'equazione reciproca di terzo grado

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0.$$

Siccome è antisimmetrica, una soluzione è $x_1 = 1$.

Il teorema offre anche un metodo per risolvere le equazioni di terzo grado reciproche, in quanto una soluzione è sempre $+1$ o -1 , a seconda che sia antisimmetrica o simmetrica rispettivamente.

Esempio

Risolvere l'equazione reciproca di terzo grado

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0.$$

Siccome è antisimmetrica, una soluzione è $x_1 = 1$. Con il metodo di Ruffini abbiamo poi

	2	-7	7	-2
1		2	-5	2
	2	-5	2	0

pertanto l'equazione scomposta è

$$(2x^2 - 5x + 2)(x - 1) = 0$$

pertanto l'equazione scomposta è

$$(2x^2 - 5x + 2)(x - 1) = 0$$

e le altre due soluzioni verificano l'equazione $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

pertanto l'equazione scomposta è

$$(2x^2 - 5x + 2)(x - 1) = 0$$

e le altre due soluzioni verificano l'equazione $2x^2 - 5x + 2 = 0$.
Risolvendo l'equazione risulta

$$x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

Esempio

Risolvere l'equazione reciproca di terzo grado

$$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0.$$

Esempio

Risolvere l'equazione reciproca di terzo grado

$$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0.$$

Siccome è simmetrica, una soluzione è $x_1 = -1$.

Esempio

Risolvere l'equazione reciproca di terzo grado

$$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0.$$

Siccome è simmetrica, una soluzione è $x_1 = -1$. Con il metodo di Ruffini abbiamo

	3	13	13	3
-1		-3	-10	-3
	3	10	3	0

Esempio

Risolvere l'equazione reciproca di terzo grado

$$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0.$$

Siccome è simmetrica, una soluzione è $x_1 = -1$. Con il metodo di Ruffini abbiamo

	3	13	13	3
-1		-3	-10	-3
	3	10	3	0

pertanto l'equazione scomposta è

$$(3x^2 + 10x + 3)(x + 1) = 0$$

Esempio

Risolvere l'equazione reciproca di terzo grado

$$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0.$$

Siccome è simmetrica, una soluzione è $x_1 = -1$. Con il metodo di Ruffini abbiamo

	3	13	13	3
-1		-3	-10	-3
	3	10	3	0

pertanto l'equazione scomposta è

$$(3x^2 + 10x + 3)(x + 1) = 0$$

e le altre due soluzioni verificano l'equazione $3x^2 + 10x + 3 = 0$.

Esempio

Risolvere l'equazione reciproca di terzo grado

$$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0.$$

Siccome è simmetrica, una soluzione è $x_1 = -1$. Con il metodo di Ruffini abbiamo

	3	13	13	3
-1		-3	-10	-3
	3	10	3	0

pertanto l'equazione scomposta è

$$(3x^2 + 10x + 3)(x + 1) = 0$$

e le altre due soluzioni verificano l'equazione $3x^2 + 10x + 3 = 0$.
Risolvendo l'equazione risulta

$$x_2 = -3, \quad x_3 = -\frac{1}{3}.$$

Equazioni reciproche di IV grado

Passiamo alle equazioni reciproche di quarto grado.

Equazioni reciproche di IV grado

Passiamo alle equazioni reciproche di quarto grado. Qui la situazione è leggermente più complicata ma gestibile.

Equazioni reciproche di IV grado

Passiamo alle equazioni reciproche di quarto grado. Qui la situazione è leggermente più complicata ma gestibile.

Vi sono essenzialmente due casi: quello in cui le soluzioni sono *diverse* da $+1$ o -1 e quello in cui alcune soluzioni sono $+1$ o -1 .

Equazioni reciproche di IV grado

Passiamo alle equazioni reciproche di quarto grado. Qui la situazione è leggermente più complicata ma gestibile.

Vi sono essenzialmente due casi: quello in cui le soluzioni sono *diverse* da $+1$ o -1 e quello in cui alcune soluzioni sono $+1$ o -1 . Cominciamo dal primo caso.

Equazioni reciproche di IV grado

Passiamo alle equazioni reciproche di quarto grado. Qui la situazione è leggermente più complicata ma gestibile.

Vi sono essenzialmente due casi: quello in cui le soluzioni sono *diverse* da $+1$ o -1 e quello in cui alcune soluzioni sono $+1$ o -1 . Cominciamo dal primo caso.

Teorema

Un'equazione di quarto grado è reciproca con soluzioni diverse da ± 1 se e solo se è simmetrica.

Equazioni reciproche di IV grado

Passiamo alle equazioni reciproche di quarto grado. Qui la situazione è leggermente più complicata ma gestibile.

Vi sono essenzialmente due casi: quello in cui le soluzioni sono *diverse* da $+1$ o -1 e quello in cui alcune soluzioni sono $+1$ o -1 . Cominciamo dal primo caso.

Teorema

Un'equazione di quarto grado è reciproca con soluzioni diverse da ± 1 se e solo se è simmetrica.

Per esempio, l'equazione

Equazioni reciproche di IV grado

Passiamo alle equazioni reciproche di quarto grado. Qui la situazione è leggermente più complicata ma gestibile.

Vi sono essenzialmente due casi: quello in cui le soluzioni sono *diverse* da $+1$ o -1 e quello in cui alcune soluzioni sono $+1$ o -1 . Cominciamo dal primo caso.

Teorema

Un'equazione di quarto grado è reciproca con soluzioni diverse da ± 1 se e solo se è simmetrica.

Per esempio, l'equazione

$$\underbrace{x^4}_1 - \underbrace{3x^3}_{-3} + \underbrace{4x^2}_4 - \underbrace{3x}_{-3} + \underbrace{1}_1 = 0$$

è reciproca (cioè le sue soluzioni sono reciproche).

Dimostrazione (Approfondimento). Supponiamo che le soluzioni siano reciproche e diverse da ± 1 e supponiamo che x_1 e x_2 siano reciproche, ossia $x_1 x_2 = 1$, e che allo stesso modo $x_3 x_4 = 1$.

Dimostrazione (Approfondimento). Supponiamo che le soluzioni siano reciproche e diverse da ± 1 e supponiamo che x_1 e x_2 siano reciproche, ossia $x_1 x_2 = 1$, e che allo stesso modo $x_3 x_4 = 1$. Poniamo poi

Dimostrazione (Approfondimento). Supponiamo che le soluzioni siano reciproche e diverse da ± 1 e supponiamo che x_1 e x_2 siano reciproche, ossia $x_1x_2 = 1$, e che allo stesso modo $x_3x_4 = 1$. Poniamo poi

$$s_1 = x_1 + x_2, \quad s_2 = x_3 + x_4.$$

Dimostrazione (Approfondimento). Supponiamo che le soluzioni siano reciproche e diverse da ± 1 e supponiamo che x_1 e x_2 siano reciproche, ossia $x_1x_2 = 1$, e che allo stesso modo $x_3x_4 = 1$. Poniamo poi

$$s_1 = x_1 + x_2, \quad s_2 = x_3 + x_4.$$

Siccome x_1, x_2, x_3, x_4 sono le soluzioni, il polinomio si scomporrà come segue:

