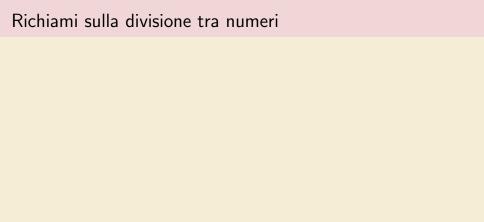
La Divisione tra Polinomi

Michele Scaglia

Università Cattolica del Sacro Cuore



Siamo già abituati a parlare di divisione tra numeri interi (e, solo in un secondo momento, tra numeri razionali).

Siamo già abituati a parlare di divisione tra numeri interi (e, solo in un secondo momento, tra numeri razionali). Qual è il significato della scrittura

a : b?

Siamo già abituati a parlare di divisione tra numeri interi (e, solo in un secondo momento, tra numeri razionali). Qual è il significato della scrittura

Sappiamo che, assegnati due numeri interi a (detto dividendo) e b (detto divisore) il Teorema del quoziente e del <math>resto garantisce l'esistenza e l'unicità di due numeri interi $q,r\in\mathbb{Z}$ tali che

$$a = bq + r$$
,

$$0 \le r < |b|$$
.

Siamo già abituati a parlare di divisione tra numeri interi (e, solo in un secondo momento, tra numeri razionali). Qual è il significato della scrittura

Sappiamo che, assegnati due numeri interi a (detto dividendo) e b (detto divisore) il Teorema del quoziente e del <math>resto garantisce l'esistenza e l'unicità di due numeri interi $q,r\in\mathbb{Z}$ tali che

$$a = bq + r$$
,

$$0 \le r < |b|$$
.

In altre parole: **eseguire la divisione** tra a e b significa **trovare due numeri interi** q ed r tali per cui il numero a sia uguale al prodotto tra i numeri b e q aumentato del numero r.

$$a = bq + r$$

vengono rispettivamente detti

$$a = bq + r$$

vengono rispettivamente detti

- q : quoziente della divisione tra a e b
- r : resto della divisione tra a e b

$$a = bq + r$$

vengono rispettivamente detti

- q : quoziente della divisione tra a e b
- r : resto della divisione tra a e b

La divisione tra a e b si dice **esatta** se r = 0.

$$a = bq + r$$

vengono rispettivamente detti

• q : quoziente della divisione tra a e b

• r : resto della divisione tra a e b

La divisione tra a e b si dice **esatta** se r = 0.

Siamo sempre stati abituati, sin dalla scuola elementare, a interpretare la divisione esatta tra due numeri interi *a* e *b* come quella situazione in cui il **numero b sta un numero esatto di volte nel numero** *a* (intendendo proprio che il resto della divisione è 0).

Ad esempio, se a = 29 e b = 6, risulta q = 4 e r = 5.

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$
$$0 \le 5 < |6|,$$

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$
$$0 \le 5 < |6|,$$

come da Teorema del quoziente e del resto.

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$
$$0 \le 5 < |6|,$$

come da Teorema del quoziente e del resto.

Un altro esempio.

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$
$$0 \le 5 < |6|,$$

come da Teorema del quoziente e del resto.

Un altro esempio.

Se a = 7 e b = 9, allora si ha q = 0 r = 7.

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$
$$0 \le 5 < |6|,$$

come da Teorema del quoziente e del resto.

Un altro esempio.

Se a = 7 e b = 9, allora si ha q = 0 r = 7. Infatti

$$7 = 9 \cdot 0 + 7,$$

 $0 \le 7 < |9|.$

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$
$$0 \le 5 < |6|,$$

come da Teorema del quoziente e del resto.

Un altro esempio.

Se a = 7 e b = 9, allora si ha q = 0 r = 7. Infatti

$$7 = 9 \cdot 0 + 7,$$

 $0 \le 7 < |9|.$

In casi come questi si è soliti dire impropriamente che la divisione tra a e b non è eseguibile (essendo il dividendo minore del divisore).

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$
$$0 \le 5 < |6|,$$

come da Teorema del quoziente e del resto.

Un altro esempio.

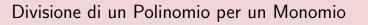
Se a = 7 e b = 9, allora si ha q = 0 r = 7. Infatti

$$7 = 9 \cdot 0 + 7,$$

 $0 \le 7 < |9|.$

In casi come questi si è soliti dire impropriamente che la divisione tra a e b non è eseguibile (essendo il dividendo minore del divisore).

In realtà la divisione è perfettamente eseguibile: si ha quoziente nullo e resto uguale al dividendo.



In maniera del tutto naturale si possono estendere le nozioni precedenti anche alla divisione tra un polinomio e un monomio e tra due polinomi.

In maniera del tutto naturale si possono estendere le nozioni precedenti anche alla divisione tra un polinomio e un monomio e tra due polinomi.

Cominciamo a considerare il caso della divisione tra un polinomio e un monomio.

In maniera del tutto naturale si possono estendere le nozioni precedenti anche alla divisione tra un polinomio e un monomio e tra due polinomi.

Cominciamo a considerare il caso della divisione tra un polinomio e un monomio.

Divisibilità di un polinomio per un monomio

Assegnato un polinomio P (detto *dividendo*) ed un monomio M (detto *divisore*) diciamo che P è **divisibile** per M se esiste un polinomio Q, detto quoziente, che moltiplicato per il monomio M dia il polinomio P.

In maniera del tutto naturale si possono estendere le nozioni precedenti anche alla divisione tra un polinomio e un monomio e tra due polinomi.

Cominciamo a considerare il caso della divisione tra un polinomio e un monomio.

Divisibilità di un polinomio per un monomio

Assegnato un polinomio P (detto *dividendo*) ed un monomio M (detto *divisore*) diciamo che P è **divisibile** per M se esiste un polinomio Q, detto quoziente, che moltiplicato per il monomio M dia il polinomio P.

Da un punto di vista di calcolo, la divisione porta a quoziente non nullo solo nel caso in cui ciascun monomio del polinomio dividendo P risulti divisibile per il monomio dividendo M.

Vediamo un esempio.

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2-2x^2y+x^5y^4):(-3x^2y).$$

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2-2x^2y+x^5y^4):(-3x^2y).$$

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2-2x^2y+x^5y^4):(-3x^2y).$$

$$Q =$$

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2-2x^2y+x^5y^4):(-3x^2y).$$

$$Q = (3x^3y^2) : (-3x^2y)$$

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2-2x^2y+x^5y^4):(-3x^2y).$$

$$Q = (3x^3y^2) : (-3x^2y) +$$

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2-2x^2y+x^5y^4):(-3x^2y).$$

$$Q = (3x^3y^2) : (-3x^2y) + (-2x^2y) : (-3x^2y)$$

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2-2x^2y+x^5y^4):(-3x^2y).$$

$$Q = (3x^3y^2) : (-3x^2y) + (-2x^2y) : (-3x^2y) +$$

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2-2x^2y+x^5y^4):(-3x^2y).$$

$$Q = (3x^3y^2): (-3x^2y) + (-2x^2y): (-3x^2y) + (+x^5y^4): (-3x^2y)$$

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2-2x^2y+x^5y^4):(-3x^2y).$$

$$Q = (3x^3y^2) : (-3x^2y) + (-2x^2y) : (-3x^2y) + (+x^5y^4) : (-3x^2y) =$$

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2-2x^2y+x^5y^4):(-3x^2y).$$

$$Q = (3x^3y^2) : (-3x^2y) + (-2x^2y) : (-3x^2y) + (+x^5y^4) : (-3x^2y) =$$

$$=-1xv$$

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2-2x^2y+x^5y^4):(-3x^2y).$$

$$Q = (3x^{3}y^{2}): (-3x^{2}y) + (-2x^{2}y): (-3x^{2}y) + (+x^{5}y^{4}): (-3x^{2}y) =$$

$$=-1xy+\frac{2}{3}$$

Per calcolare il quoziente Q della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di P per il monomio M (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