Dimostrazione (Approfondimento). Supponiamo che le soluzioni siano reciproche e diverse da ± 1 e supponiamo che x_1 e x_2 siano reciproche, ossia $x_1x_2 = 1$, e che allo stesso modo $x_3x_4 = 1$. Poniamo poi

$$s_1 = x_1 + x_2, \quad s_2 = x_3 + x_4.$$

Siccome x_1, x_2, x_3, x_4 sono le soluzioni, il polinomio si scomporrà come segue:

$$a(x^2 - s_1x + 1)(x^2 - s_2x + 1) = 0.$$

Dimostrazione (Approfondimento). Supponiamo che le soluzioni siano reciproche e diverse da ± 1 e supponiamo che x_1 e x_2 siano reciproche, ossia $x_1x_2 = 1$, e che allo stesso modo $x_3x_4 = 1$. Poniamo poi

$$s_1 = x_1 + x_2, \quad s_2 = x_3 + x_4.$$

Siccome x_1, x_2, x_3, x_4 sono le soluzioni, il polinomio si scomporrà come segue:

$$a(x^2 - s_1x + 1)(x^2 - s_2x + 1) = 0.$$

A questo punto eseguiamo tutti i calcoli e risulta

Dimostrazione (Approfondimento). Supponiamo che le soluzioni siano reciproche e diverse da ± 1 e supponiamo che x_1 e x_2 siano reciproche, ossia $x_1 x_2 = 1$, e che allo stesso modo $x_3 x_4 = 1$. Poniamo poi

$$s_1 = x_1 + x_2, \quad s_2 = x_3 + x_4.$$

Siccome x_1, x_2, x_3, x_4 sono le soluzioni, il polinomio si scomporrà come segue:

$$a(x^2 - s_1x + 1)(x^2 - s_2x + 1) = 0.$$

A questo punto eseguiamo tutti i calcoli e risulta

$$\underbrace{a}_a x^4 - \underbrace{a(s_1 + s_2)}_b x^3 + \underbrace{a(s_1 s_2 + 2)}_c x^2 - \underbrace{a(s_1 + s_2)}_b x + \underbrace{a}_a = 0$$

e dunque l'equazione è simmetrica.

Viceversa, supponiamo che l'equazione sia simmetrica:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Siccome $a \neq 0$, la soluzione nulla non è possibile, e quindi possiamo dividere per x^2 e ottenere

Viceversa, supponiamo che l'equazione sia simmetrica:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Siccome $a \neq 0$, la soluzione nulla non è possibile, e quindi possiamo dividere per x^2 e ottenere

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

Viceversa, supponiamo che l'equazione sia simmetrica:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Siccome $a \neq 0$, la soluzione nulla non è possibile, e quindi possiamo dividere per x^2 e ottenere

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

ossia

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0.$$

Viceversa, supponiamo che l'equazione sia simmetrica:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Siccome $a \neq 0$, la soluzione nulla non è possibile, e quindi possiamo dividere per x^2 e ottenere

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

ossia

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0.$$

Poniamo

$$y = x + \frac{1}{x}$$

Viceversa, supponiamo che l'equazione sia simmetrica:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Siccome $a \neq 0$, la soluzione nulla non è possibile, e quindi possiamo dividere per x^2 e ottenere

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

ossia

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0.$$

Poniamo

$$y = x + \frac{1}{x}$$

e osserviamo che

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 = y^2 - 2.$$

Eseguendo la sostituzione troviamo

Eseguendo la sostituzione troviamo

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

Eseguendo la sostituzione troviamo

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

che è un'equazione di secondo grado che ammette al più due soluzioni reali y_1, y_2 .

Eseguendo la sostituzione troviamo

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

che è un'equazione di secondo grado che ammette al più due soluzioni reali y_1, y_2 . Calcolate queste, si tratta di risolvere le due equazioni

Eseguendo la sostituzione troviamo

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

che è un'equazione di secondo grado che ammette al più due soluzioni reali y_1, y_2 . Calcolate queste, si tratta di risolvere le due equazioni

$$x + \frac{1}{x} = y_1, \quad x + \frac{1}{x} = y_2.$$

Eseguendo la sostituzione troviamo

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

che è un'equazione di secondo grado che ammette al più due soluzioni reali y_1, y_2 . Calcolate queste, si tratta di risolvere le due equazioni

$$x + \frac{1}{x} = y_1, \quad x + \frac{1}{x} = y_2.$$

Queste equazioni si riscrivono

$$x^2 + y_1x + 1 = 0, \quad x^2 + y_2x + 1 = 0$$

Eseguendo la sostituzione troviamo

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

che è un'equazione di secondo grado che ammette al più due soluzioni reali y_1, y_2 . Calcolate queste, si tratta di risolvere le due equazioni

$$x + \frac{1}{x} = y_1, \quad x + \frac{1}{x} = y_2.$$

Queste equazioni si riscrivono

$$x^2 + y_1x + 1 = 0, \quad x^2 + y_2x + 1 = 0$$

e dalla formula del prodotto delle radici segue subito che $x_1x_2 = 1$ e $x_3x_4 = 1$.

Eseguendo la sostituzione troviamo

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

che è un'equazione di secondo grado che ammette al più due soluzioni reali y_1, y_2 . Calcolate queste, si tratta di risolvere le due equazioni

$$x + \frac{1}{x} = y_1, \quad x + \frac{1}{x} = y_2.$$

Queste equazioni si riscrivono

$$x^2 + y_1x + 1 = 0, \quad x^2 + y_2x + 1 = 0$$

e dalla formula del prodotto delle radici segue subito che $x_1x_2 = 1$ e $x_3x_4 = 1$.

Siccome le soluzioni sono reciproche, l'equazione è reciproca e il teorema è dimostrato. ■

Eseguendo la sostituzione troviamo

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

che è un'equazione di secondo grado che ammette al più due soluzioni reali y_1, y_2 . Calcolate queste, si tratta di risolvere le due equazioni

$$x + \frac{1}{x} = y_1, \quad x + \frac{1}{x} = y_2.$$

Queste equazioni si riscrivono

$$x^2 + y_1x + 1 = 0, \quad x^2 + y_2x + 1 = 0$$

e dalla formula del prodotto delle radici segue subito che $x_1x_2 = 1$ e $x_3x_4 = 1$.

Siccome le soluzioni sono reciproche, l'equazione è reciproca e il teorema è dimostrato. ■

La stessa dimostrazione vale per radici complesse coniugate.

Veniamo al secondo caso, quello in cui alcune delle radici sono pari a 1 o -1 , che sono numeri uguali al loro reciproco.

Veniamo al secondo caso, quello in cui alcune delle radici sono pari a 1 o -1 , che sono numeri uguali al loro reciproco.

Teorema

Un'equazione di quarto grado reciproca avente due soluzioni pari entrambe a $+1$ o a -1 è sempre simmetrica.

Veniamo al secondo caso, quello in cui alcune delle radici sono pari a 1 o -1 , che sono numeri uguali al loro reciproco.

Teorema

Un'equazione di quarto grado reciproca avente due soluzioni pari entrambe a $+1$ o a -1 è sempre simmetrica.

Dimostrazione (Approfondimento). Supponiamo che le radici reciproche siano x_3, x_4 e che le due coincidenti siano pari a $+1$.

Veniamo al secondo caso, quello in cui alcune delle radici sono pari a 1 o -1 , che sono numeri uguali al loro reciproco.

Teorema

Un'equazione di quarto grado reciproca avente due soluzioni pari entrambe a $+1$ o a -1 è sempre simmetrica.

Dimostrazione (Approfondimento). Supponiamo che le radici reciproche siano x_3, x_4 e che le due coincidenti siano pari a $+1$. Il polinomio in questo caso si scrive

Veniamo al secondo caso, quello in cui alcune delle radici sono pari a 1 o -1 , che sono numeri uguali al loro reciproco.

Teorema

Un'equazione di quarto grado reciproca avente due soluzioni pari entrambe a $+1$ o a -1 è sempre simmetrica.

Dimostrazione (Approfondimento). Supponiamo che le radici reciproche siano x_3, x_4 e che le due coincidenti siano pari a $+1$. Il polinomio in questo caso si scrive

$$(x - 1)^2(ax^2 + sx + a) = 0.$$

Sviluppando i calcoli risulta

$$\underbrace{a}_a x^4 + \underbrace{(s - 2a)}_b x^3 + \underbrace{2(a - s)}_c x^2 + \underbrace{(s - 2a)}_b x + \underbrace{a}_a = 0$$

che è simmetrica.

Veniamo al secondo caso, quello in cui alcune delle radici sono pari a 1 o -1 , che sono numeri uguali al loro reciproco.