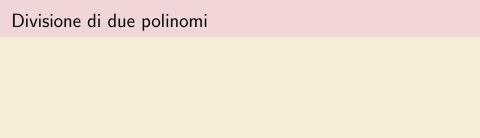
Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2-2x^2y+x^5y^4):(-3x^2y).$$

Applicando la proprietà distributiva troviamo che il quoziente Q è

$$Q = (3x^{3}y^{2}) : (-3x^{2}y) + (-2x^{2}y) : (-3x^{2}y) + (+x^{5}y^{4}) : (-3x^{2}y) =$$

$$= -1xy + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x^{3}y^{3}.$$



Passiamo ora alla questione centrale della trattazione, vale a dire la divisione tra due polinomi.

Passiamo ora alla questione centrale della trattazione, vale a dire la divisione tra due polinomi.

Consideriamo inizialmente due polinomi A (dividendo) e B (divisore) contenenti una sola lettera x, denotandoli con A(x) e B(x).

Passiamo ora alla questione centrale della trattazione, vale a dire la divisione tra due polinomi.

Consideriamo inizialmente due polinomi A (dividendo) e B (divisore) contenenti una sola lettera x, denotandoli con A(x) e B(x). È possibile dimostrare, come accadeva nell'ambito dei numeri natuali, il seguente teorema:

Passiamo ora alla questione centrale della trattazione, vale a dire la divisione tra due polinomi.

Consideriamo inizialmente due polinomi A (dividendo) e B (divisore) contenenti una sola lettera x, denotandoli con A(x) e B(x). È possibile dimostrare, come accadeva nell'ambito dei numeri natuali, il seguente teorema:

Teorema del Quoziente e del Resto

Se A(x) e B(x) sono due polinomi ordinati secondo le potenze decrescenti della x e se B(x) non è il polinomio nullo, esistono e sono unici un polinomio Q(x) ed un polinomio R(x) che soddisfano

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Se si ha R(x) = 0 si dice che A(x) è divisibile (esattamente) per B(x) o che la divisione è **esatta**.

Se si ha R(x) = 0 si dice che A(x) è divisibile (esattamente) per B(x) o che la divisione è **esatta**.

Pertanto, come accadeva per le divisioni tra numeri, **dividere un polinomio** A(x) **per un polinomio** B(x) significa **trovare due** opportuni **polinomi**, Q(x) e R(x), tali per cui il polinomio dividendo A(x) sia uguale al prodotto tra i polinomi B(x) e Q(x) aumentato del polinomio R(x).

Se si ha R(x) = 0 si dice che A(x) è divisibile (esattamente) per B(x) o che la divisione è **esatta**.

Pertanto, come accadeva per le divisioni tra numeri, **dividere un polinomio** A(x) **per un polinomio** B(x) significa **trovare due** opportuni **polinomi**, Q(x) e R(x), tali per cui il polinomio dividendo A(x) sia uguale al prodotto tra i polinomi B(x) e Q(x) aumentato del polinomio R(x).

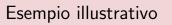
Si tratta ora di illustrare un **algoritmo di calcolo** (come peraltro accadeva già per le divisioni tra numeri) che, assegnati due polinomi A(x) e B(x) con grado $A(x) \ge \operatorname{grado} B(x)$, consenta di calcolarne il quoziente Q(x) e il resto R(x) della loro divisione.

Se si ha R(x) = 0 si dice che A(x) è divisibile (esattamente) per B(x) o che la divisione è **esatta**.

Pertanto, come accadeva per le divisioni tra numeri, **dividere un polinomio** A(x) **per un polinomio** B(x) significa **trovare due** opportuni **polinomi**, Q(x) e R(x), tali per cui il polinomio dividendo A(x) sia uguale al prodotto tra i polinomi B(x) e Q(x) aumentato del polinomio R(x).

Si tratta ora di illustrare un **algoritmo di calcolo** (come peraltro accadeva già per le divisioni tra numeri) che, assegnati due polinomi A(x) e B(x) con grado $A(x) \ge \operatorname{grado} B(x)$, consenta di calcolarne il quoziente Q(x) e il resto R(x) della loro divisione.