Teorema

Un'equazione di quarto grado reciproca avente due soluzioni pari entrambe a $+1$ o a -1 è sempre simmetrica.

Dimostrazione (Approfondimento). Supponiamo che le radici reciproche siano x_3, x_4 e che le due coincidenti siano pari a $+1$. Il polinomio in questo caso si scrive

$$(x - 1)^2(ax^2 + sx + a) = 0.$$

Sviluppando i calcoli risulta

$$\underbrace{a}_a x^4 + \underbrace{(s - 2a)}_b x^3 + \underbrace{2(a - s)}_c x^2 + \underbrace{(s - 2a)}_b x + \underbrace{a}_a = 0$$

che è simmetrica.

In maniera esattamente analoga si procede se le soluzioni coincidenti sono pari a -1 . ■

Infine, potrebbe però darsi che le due radici “autoreciproche” siano $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. In questo caso il polinomio è divisibile per $x^2 - 1$. Se le altre due radici sono reciproche, esso sarà della forma

Infine, potrebbe però darsi che le due radici “autoreciproche” siano $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. In questo caso il polinomio è divisibile per $x^2 - 1$. Se le altre due radici sono reciproche, esso sarà della forma

$$(x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0$$

Infine, potrebbe però darsi che le due radici “autoreciproche” siano $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. In questo caso il polinomio è divisibile per $x^2 - 1$. Se le altre due radici sono reciproche, esso sarà della forma

$$(x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0$$

che sviluppato, dà

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0.$$

Infine, potrebbe però darsi che le due radici “autoreciproche” siano $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. In questo caso il polinomio è divisibile per $x^2 - 1$. Se le altre due radici sono reciproche, esso sarà della forma

$$(x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0$$

che sviluppato, dà

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0.$$

In quest'ultimo caso, quindi, l'equazione di quarto grado avrà radici reciproche se è antisimmetrica, e inoltre se il termine di secondo grado è nullo (basta l'antisimmetria, perché il coefficiente deve coincidere col suo opposto, dunque è nullo).

Infine, potrebbe però darsi che le due radici “autoreciproche” siano $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. In questo caso il polinomio è divisibile per $x^2 - 1$. Se le altre due radici sono reciproche, esso sarà della forma

$$(x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0$$

che sviluppato, dà

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0.$$

In quest'ultimo caso, quindi, l'equazione di quarto grado avrà radici reciproche se è antisimmetrica, e inoltre se il termine di secondo grado è nullo (basta l'antisimmetria, perché il coefficiente deve coincidere col suo opposto, dunque è nullo).

I teoremi fin qui visti mostrano anche come risolvere un'equazione reciproca di quarto grado. Vediamo degli esempi.

Esempio

Risolvere l'equazione di quarto grado

$$2\sqrt{2}x^4 + (6 - 5\sqrt{2})x^3 + (4\sqrt{2} - 15)x^2 + (6 - 5\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0.$$

Esempio

Risolvere l'equazione di quarto grado

$$2\sqrt{2}x^4 + (6 - 5\sqrt{2})x^3 + (4\sqrt{2} - 15)x^2 + (6 - 5\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0.$$

(ma sì, facciamone una anche con le radici!)

Esempio

Risolvere l'equazione di quarto grado

$$2\sqrt{2}x^4 + (6 - 5\sqrt{2})x^3 + (4\sqrt{2} - 15)x^2 + (6 - 5\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0.$$

(ma sì, facciamone una anche con le radici!)

L'equazione è reciproca perché i coefficienti sono simmetrici.

Esempio

Risolvere l'equazione di quarto grado

$$2\sqrt{2}x^4 + (6 - 5\sqrt{2})x^3 + (4\sqrt{2} - 15)x^2 + (6 - 5\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0.$$

(ma sì, facciamone una anche con le radici!)

L'equazione è reciproca perché i coefficienti sono simmetrici. Allora dividiamo per x^2 e troviamo

$$2\sqrt{2}x^2 + (6 - 5\sqrt{2})x^2 + (4\sqrt{2} - 15) + (6 - 5\sqrt{2})\frac{1}{x} + 2\sqrt{2}\frac{1}{x^2} = 0$$

Esempio

Risolvere l'equazione di quarto grado

$$2\sqrt{2}x^4 + (6 - 5\sqrt{2})x^3 + (4\sqrt{2} - 15)x^2 + (6 - 5\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0.$$

(ma sì, facciamone una anche con le radici!)

L'equazione è reciproca perché i coefficienti sono simmetrici. Allora dividiamo per x^2 e troviamo

$$2\sqrt{2}x^2 + (6 - 5\sqrt{2})x^2 + (4\sqrt{2} - 15) + (6 - 5\sqrt{2})\frac{1}{x} + 2\sqrt{2}\frac{1}{x^2} = 0$$

ossia

$$2\sqrt{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + (6 - 5\sqrt{2})\left(x + \frac{1}{x}\right) + (4\sqrt{2} - 15) = 0.$$

Poniamo infine

$$y = x + \frac{1}{x}$$

e osserviamo che

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

e osserviamo che

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Sostituendo nell'equazione abbiamo allora

e osserviamo che

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Sostituendo nell'equazione abbiamo allora

$$2\sqrt{2}(y^2 - 2) + (6 - 5\sqrt{2})y + (4\sqrt{2} - 15) = 0$$

e osserviamo che

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Sostituendo nell'equazione abbiamo allora

$$2\sqrt{2}(y^2 - 2) + (6 - 5\sqrt{2})y + (4\sqrt{2} - 15) = 0$$

ossia

$$2\sqrt{2}y^2 + (6 - 5\sqrt{2})y - 15 = 0.$$

e osserviamo che

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Sostituendo nell'equazione abbiamo allora

$$2\sqrt{2}(y^2 - 2) + (6 - 5\sqrt{2})y + (4\sqrt{2} - 15) = 0$$

ossia

$$2\sqrt{2}y^2 + (6 - 5\sqrt{2})y - 15 = 0.$$

Solo quest'equazione è un po' lunga da risolvere; essa fornisce

$$y_1 = \frac{5}{2}, \quad y_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Adesso dobbiamo risolvere le due equazioni

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

La prima è facile e fornisce

Adesso dobbiamo risolvere le due equazioni

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

La prima è facile e fornisce

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Adesso dobbiamo risolvere le due equazioni

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

La prima è facile e fornisce

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

mentre la seconda è leggermente più lunga e dà

Adesso dobbiamo risolvere le due equazioni

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

La prima è facile e fornisce

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

mentre la seconda è leggermente più lunga e dà

$$x_3 = \sqrt{2}, \quad x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Equazioni reciproche di V grado

Consideriamo infine brevemente le equazioni reciproche di quinto grado.

Equazioni reciproche di V grado

Consideriamo infine brevemente le equazioni reciproche di quinto grado. Per queste valgono alcune considerazioni fatte per quelle di terzo: se l'equazione è simmetrica, una soluzione è $x = -1$, mentre se è antisimmetrica, allora una soluzione è $x = 1$.

Equazioni reciproche di V grado

Consideriamo infine brevemente le equazioni reciproche di quinto grado. Per queste valgono alcune considerazioni fatte per quelle di terzo: se l'equazione è simmetrica, una soluzione è $x = -1$, mentre se è antisimmetrica, allora una soluzione è $x = 1$.

Teorema

Un'equazione reciproca di quinto grado ammette sempre la soluzione $x = 1$ oppure la soluzione $x = -1$.

Equazioni reciproche di V grado

Consideriamo infine brevemente le equazioni reciproche di quinto grado. Per queste valgono alcune considerazioni fatte per quelle di terzo: se l'equazione è simmetrica, una soluzione è $x = -1$, mentre se è antisimmetrica, allora una soluzione è $x = 1$.

Teorema

Un'equazione reciproca di quinto grado ammette sempre la soluzione $x = 1$ oppure la soluzione $x = -1$.