Esporremo questo algoritmo di divisione attraverso un esempio.



Esempio illustrativo

Calcoliamo il quoziente Q(x) e il resto R(x) della divisione

$$(3x^4-2x^2+x+1):(-x+x^2).$$

Esempio illustrativo

Calcoliamo il quoziente Q(x) e il resto R(x) della divisione

$$(3x^4-2x^2+x+1):(-x+x^2).$$

1) Per prima cosa si **ordinano** sia il dividendo che il divisore secondo le **potenze decrescenti** della lettera x; inoltre si provvede a **completare il dividendo**. Si scrive quindi

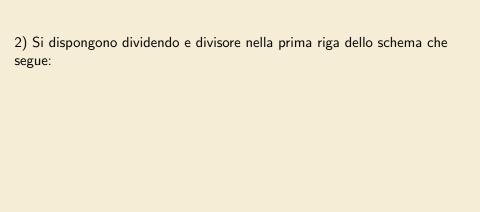
Esempio illustrativo

Calcoliamo il quoziente Q(x) e il resto R(x) della divisione

$$(3x^4-2x^2+x+1):(-x+x^2).$$

1) Per prima cosa si **ordinano** sia il dividendo che il divisore secondo le **potenze decrescenti** della lettera x; inoltre si provvede a **completare il dividendo**. Si scrive quindi

$$\underbrace{\left(3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x + 1\right)}_{\text{ordinato e completato}} : \underbrace{\left(x^2 - x\right)}_{\text{ordinato}}.$$



$$3x^4 +0x^3 -2x^2 +x +1$$
 $x^2 -x$

$$3x^4 +0x^3 -2x^2 +x +1$$
 $x^2 -x$

3) Si divide il primo termine di A(x), cioè $3x^4$, per il primo termine di B(x), cioè x^2 .

$$3x^4 +0x^3 -2x^2 +x +1$$
 $x^2 -x$

3) Si divide il primo termine di A(x), cioè $3x^4$, per il primo termine di B(x), cioè x^2 .

Si ottiene quindi

$$3x^4:(x^2)=3x^2.$$

$$3x^4 +0x^3 -2x^2 +x +1$$
 $x^2 -x$

3) Si **divide** il **primo termine** di A(x), cioè $3x^4$, per il **primo termine** di B(x), cioè x^2 .

Si ottiene quindi

$$3x^4:(x^2)=3x^2.$$

Questo è il **primo termine del quoziente** Q(x) e lo si scrive nella posizione indicata in tabella:



$$3x^4 +0x^3 -2x^2 +x +1$$
 $x^2 -x$ $3x^2$

$$3x^4 +0x^3 -2x^2 +x +1$$
 $x^2 -x$ $3x^2$

4) Si moltiplica questo primo termine $3x^2$ per ciascun termine del divisore B(x):

$$3x^4 +0x^3 -2x^2 +x +1$$
 $x^2 -x$ $3x^2$

4) Si moltiplica questo primo termine $3x^2$ per ciascun termine del divisore B(x):

$$3x^2 \cdot x^2 = 3x^4$$
, $3x^2 \cdot (-x) = -3x^3$

$$3x^{4} +0x^{3} -2x^{2} +x +1$$
 $x^{2} -x$
 $-3x^{4} +3x^{3}$
 $3x^{2}$

$$3x^4 +0x^3 -2x^2 +x +1$$
 $-3x^4 +3x^3$
 $x^2 -x$
 $3x^2$

6) A questo punto si calcola il primo resto parziale $R_1(x)$ effettuando la somma algebrica tra A(x) e il polinomio appena scritto al di sotto di A(x): tale resto parziale risulta uguale a

$$3x^4 +0x^3 -2x^2 +x +1$$
 $-3x^4 +3x^3$
 $x^2 -x$
 $3x^2$

6) A questo punto si calcola il primo resto parziale $R_1(x)$ effettuando la somma algebrica tra A(x) e il polinomio appena scritto al di sotto di A(x): tale resto parziale risulta uguale a

$$(3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x + 1) + (-3x^4 + 3x^3) =$$