Dimostrazione. Supponiamo che x_1 sia una soluzione. Allora anche $x_2 = 1/x_1$ è soluzione, perché l'equazione è reciproca.

Equazioni reciproche di V grado

Consideriamo infine brevemente le equazioni reciproche di quinto grado. Per queste valgono alcune considerazioni fatte per quelle di terzo: se l'equazione è simmetrica, una soluzione è $x = -1$, mentre se è antisimmetrica, allora una soluzione è $x = 1$.

Teorema

Un'equazione reciproca di quinto grado ammette sempre la soluzione $x = 1$ oppure la soluzione $x = -1$.

Dimostrazione. Supponiamo che x_1 sia una soluzione. Allora anche $x_2 = 1/x_1$ è soluzione, perché l'equazione è reciproca. A questo punto, se $x_1 = 1$ o $x_1 = -1$, il teorema è dimostrato. Altrimenti, nessuna di queste due soluzioni è 1 o -1.

Equazioni reciproche di V grado

Consideriamo infine brevemente le equazioni reciproche di quinto grado. Per queste valgono alcune considerazioni fatte per quelle di terzo: se l'equazione è simmetrica, una soluzione è $x = -1$, mentre se è antisimmetrica, allora una soluzione è $x = 1$.

Teorema

Un'equazione reciproca di quinto grado ammette sempre la soluzione $x = 1$ oppure la soluzione $x = -1$.

Dimostrazione. Supponiamo che x_1 sia una soluzione. Allora anche $x_2 = 1/x_1$ è soluzione, perché l'equazione è reciproca. A questo punto, se $x_1 = 1$ o $x_1 = -1$, il teorema è dimostrato. Altrimenti, nessuna di queste due soluzioni è 1 o -1 . Restano allora tre soluzioni. Se una delle tre è pari a 1 o -1 , il teorema è di nuovo vero, altrimenti una delle tre, diciamo x_3 , deve essere diversa da 1 o da -1 , e anche la sua reciproca $x_4 = 1/x_3$ (pure diversa da 1 e -1) è soluzione.

A questo punto, la quinta soluzione x_5 non può essere uguale a nessuna delle due precedenti, perché altrimenti dovrebbe essere soluzione anche $1/x_5$, e quindi si avrebbero sei soluzioni, cosa che un'equazione di quinto grado non può avere.

A questo punto, la quinta soluzione x_5 non può essere uguale a nessuna delle due precedenti, perché altrimenti dovrebbe essere soluzione anche $1/x_5$, e quindi si avrebbero sei soluzioni, cosa che un'equazione di quinto grado non può avere. Ma allora x_5 è reciproca di se stessa, e quindi $x_5^2 = 1$, col che $x_5 = \pm 1$. ■

A questo punto, la quinta soluzione x_5 non può essere uguale a nessuna delle due precedenti, perché altrimenti dovrebbe essere soluzione anche $1/x_5$, e quindi si avrebbero sei soluzioni, cosa che un'equazione di quinto grado non può avere. Ma allora x_5 è reciproca di se stessa, e quindi $x_5^2 = 1$, col che $x_5 = \pm 1$. ■

Col metodo di Ruffini è possibile quindi ridurre l'equazione ad un'equazione di quarto grado, che risulta essere reciproca, come mostra la scomposizione che effettueremo fra poco.

A questo punto, la quinta soluzione x_5 non può essere uguale a nessuna delle due precedenti, perché altrimenti dovrebbe essere soluzione anche $1/x_5$, e quindi si avrebbero sei soluzioni, cosa che un'equazione di quinto grado non può avere. Ma allora x_5 è reciproca di se stessa, e quindi $x_5^2 = 1$, col che $x_5 = \pm 1$. ■

Col metodo di Ruffini è possibile quindi ridurre l'equazione ad un'equazione di quarto grado, che risulta essere reciproca, come mostra la scomposizione che effettueremo fra poco.

Si può quindi concludere che *un'equazione di quinto grado è reciproca se e solo se è simmetrica o antisimmetrica*, esattamente come avviene nelle equazioni di terzo grado.

A questo punto, la quinta soluzione x_5 non può essere uguale a nessuna delle due precedenti, perché altrimenti dovrebbe essere soluzione anche $1/x_5$, e quindi si avrebbero sei soluzioni, cosa che un'equazione di quinto grado non può avere. Ma allora x_5 è reciproca di se stessa, e quindi $x_5^2 = 1$, col che $x_5 = \pm 1$. ■

Col metodo di Ruffini è possibile quindi ridurre l'equazione ad un'equazione di quarto grado, che risulta essere reciproca, come mostra la scomposizione che effettueremo fra poco.

Si può quindi concludere che *un'equazione di quinto grado è reciproca se e solo se è simmetrica o antisimmetrica*, esattamente come avviene nelle equazioni di terzo grado. Non dimostriamo però questo teorema.

Data l'equazione simmetrica

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Data l'equazione simmetrica

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

abbiamo

Data l'equazione simmetrica

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

abbiamo

$$P(-1) = -a + b - c + c - b + a = 0$$

Data l'equazione simmetrica

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

abbiamo

$$P(-1) = -a + b - c + c - b + a = 0$$

e quindi possiamo usare il metodo di Ruffini.

Data l'equazione simmetrica

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

abbiamo

$$P(-1) = -a + b - c + c - b + a = 0$$

e quindi possiamo usare il metodo di Ruffini. Esso dà

Data l'equazione simmetrica

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

abbiamo

$$P(-1) = -a + b - c + c - b + a = 0$$

e quindi possiamo usare il metodo di Ruffini. Esso dà

a	b	c	c	b	a
-1	$-a$	$a - b$	$b - c - a$	$a - b$	$-a$
a	$b - a$	$a - b + c$	$b - a$	a	0

Data l'equazione simmetrica

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

abbiamo

$$P(-1) = -a + b - c + c - b + a = 0$$

e quindi possiamo usare il metodo di Ruffini. Esso dà

	a	b	c	c	b	a
-1		$-a$	$a - b$	$b - c - a$	$a - b$	$-a$
	a	$b - a$	$a - b + c$	$b - a$	a	0

Come vediamo, abbiamo ottenuto

$$\underbrace{(ax^4 + (b-a)x^3 + (a-b+c)x^2 + (b-a)x + a)}_{\text{reciproca di 4° grado}}(x+1) = 0.$$

In modo analogo, se l'equazione è antisimmetrica, abbiamo

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$$

In modo analogo, se l'equazione è antisimmetrica, abbiamo

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$$

e in questo caso $x = 1$ è una soluzione, in quanto

$$P(1) = a + b + c - c - b - a = 0.$$

In modo analogo, se l'equazione è antisimmetrica, abbiamo

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$$

e in questo caso $x = 1$ è una soluzione, in quanto

$$P(1) = a + b + c - c - b - a = 0.$$

Pertanto il metodo di Ruffini fornisce

In modo analogo, se l'equazione è antisimmetrica, abbiamo

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$$

e in questo caso $x = 1$ è una soluzione, in quanto

$$P(1) = a + b + c - c - b - a = 0.$$

Pertanto il metodo di Ruffini fornisce

1	a	b	c	$-c$	$-b$	$-a$
	a	$a + b$	$a + b + c$	$a + b + c$	$a + b$	$-a$
	a	$a + b$	$a + b + c$	$a + b$	a	0

In modo analogo, se l'equazione è antisimmetrica, abbiamo

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$$

e in questo caso $x = 1$ è una soluzione, in quanto

$$P(1) = a + b + c - c - b - a = 0.$$

Pertanto il metodo di Ruffini fornisce

1	a	b	c	$-c$	$-b$	$-a$
	a	$a + b$	$a + b + c$	$a + b + c$	$a + b$	$-a$
	a	$a + b$	$a + b + c$	$a + b$	a	0

Come vediamo, abbiamo ottenuto

$$\underbrace{(ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (a + b)x + a)}_{\text{reciproca di 4° grado}}(x - 1) = 0.$$

Esempio

Risolvi una equazione reciproca di quinto grado, e precisamente

$$4x^5 + 12x^4 - 29x^3 - 29x^2 + 12x + 4 = 0.$$

Esempio

RisolviAMO una equazione reciproca di quinto grado, e precisamente

$$4x^5 + 12x^4 - 29x^3 - 29x^2 + 12x + 4 = 0.$$

Siccome i coefficienti sono simmetrici, una soluzione è $x = -1$.