6) A questo punto si calcola il primo resto parziale $R_1(x)$ effettuando la somma algebrica tra A(x) e il polinomio appena scritto al di sotto di A(x): tale resto parziale risulta uguale a

$$(3x4 + 0x3 - 2x2 + x + 1) + (-3x4 + 3x3) =$$

$$= 3x3 - 2x2 + x + 1 =: R1(x)$$

7) Ora si ripete la stessa procedura iniziata al punto 3) partendo dal polinomio $R_1(x)$. Dividiamo quindi il **primo termine** di $R_1(x)$, cioè $+3x^3$, per il primo termine di B(x), cioè x^2 , trovando

$$(+3x^3):(x^2)=3x.$$

7) Ora si ripete la stessa procedura iniziata al punto 3) partendo dal polinomio $R_1(x)$. Dividiamo quindi il **primo termine** di $R_1(x)$, cioè $+3x^3$, per il primo termine di B(x), cioè x^2 , trovando

$$(+3x^3):(x^2)=3x.$$

Scriviamo tale risultato (che sarà il **secondo termine del quoziente**) nella riga del quoziente, accanto al primo termine $3x^2$.

A questo punto moltiplichiamo il termine -3x per tutti i termini del divisore B(x)

A questo punto moltiplichiamo il termine -3x per tutti i termini del divisore B(x)

$$3x \cdot (x^2) = 3x^3$$
, $3x \cdot (-x) = -3x^2$,

Otteniamo quindi

A questo punto moltiplichiamo il termine -3x per tutti i termini del divisore B(x)

$$3x \cdot (x^2) = 3x^3, \quad 3x \cdot (-x) = -3x^2,$$

e riportiamo, cambiati in segno, tali prodotti al di sotto di $R_1(x)$:

Calcoliamo quindi il resto parziale $R_2(x)$ e otteniamo

$$(3x^3 - 2x^2 + x + 1) + (-3x^3 + 3x^2) = x^2 + x + 1 =: R_2(x).$$

Calcoliamo quindi il resto parziale $R_2(x)$ e otteniamo

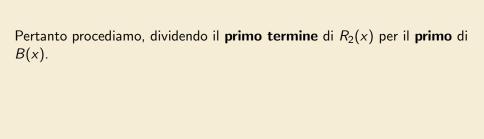
$$(3x^3 - 2x^2 + x + 1) + (-3x^3 + 3x^2) = x^2 + x + 1 =: R_2(x).$$

Aggiorniamo la tabella:

8) E così via. Si procede sempre allo stesso modo. L'algoritmo termina quando si trova un resto parziale che abbia grado minore di quello del divisore (il che vuol dire che non è più possibile effettuare la divisione). Quest'ultimo resto parziale sarà il resto della divisione di partenza.

8) E così via. Si procede sempre allo stesso modo. L'algoritmo termina quando si trova un resto parziale che abbia grado minore di quello del divisore (il che vuol dire che non è più possibile effettuare la divisione). Quest'ultimo resto parziale sarà il resto della divisione di partenza.

Nel nostro caso la procedura non è ancora arrestata in quanto il polinomio $R_2(x)$, $x^2 + x + 1$, ha lo stesso grado del divisore B(x).



$$x^2:(x^2)=+1.$$

$$x^2:(x^2)=+1.$$

Procedendo come prima troviamo

$$x^2:(x^2)=+1.$$

Procedendo come prima troviamo

$$x^2:(x^2)=+1.$$

Procedendo come prima troviamo

da cui, moltiplicando opportunamente come da regola, e incolonnando con $R_2(x)$ troviamo

	$3x^4$	$+0x^{3}$	$-2x^{2}$	+ <i>x</i>	+1	x^2	-x	
	$-3x^{4}$	$-3x^{3}$				$3x^2$	+3 <i>x</i>	+1
$R_1(x)$		$3x^3$	$-2x^2$	+x	+1			
		$-3x^{3}$	$+3x^{2}$					
$R_2(x)$			x^2	+x	+1			
			$-x^2$	+x	+1			
$R_3(x)$				2 <i>x</i>	+1			