Esempio

Risolvi una equazione reciproca di quinto grado, e precisamente

$$4x^5 + 12x^4 - 29x^3 - 29x^2 + 12x + 4 = 0.$$

Siccome i coefficienti sono simmetrici, una soluzione è $x = -1$. Con il metodo di Ruffini troviamo poi

Esempio

Risolvi una equazione reciproca di quinto grado, e precisamente

$$4x^5 + 12x^4 - 29x^3 - 29x^2 + 12x + 4 = 0.$$

Siccome i coefficienti sono simmetrici, una soluzione è $x = -1$. Con il metodo di Ruffini troviamo poi

	4	12	-29	-29	12	4
-1		-4	-8	37	-8	-4
	4	8	-37	8	4	0

Esempio

Risolvi una equazione reciproca di quinto grado, e precisamente

$$4x^5 + 12x^4 - 29x^3 - 29x^2 + 12x + 4 = 0.$$

Siccome i coefficienti sono simmetrici, una soluzione è $x = -1$. Con il metodo di Ruffini troviamo poi

	4	12	-29	-29	12	4
-1		-4	-8	37	-8	-4
	4	8	-37	8	4	0

dunque avremo

$$(4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4)(x + 1) = 0.$$

Risolviamo ora l'equazione reciproca di quarto grado rimanente, e cioè

$$4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$$

Risolviamo ora l'equazione reciproca di quarto grado rimanente, e cioè

$$4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$$

con i metodi visti prima.

Risolviamo ora l'equazione reciproca di quarto grado rimanente, e cioè

$$4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$$

con i metodi visti prima. Dividendo per x^2 e raccogliendo abbiamo

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) - 37 = 0$$

Risolviamo ora l'equazione reciproca di quarto grado rimanente, e cioè

$$4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$$

con i metodi visti prima. Dividendo per x^2 e raccogliendo abbiamo

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) - 37 = 0$$

per cui, ponendo

Risolviamo ora l'equazione reciproca di quarto grado rimanente, e cioè

$$4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$$

con i metodi visti prima. Dividendo per x^2 e raccogliendo abbiamo

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) - 37 = 0$$

per cui, ponendo

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Risolviamo ora l'equazione reciproca di quarto grado rimanente, e cioè

$$4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$$

con i metodi visti prima. Dividendo per x^2 e raccogliendo abbiamo

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) - 37 = 0$$

per cui, ponendo

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

risulta

$$4y^2 + 8y - 45 = 0.$$

Risolviamo ora l'equazione reciproca di quarto grado rimanente, e cioè

$$4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$$

con i metodi visti prima. Dividendo per x^2 e raccogliendo abbiamo

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) - 37 = 0$$

per cui, ponendo

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

risulta

$$4y^2 + 8y - 45 = 0.$$

Questa equazione di secondo grado fornisce

$$y_1 = \frac{5}{2}, \quad y_2 = -\frac{9}{2}.$$

Risolvendo quindi le due equazioni

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{9}{2}$$

Risolviendo quindi le due equazioni

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{9}{2}$$

troviamo facilmente le altre quattro soluzioni

$$x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 2, \quad x_{4,5} = \frac{-9 \pm \sqrt{65}}{4}.$$

Approfondimento

Il teorema più importante riguardo alle equazioni reciproche è il seguente:

Approfondimento

Il teorema più importante riguardo alle equazioni reciproche è il seguente:

Teorema

Un'equazione algebrica di grado n è reciproca se e solo se è simmetrica o antisimmetrica.

Approfondimento

Il teorema più importante riguardo alle equazioni reciproche è il seguente:

Teorema

Un'equazione algebrica di grado n è reciproca se e solo se è simmetrica o antisimmetrica.

In altre parole, equazioni come

Approfondimento

Il teorema più importante riguardo alle equazioni reciproche è il seguente:

Teorema

Un'equazione algebrica di grado n è reciproca se e solo se è simmetrica o antisimmetrica.

In altre parole, equazioni come

$$\underbrace{x^8}_1 \underbrace{-3x^7}_{-3} \underbrace{+2x^6}_2 \underbrace{+7x^5}_7 \underbrace{+15x^4}_{15} \underbrace{+7x^3}_7 \underbrace{+2x^2}_2 \underbrace{-3x}_{-3} + \underbrace{1}_1 = 0$$

Approfondimento

Il teorema più importante riguardo alle equazioni reciproche è il seguente:

Teorema

Un'equazione algebrica di grado n è reciproca se e solo se è simmetrica o antisimmetrica.

In altre parole, equazioni come

$$\underbrace{x^8}_{1} \underbrace{-3x^7}_{-3} \underbrace{+2x^6}_{2} \underbrace{+7x^5}_{7} \underbrace{+15x^4}_{15} \underbrace{+7x^3}_{7} \underbrace{+2x^2}_{2} \underbrace{-3x}_{-3} + \underbrace{1}_{1} = 0$$

$$\underbrace{x^5}_{-3} \underbrace{-3x^4}_{4} \underbrace{+4x^3}_{-4} \underbrace{-4x^2}_{+3} + \underbrace{3x}_{-1} - \underbrace{1}_{-1} = 0$$

sono reciproche, e viceversa, se un'equazione è reciproca, allora è simmetrica o antisimmetrica.

Dimostrazione. Se il grado è dispari e uguale a $2n + 1$, almeno una soluzione deve essere 1 o -1 , ragionando come abbiamo fatto per $n = 1$ (terzo grado) ed $n = 2$ (quinto grado). Poi supponiamo di raggruppare tutte le soluzioni non di modulo 1 a due a due, che saranno soluzioni di equazioni di secondo grado della forma

Dimostrazione. Se il grado è dispari e uguale a $2n + 1$, almeno una soluzione deve essere 1 o -1 , ragionando come abbiamo fatto per $n = 1$ (terzo grado) ed $n = 2$ (quinto grado). Poi supponiamo di raggruppare tutte le soluzioni non di modulo 1 a due a due, che saranno soluzioni di equazioni di secondo grado della forma

$$x^2 - s_1x + 1, x^2 - s_2x + 1, \dots, x^2 - s_kx + 1.$$

Dimostrazione. Se il grado è dispari e uguale a $2n + 1$, almeno una soluzione deve essere 1 o -1 , ragionando come abbiamo fatto per $n = 1$ (terzo grado) ed $n = 2$ (quinto grado). Poi supponiamo di raggruppare tutte le soluzioni non di modulo 1 a due a due, che saranno soluzioni di equazioni di secondo grado della forma

$$x^2 - s_1x + 1, x^2 - s_2x + 1, \dots, x^2 - s_kx + 1.$$

Il rimanente sarà un prodotto di $(x - 1)$ elevato a una potenza, per tener conto di tutte le soluzioni pari a 1, e di $(x + 1)$ elevato ad un'altra potenza, per considerare le soluzioni $x = -1$

Dimostrazione. Se il grado è dispari e uguale a $2n + 1$, almeno una soluzione deve essere 1 o -1 , ragionando come abbiamo fatto per $n = 1$ (terzo grado) ed $n = 2$ (quinto grado). Poi supponiamo di raggruppare tutte le soluzioni non di modulo 1 a due a due, che saranno soluzioni di equazioni di secondo grado della forma

$$x^2 - s_1x + 1, x^2 - s_2x + 1, \dots, x^2 - s_kx + 1.$$

Il rimanente sarà un prodotto di $(x - 1)$ elevato a una potenza, per tener conto di tutte le soluzioni pari a 1, e di $(x + 1)$ elevato ad un'altra potenza, per considerare le soluzioni $x = -1$ (naturalmente questa potenza può essere anche elevata a zero, se non c'è una soluzione, ma almeno una c'è).