	$3x^{4}$	$+0x^{3}$	$-2x^{2}$	+ <i>x</i>	+1	x^2	-x	
	$-3x^{4}$	$-3x^{3}$				$3x^2$	+3 <i>x</i>	+1
$R_1(x)$		$3x^3$	$-2x^2$	+ <i>x</i>	+1			
		$-3x^{3}$	$+3x^{2}$					
$R_2(x)$			x^2	+x	+1			
			$-x^2$	+ <i>x</i>	+1			
$R_3(x)$				2 <i>x</i>	+1			

Concludiamo che

Concludiamo che

$$Q(x) = 3x^2 + 3x + 1$$
,

Concludiamo che

$$Q(x) = 3x^2 + 3x + 1,$$
 $R(x) = 2x + 1$

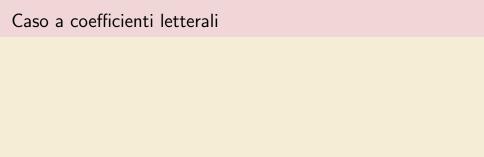
Pertanto, in forza del Teorema del Quoziente e del Resto prima enunciato, possiamo affermare che

$$\underbrace{3x^4 - 2x^2 + x + 1}_{A(x)} = \underbrace{(x^2 - x)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(3x^2 + 3x + 1)}_{Q(x)} + \underbrace{(2x + 1)}_{R(x)}.$$

Pertanto, in forza del Teorema del Quoziente e del Resto prima enunciato, possiamo affermare che

$$\underbrace{3x^4 - 2x^2 + x + 1}_{A(x)} = \underbrace{(x^2 - x)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(3x^2 + 3x + 1)}_{Q(x)} + \underbrace{(2x + 1)}_{R(x)}.$$

Effettivamente, se si controlla col calcolo, si trova che la precedente uguaglianza (comunque garantita dal Teorema) risulta verificata.



Consideriamo in questa sezione divisioni in una certa variabile e i cui coefficienti siano costituiti anche da lettere.

Consideriamo in questa sezione divisioni in una certa variabile e i cui coefficienti siano costituiti anche da lettere.

La procedura è la medesima di quella relativa al caso con coefficienti numerici.

Consideriamo in questa sezione divisioni in una certa variabile e i cui coefficienti siano costituiti anche da lettere.

La procedura è la medesima di quella relativa al caso con coefficienti numerici.

Vediamo un esempio.

Consideriamo in questa sezione divisioni in una certa variabile e i cui coefficienti siano costituiti anche da lettere.

La procedura è la medesima di quella relativa al caso con coefficienti numerici.

Vediamo un esempio.

Si esegua la divisione

$$(9x^3 + 3x^2y - 11xy^2) : (3x^2 + 2xy - 3y^2).$$

Consideriamo in questa sezione divisioni in una certa variabile e i cui coefficienti siano costituiti anche da lettere.

La procedura è la medesima di quella relativa al caso con coefficienti numerici.

Vediamo un esempio.

Si esegua la divisione

$$(9x^3 + 3x^2y - 11xy^2) : (3x^2 + 2xy - 3y^2).$$

Constatiamo immediatamente che compaiono due lettere.

Il **quoziente** e il **resto** della divisione **cambiano** a seconda di quale sia la lettera che si vuole considerare come variabile della divisione.

Consideriamo in questa sezione divisioni in una certa variabile e i cui coefficienti siano costituiti anche da lettere.

La procedura è la medesima di quella relativa al caso con coefficienti numerici.

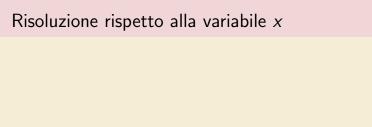
Vediamo un esempio.

Si esegua la divisione

$$(9x^3 + 3x^2y - 11xy^2) : (3x^2 + 2xy - 3y^2).$$

Constatiamo immediatamente che compaiono due lettere.