Dimostrazione. Se il grado è dispari e uguale a $2n + 1$, almeno una soluzione deve essere 1 o -1 , ragionando come abbiamo fatto per $n = 1$ (terzo grado) ed $n = 2$ (quinto grado). Poi supponiamo di raggruppare tutte le soluzioni non di modulo 1 a due a due, che saranno soluzioni di equazioni di secondo grado della forma

$$x^2 - s_1x + 1, x^2 - s_2x + 1, \dots, x^2 - s_kx + 1.$$

Il rimanente sarà un prodotto di $(x - 1)$ elevato a una potenza, per tener conto di tutte le soluzioni pari a 1, e di $(x + 1)$ elevato ad un'altra potenza, per considerare le soluzioni $x = -1$ (naturalmente questa potenza può essere anche elevata a zero, se non c'è una soluzione, ma almeno una c'è).

Adesso dobbiamo partire con i prodotti.

Dimostrazione. Se il grado è dispari e uguale a $2n + 1$, almeno una soluzione deve essere 1 o -1 , ragionando come abbiamo fatto per $n = 1$ (terzo grado) ed $n = 2$ (quinto grado). Poi supponiamo di raggruppare tutte le soluzioni non di modulo 1 a due a due, che saranno soluzioni di equazioni di secondo grado della forma

$$x^2 - s_1x + 1, x^2 - s_2x + 1, \dots, x^2 - s_kx + 1.$$

Il rimanente sarà un prodotto di $(x - 1)$ elevato a una potenza, per tener conto di tutte le soluzioni pari a 1, e di $(x + 1)$ elevato ad un'altra potenza, per considerare le soluzioni $x = -1$ (naturalmente questa potenza può essere anche elevata a zero, se non c'è una soluzione, ma almeno una c'è).

Adesso dobbiamo partire con i prodotti. Intanto, $x^2 - s_1x + 1$ è simmetrico.

Dimostrazione. Se il grado è dispari e uguale a $2n + 1$, almeno una soluzione deve essere 1 o -1 , ragionando come abbiamo fatto per $n = 1$ (terzo grado) ed $n = 2$ (quinto grado). Poi supponiamo di raggruppare tutte le soluzioni non di modulo 1 a due a due, che saranno soluzioni di equazioni di secondo grado della forma

$$x^2 - s_1x + 1, x^2 - s_2x + 1, \dots, x^2 - s_kx + 1.$$

Il rimanente sarà un prodotto di $(x - 1)$ elevato a una potenza, per tener conto di tutte le soluzioni pari a 1, e di $(x + 1)$ elevato ad un'altra potenza, per considerare le soluzioni $x = -1$ (naturalmente questa potenza può essere anche elevata a zero, se non c'è una soluzione, ma almeno una c'è).

Adesso dobbiamo partire con i prodotti. Intanto, $x^2 - s_1x + 1$ è simmetrico.

Vediamo ora che se moltiplichiamo un polinomio simmetrico per $x^2 - s_1x + 1$, questo resta simmetrico.

Scriviamo tutti i coefficienti del primo polinomio, $P[x]$, così:

Scriviamo tutti i coefficienti del primo polinomio, $P[x]$, così:

a	b	c	d	e	$\dots$	e	d	c	b	a
x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	x^{n-4}	$\dots$	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0

dove intendiamo che a è il coefficiente del grado maggiore (e del minore),
 b il coefficiente del grado inferiore al massimo (e anche di x), eccetera.

Scriviamo tutti i coefficienti del primo polinomio, $P[x]$, così:

a	b	c	d	e	$\dots$	e	d	c	b	a
x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	x^{n-4}	$\dots$	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0

dove intendiamo che a è il coefficiente del grado maggiore (e del minore), b il coefficiente del grado inferiore al massimo (e anche di x), eccetera. Quando moltiplichiamo per x^2 , tutto il polinomio si “sposta di due caselle a sinistra perché i gradi della x aumentano di 2:

Scriviamo tutti i coefficienti del primo polinomio, $P[x]$, così:

a	b	c	d	e	$\dots$	e	d	c	b	a
x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	x^{n-4}	$\dots$	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0

dove intendiamo che a è il coefficiente del grado maggiore (e del minore), b il coefficiente del grado inferiore al massimo (e anche di x), eccetera. Quando moltiplichiamo per x^2 , tutto il polinomio si “sposta di due caselle a sinistra perché i gradi della x aumentano di 2:

$P[x]$			a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a
$P[x] \cdot x^2$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a		

Scriviamo tutti i coefficienti del primo polinomio, $P[x]$, così:

a	b	c	d	e	$\dots$	e	d	c	b	a
x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	x^{n-4}	$\dots$	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0

dove intendiamo che a è il coefficiente del grado maggiore (e del minore), b il coefficiente del grado inferiore al massimo (e anche di x), eccetera. Quando moltiplichiamo per x^2 , tutto il polinomio si “sposta di due caselle a sinistra perché i gradi della x aumentano di 2:

$P[x]$			a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a
$P[x] \cdot x^2$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a		

Quando invece moltiplichiamo per x , tutti i coefficienti si moltiplicano per s e il tutto si sposta di *una* casella a sinistra, perché il grado aumenta di 1:

$P[x]$			a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a
$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a		
$P \cdot sx$		sa	sb	sc	sd	se	...	...	se	sd	sc	sb	sa	

$P[x]$			a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a
$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a		
$P \cdot sx$		sa	sb	sc	sd	se	...	...	se	sd	sc	sb	sa	

Quando infine si moltiplica per 1, tutto ovviamente resta fermo:

$P[x]$			a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a
$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a		
$P \cdot sx$		sa	sb	sc	sd	se	...	...	se	sd	sc	sb	sa	

Quando infine si moltiplica per 1, tutto ovviamente resta fermo:

$P[x]$			a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a
$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a		
$P \cdot sx$		sa	sb	sc	sd	se	...	...	se	sd	sc	sb	sa	
$P \cdot 1$			a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a

$P[x]$			a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a
$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a		
$P \cdot sx$		sa	sb	sc	sd	se	...	...	se	sd	sc	sb	sa	

Quando infine si moltiplica per 1, tutto ovviamente resta fermo:

$P[x]$			a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a
$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a		
$P \cdot sx$		sa	sb	sc	sd	se	...	...	se	sd	sc	sb	sa	
$P \cdot 1$			a	b	c	d	e	...	...	e	d	c	b	a

Per trovare il polinomio prodotto, dobbiamo ora sommare le colonne che ci daranno i monomi dei vari gradi:

$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a		
$P \cdot sx$		sa	sb	sc	sd	se	$\dots$	$\dots$	se	sd	sc	sb	sa	
$P \cdot 1$			a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a

$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a		
$P \cdot sx$		sa	sb	sc	sd	se	$\dots$	$\dots$	se	sd	sc	sb	sa	
$P \cdot 1$			a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a

Come vediamo, le colonne sommate sono simmetriche:

$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a		
$P \cdot sx$		sa	sb	sc	sd	se	$\dots$	$\dots$	se	sd	sc	sb	sa	
$P \cdot 1$			a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a

Come vediamo, le colonne sommate sono simmetriche:

$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a		
$P \cdot sx$		sa	sb	sc	sd	se	$\dots$	$\dots$	se	sd	sc	sb	sa	
$P \cdot 1$			a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a
				$\uparrow\uparrow$	$\uparrow$					$\uparrow$	$\uparrow\uparrow$			

$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a		
$P \cdot sx$		sa	sb	sc	sd	se	$\dots$	$\dots$	se	sd	sc	sb	sa	
$P \cdot 1$			a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a

Come vediamo, le colonne sommate sono simmetriche:

$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a		
$P \cdot sx$		sa	sb	sc	sd	se	$\dots$	$\dots$	se	sd	sc	sb	sa	
$P \cdot 1$			a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a
				$\uparrow$	$\uparrow$					$\uparrow$	$\uparrow$			

e dunque, quando moltiplichiamo fra loro i vari termini della forma $x^2 - sx + 1$, troviamo sempre espressioni simmetriche.