Il **quoziente** e il **resto** della divisione **cambiano** a seconda di quale sia la lettera che si vuole considerare come variabile della divisione. Risolveremo pertanto la divisione dapprima considerando la x come variabile e la y come costante, successivamente considerando la y come variabile e la x come costante.



Cominciamo col riscrivere la divisione **ordinando** e **completando rispetto alla variabile** x ed evidenziando in colore blu i coefficienti (numeri e lettere) e in colore rosso la variabile (x):

Cominciamo col riscrivere la divisione **ordinando** e **completando rispetto alla variabile** x ed evidenziando in colore blu i coefficienti (numeri e lettere) e in colore rosso la variabile (x):

$$(9x^3+3yx^2-11y^2x+0):(3x^2+2yx-3y^2).$$

Cominciamo col riscrivere la divisione **ordinando** e **completando rispetto alla variabile** x ed evidenziando in colore blu i coefficienti (numeri e lettere) e in colore rosso la variabile (x):

$$(9x^3+3yx^2-11y^2x+0):(3x^2+2yx-3y^2).$$

A questo punto, procediamo seguendo la regola già illustrata.

Cominciamo col riscrivere la divisione **ordinando** e **completando rispetto alla variabile** x ed evidenziando in colore blu i coefficienti (numeri e lettere) e in colore rosso la variabile (x):

$$(9x^3+3yx^2-11y^2x+0):(3x^2+2yx-3y^2).$$

A questo punto, procediamo seguendo la regola già illustrata.

1) Disponiamo in tabella dividendo e divisore:

Cominciamo col riscrivere la divisione **ordinando** e **completando rispetto alla variabile** x ed evidenziando in colore blu i coefficienti (numeri e lettere) e in colore rosso la variabile (x):

$$(9x^3+3yx^2-11y^2x+0):(3x^2+2yx-3y^2).$$

A questo punto, procediamo seguendo la regola già illustrata.

1) Disponiamo in tabella dividendo e divisore:

$$9x^3 + 3yx^2 - 11y^2x + 0$$
 $3x^2 + 2yx - 3y^2$

$$(9x^3):(3x^2)=3x,$$

$$(9x^3):(3x^2)=3x,$$

e riportiamo tale risultato (primo termine del quoziente) nella riga sotto al divisore:

$$(9x^3):(3x^2)=3x,$$

e riportiamo tale risultato (primo termine del quoziente) nella riga sotto al divisore:

$$9x^3 + 3yx^2 - 11y^2x + 0$$
 $3x^2 + 2yx - 3y^2$
 $3x$

$$(9x^3):(3x^2)=3x,$$

e riportiamo tale risultato (primo termine del quoziente) nella riga sotto al divisore:

$$9x^3 + 3yx^2 - 11y^2x + 0$$
 $3x^2 + 2yx - 3y^2$
 $3x$

3) Moltiplichiamo il termine 3x per ogni termine del divisore:

2) Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore:

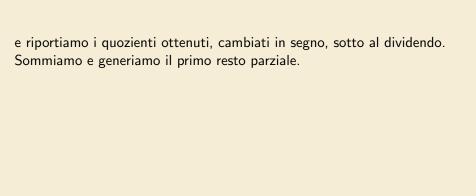
$$(9x^3):(3x^2)=3x,$$

e riportiamo tale risultato (primo termine del quoziente) nella riga sotto al divisore:

$$9x^3 + 3yx^2 - 11y^2x + 0$$
 $3x^2 + 2yx - 3y^2$
 $3x$

3) Moltiplichiamo il termine 3x per ogni termine del divisore:

$$3x \cdot (3x^2) = 9x^3$$
, $3x \cdot (2yx) = 6yx^2$ $3x \cdot (-3y^2) = -9y^2x$,



e riportiamo i quozienti ottenuti, cambiati in segno, sotto al dividendo. Sommiamo e generiamo il primo resto parziale.

e riportiamo i quozienti ottenuti, cambiati in segno, sotto al dividendo. Sommiamo e generiamo il primo resto parziale.