Se invece moltiplichiamo un polinomio simmetrico per $x + 1$, si capisce che cambia ben poco:

$P \cdot x$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a	
$P \cdot 1$		a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a
				$\uparrow\uparrow$	$\uparrow$				$\uparrow$	$\uparrow\uparrow$			

Se invece moltiplichiamo un polinomio simmetrico per $x + 1$, si capisce che cambia ben poco:

$P \cdot x$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a	
$P \cdot 1$		a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a
				$\uparrow\uparrow$	$\uparrow$				$\uparrow$	$\uparrow\uparrow$			

Il risultato è ancora simmetrico.

Se invece moltiplichiamo un polinomio simmetrico per $x + 1$, si capisce che cambia ben poco:

$P \cdot x$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a	
$P \cdot 1$		a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a
				$\uparrow$	$\uparrow$				$\uparrow$	$\uparrow$			

Il risultato è ancora simmetrico. Se moltiplichiamo per $(x + 1)^2$, questo è $x^2 + 2x + 1$, quindi ricade nel caso precedente, così come se moltiplichiamo per

$$(x + 1)^4 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 1)$$

Se invece moltiplichiamo un polinomio simmetrico per $x + 1$, si capisce che cambia ben poco:

$P \cdot x$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a	
$P \cdot 1$		a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a
				$\uparrow$	$\uparrow$				$\uparrow$	$\uparrow$			

Il risultato è ancora simmetrico. Se moltiplichiamo per $(x + 1)^2$, questo è $x^2 + 2x + 1$, quindi ricade nel caso precedente, così come se moltiplichiamo per

$$(x + 1)^4 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 1)$$

e così via.

Se invece moltiplichiamo un polinomio simmetrico per $x + 1$, si capisce che cambia ben poco:

$P \cdot x$	a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a	
$P \cdot 1$		a	b	c	d	e	$\dots$	$\dots$	e	d	c	b	a
				$\uparrow$	$\uparrow$				$\uparrow$	$\uparrow$			

Il risultato è ancora simmetrico. Se moltiplichiamo per $(x + 1)^2$, questo è $x^2 + 2x + 1$, quindi ricade nel caso precedente, così come se moltiplichiamo per

$$(x + 1)^4 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 1)$$

e così via. La stessa cosa succede se moltiplichiamo per una potenza *pari* di $x - 1$: otteniamo sempre un polinomio simmetrico.

La novità si ha quando si moltiplica per $x - 1$. Guardate cosa succede:

La novità si ha quando si moltiplica per $x - 1$. Guardate cosa succede:

$P \cdot x$	a	b	c	d	e	$\dots$	e	d	c	b	a	
$P \cdot (-1)$		$-a$	$-b$	$-c$	$-d$	$-e$	$\dots$	$-e$	$-d$	$-c$	$-b$	$-a$
				$\uparrow\uparrow$	$\uparrow$			$\uparrow$	$\uparrow\uparrow$			

La novità si ha quando si moltiplica per $x - 1$. Guardate cosa succede:

$P \cdot x$	a	b	c	d	e	$\dots$	e	d	c	b	a	
$P \cdot (-1)$		$-a$	$-b$	$-c$	$-d$	$-e$	$\dots$	$-e$	$-d$	$-c$	$-b$	$-a$
				$\uparrow$	$\uparrow$			$\uparrow$	$\uparrow$			

Stavolta i coefficienti simmetrici sono a e $-a$, b e $-b$, ecc., cioè sono opposti. Questo risolve il caso di n dispari.

La novità si ha quando si moltiplica per $x - 1$. Guardate cosa succede:

$P \cdot x$	a	b	c	d	e	$\dots$	e	d	c	b	a	
$P \cdot (-1)$		$-a$	$-b$	$-c$	$-d$	$-e$	$\dots$	$-e$	$-d$	$-c$	$-b$	$-a$
				$\uparrow\uparrow$	$\uparrow$			$\uparrow$	$\uparrow\uparrow$			

Stavolta i coefficienti simmetrici sono a e $-a$, b e $-b$, ecc., cioè sono opposti. Questo risolve il caso di n dispari.

Si può addirittura dimostrare che il prodotto di un polinomio simmetrico per uno antisimmetrico è sempre antisimmetrico, che un antisimmetrico per un antisimmetrico è simmetrico e che un simmetrico per un simmetrico è simmetrico.

La novità si ha quando si moltiplica per $x - 1$. Guardate cosa succede:

$P \cdot x$	a	b	c	d	e	$\dots$	e	d	c	b	a	
$P \cdot (-1)$		$-a$	$-b$	$-c$	$-d$	$-e$	$\dots$	$-e$	$-d$	$-c$	$-b$	$-a$
				$\uparrow\uparrow$	$\uparrow$			$\uparrow$	$\uparrow\uparrow$			

Stavolta i coefficienti simmetrici sono a e $-a$, b e $-b$, ecc., cioè sono opposti. Questo risolve il caso di n dispari.

Si può addirittura dimostrare che il prodotto di un polinomio simmetrico per uno antisimmetrico è sempre antisimmetrico, che un antisimmetrico per un antisimmetrico è simmetrico e che un simmetrico per un simmetrico è simmetrico.

Per questo motivo i polinomi simmetrici vengono talvolta detti *pari* e quelli simmetrici *dispari*, in analogia col fatto che “ $\text{pari} + \text{pari} = \text{pari}$ ”, “ $\text{dispari} + \text{pari} = \text{dispari}$ ” e “ $\text{dispari} + \text{dispari} = \text{pari}$ ” (notate che il prodotto di polinomi si trasforma in *somma* di numeri pari e dispari).

La novità si ha quando si moltiplica per $x - 1$. Guardate cosa succede:

$P \cdot x$	a	b	c	d	e	$\dots$	e	d	c	b	a	
$P \cdot (-1)$		$-a$	$-b$	$-c$	$-d$	$-e$	$\dots$	$-e$	$-d$	$-c$	$-b$	$-a$
				$\uparrow\uparrow$	$\uparrow$			$\uparrow$	$\uparrow\uparrow$			

Stavolta i coefficienti simmetrici sono a e $-a$, b e $-b$, ecc., cioè sono opposti. Questo risolve il caso di n dispari.

Si può addirittura dimostrare che il prodotto di un polinomio simmetrico per uno antisimmetrico è sempre antisimmetrico, che un antisimmetrico per un antisimmetrico è simmetrico e che un simmetrico per un simmetrico è simmetrico.

Per questo motivo i polinomi simmetrici vengono talvolta detti *pari* e quelli simmetrici *dispari*, in analogia col fatto che “ $\text{pari} + \text{pari} = \text{pari}$ ”, “ $\text{dispari} + \text{pari} = \text{dispari}$ ” e “ $\text{dispari} + \text{dispari} = \text{pari}$ ” (notate che il prodotto di polinomi si trasforma in *somma* di numeri pari e dispari).

Se invece il grado $2n$ è pari, si ragiona allo stesso modo, solo che possono esserci varie soluzioni $x = 1$ e $x = -1$, o non esserci del tutto.

Ragioniamo allora così: raggruppiamo a due a due tutte le soluzioni diverse da ± 1 e moltiplichiamo i polinomi corrispondenti; per quanto visto prima otterremo un polinomio simmetrico.

Ragioniamo allora così: raggruppiamo a due a due tutte le soluzioni diverse da ± 1 e moltiplichiamo i polinomi corrispondenti; per quanto visto prima otterremo un polinomio simmetrico. Poi raggruppiamo tutti gli eventuali $x + 1$ a due a due, cioè $x^2 + 2x + 1$, i quali non cambiano la simmetria, così come gli eventuali $x^2 - 2x + 1$.

Ragioniamo allora così: raggruppiamo a due a due tutte le soluzioni diverse da ± 1 e moltiplichiamo i polinomi corrispondenti; per quanto visto prima otterremo un polinomio simmetrico. Poi raggruppiamo tutti gli eventuali $x + 1$ a due a due, cioè $x^2 + 2x + 1$, i quali non cambiano la simmetria, così come gli eventuali $x^2 - 2x + 1$. Alla fine resteranno un $x + 1$ e un $x - 1$ o nessuno, perché il grado è pari.

Ragioniamo allora così: raggruppiamo a due a due tutte le soluzioni diverse da ± 1 e moltiplichiamo i polinomi corrispondenti; per quanto visto prima otterremo un polinomio simmetrico. Poi raggruppiamo tutti gli eventuali $x + 1$ a due a due, cioè $x^2 + 2x + 1$, i quali non cambiano la simmetria, così come gli eventuali $x^2 - 2x + 1$. Alla fine resteranno un $x + 1$ e un $x - 1$ o nessuno, perché il grado è pari.

Ma se si moltiplica un polinomio simmetrico per $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ si ottiene un polinomio antisimmetrico:

Ragioniamo allora così: raggruppiamo a due a due tutte le soluzioni diverse da ± 1 e moltiplichiamo i polinomi corrispondenti; per quanto visto prima otterremo un polinomio simmetrico. Poi raggruppiamo tutti gli eventuali $x + 1$ a due a due, cioè $x^2 + 2x + 1$, i quali non cambiano la simmetria, così come gli eventuali $x^2 - 2x + 1$. Alla fine resteranno un $x + 1$ e un $x - 1$ o nessuno, perché il grado è pari.

Ma se si moltiplica un polinomio simmetrico per $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ si ottiene un polinomio antisimmetrico:

$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	$\dots$	d	c	b	a		
$P \cdot (-1)$			$-a$	$-b$	$-c$	$-d$	$\dots$	$-e$	$-d$	$-c$	$-b$	$-a$

Ragioniamo allora così: raggruppiamo a due a due tutte le soluzioni diverse da ± 1 e moltiplichiamo i polinomi corrispondenti; per quanto visto prima otterremo un polinomio simmetrico. Poi raggruppiamo tutti gli eventuali $x + 1$ a due a due, cioè $x^2 + 2x + 1$, i quali non cambiano la simmetria, così come gli eventuali $x^2 - 2x + 1$. Alla fine resteranno un $x + 1$ e un $x - 1$ o nessuno, perché il grado è pari.

Ma se si moltiplica un polinomio simmetrico per $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ si ottiene un polinomio antisimmetrico:

$P \cdot x^2$	a	b	c	d	e	$\dots$	d	c	b	a		
$P \cdot (-1)$			$-a$	$-b$	$-c$	$-d$	$\dots$	$-e$	$-d$	$-c$	$-b$	$-a$

I coefficienti sono infatti a e $-a$, b e $-b$, $c - a$ e $a - c$, eccetera. Quindi in ogni caso si ottengono polinomi simmetrici oppure antisimmetrici.

Non è finita: resta da vedere che un polinomio simmetrico o antisimmetrico ammette sempre soluzioni simmetriche.

Non è finita: resta da vedere che un polinomio simmetrico o antisimmetrico ammette sempre soluzioni simmetriche.

Questo è più difficile e lo accenniamo. In ogni caso funziona così: se vi sono soluzioni $x = 1$ o $x = -1$, si possono togliere e usare il metodo di Ruffini. In ogni caso si otterrà ancora un polinomio simmetrico o antisimmetrico. Se questo è di grado dispari, vi è sicuramente ancora una soluzione $x = 1$ o $x = -1$ da togliere, e si ottiene un polinomio *simmetrico* di grado pari $2n$.

Non è finita: resta da vedere che un polinomio simmetrico o antisimmetrico ammette sempre soluzioni simmetriche.

Questo è più difficile e lo accenniamo. In ogni caso funziona così: se vi sono soluzioni $x = 1$ o $x = -1$, si possono togliere e usare il metodo di Ruffini. In ogni caso si otterrà ancora un polinomio simmetrico o antisimmetrico. Se questo è di grado dispari, vi è sicuramente ancora una soluzione $x = 1$ o $x = -1$ da togliere, e si ottiene un polinomio *simmetrico* di grado pari $2n$.

Dividendo il polinomio per x^n , si possono raggruppare i suoi termini così:

Non è finita: resta da vedere che un polinomio simmetrico o antisimmetrico ammette sempre soluzioni simmetriche.

Questo è più difficile e lo accenniamo. In ogni caso funziona così: se vi sono soluzioni $x = 1$ o $x = -1$, si possono togliere e usare il metodo di Ruffini. In ogni caso si otterrà ancora un polinomio simmetrico o antisimmetrico. Se questo è di grado dispari, vi è sicuramente ancora una soluzione $x = 1$ o $x = -1$ da togliere, e si ottiene un polinomio *simmetrico* di grado pari $2n$.

Dividendo il polinomio per x^n , si possono raggruppare i suoi termini così:

$$a \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) + b \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) + \dots + w \left(x + \frac{1}{x} \right) + z = 0.$$

Non è finita: resta da vedere che un polinomio simmetrico o antisimmetrico ammette sempre soluzioni simmetriche.

Questo è più difficile e lo accenniamo. In ogni caso funziona così: se vi sono soluzioni $x = 1$ o $x = -1$, si possono togliere e usare il metodo di Ruffini. In ogni caso si otterrà ancora un polinomio simmetrico o antisimmetrico. Se questo è di grado dispari, vi è sicuramente ancora una soluzione $x = 1$ o $x = -1$ da togliere, e si ottiene un polinomio *simmetrico* di grado pari $2n$.

Dividendo il polinomio per x^n , si possono raggruppare i suoi termini così:

$$a \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) + b \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) + \dots + w \left(x + \frac{1}{x} \right) + z = 0.$$

Adesso poniamo

$$x + \frac{1}{x} = y.$$

Abbiamo allora

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

Abbiamo allora

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Abbiamo allora

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) =$$

Abbiamo allora

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3y$$

Abbiamo allora

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3y$$

$$y^4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6 =$$

Abbiamo allora

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3y$$

$$y^4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4(y^2 - 2) + 6$$

ecc.

Abbiamo allora

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3y$$

$$y^4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4(y^2 - 2) + 6$$

ecc.

Si capisce dunque che tutte le espressioni $x^2 + 1/x^2$, $x^3 + 1/x^3$, ecc. che si trovano nell'equazione si possono esprimere in termini di potenze (dello stesso grado) di y .

Abbiamo allora

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3y$$

$$y^4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4(y^2 - 2) + 6$$

ecc.

Si capisce dunque che tutte le espressioni $x^2 + 1/x^2$, $x^3 + 1/x^3$, ecc. che si trovano nell'equazione si possono esprimere in termini di potenze (dello stesso grado) di y . Sostituendo e svolgendo tutti i calcoli ne uscirà un polinomio in y , che ammetterà n soluzioni reali al massimo.

Ciascuna di queste soluzioni va poi inserita in un'equazione della forma

$$x + \frac{1}{x} = y_k$$

Ciascuna di queste soluzioni va poi inserita in un'equazione della forma

$$x + \frac{1}{x} = y_k$$

che fornisce (se le ammette) due soluzioni reali reciproche, perché l'equazione equivalente $x^2 - y_k x + 1 = 0$ ha prodotto delle soluzioni uguale a 1.

Ciascuna di queste soluzioni va poi inserita in un'equazione della forma

$$x + \frac{1}{x} = y_k$$

che fornisce (se le ammette) due soluzioni reali reciproche, perché l'equazione equivalente $x^2 - y_k x + 1 = 0$ ha prodotto delle soluzioni uguale a 1.

Dunque tutte le soluzioni sono reciproche (ovviamente 1 e -1 sono reciproche di se stesse) e il teorema è completamente dimostrato. ■