$$R_{1}(x) = \begin{bmatrix} 9x^{3} & +3yx^{2} & -11y^{2}x & +0 \\ -9x^{3} & -6yx^{2} & +9y^{2}x \\ \hline & -3yx^{2} & -2y^{2}x & +0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^{2} & +2yx & -3y^{2} \\ \hline 3x \\ \hline \end{bmatrix}$$

4) Dividiamo il primo termine di $R_1(x)$, cioè $-3yx^2$, per il primo termine del divisore, vale a dire $3x^2$, ricordandoci che la lettera y è una costante: troviamo

$$(-3yx^2):(3x^2)=-y.$$

Scriviamo tale risultato accanto al primo termine 3x del quoziente:

Scriviamo tale risultato accanto al primo termine 3x del quoziente:

5) Procedendo come sempre, aggiorniamo lo schema:

Scriviamo tale risultato accanto al primo termine 3x del quoziente:

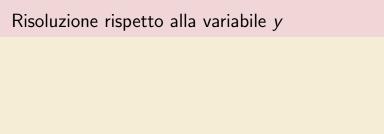
$$R_{1}(x) = \begin{bmatrix} 9x^{3} & +3yx^{2} & -11y^{2}x & +0 \\ -9x^{3} & -6yx^{2} & +3y^{2}x \\ \hline & -3yx^{2} & -2y^{2}x & +0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x^{2} & +2yx & -3y^{2} \\ \hline 3x & -y \\ \hline \end{bmatrix}$$

5) Procedendo come sempre, aggiorniamo lo schema:

6) Poiché il primo (e unico) termine del resto $R_2(x)$, vale a dire $-3v^3 = -3v^3x^0$ non è divisibile per $3x^2$, concludiamo che

$$Q(x) = 3x - y,$$

$$R(x) = -3y^3.$$



Diverso è il risultato se si decide di considerare come **variabile** della divisione la lettera y.

Diverso è il risultato se si decide di considerare come **variabile** della divisione la lettera y.

A tale scopo, riordiniamo opportunamente il polinomio, considerando la lettera *x* come una costante.

Diverso è il risultato se si decide di considerare come **variabile** della divisione la lettera y.

A tale scopo, riordiniamo opportunamente il polinomio, considerando la lettera x come una costante. Risulta, evidenziando come prima,

$$(-11xy^2+3x^2y+9x^3):(-3y^2+2xy+3x^2).$$

Diverso è il risultato se si decide di considerare come **variabile** della divisione la lettera y.

A tale scopo, riordiniamo opportunamente il polinomio, considerando la lettera x come una costante. Risulta, evidenziando come prima,

$$(-11xy^2+3x^2y+9x^3):(-3y^2+2xy+3x^2).$$

Predisponiamo lo schema:

$$-11xy^2 +3x^2y +9x^3$$
 $-3y^2 +2xy +3x^2$

A questo punto si rimette in atto il solito algoritmo (non dimenticandosi che la y è la variabile, mentre la x è una costante).

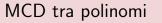
A questo punto si rimette in atto il solito algoritmo (non dimenticandosi che la y è la variabile, mentre la x è una costante). Si trova facilmente

$$R_{1}(y) = \begin{bmatrix} -11xy^{2} & +3x^{2}y & +9x^{3} \\ 11y^{2}x & -\frac{22}{3}x^{2}y & -11x^{3} \\ & -\frac{13}{3}x^{2}y & -2x^{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3y^{2} & +2yx & +3x^{2} \\ & & \\ \hline \frac{11}{3}x & & \\ & & \\ \hline \end{bmatrix}$$

A questo punto si rimette in atto il solito algoritmo (non dimenticandosi che la y è la variabile, mentre la x è una costante). Si trova facilmente

Poiché il primo termine di $R_1(y)$, vale a dire $-\frac{11}{3}x^2y$ non è divisibile per il primo termine del divisore, cioè $-3y^2$, concludiamo che

$$Q(y) = \frac{11}{3}x$$
, $R(y) = -\frac{13}{3}x^2y - 2x^3$.



Come accade coi numeri interi, è possibile definire il concetto di **Massimo Comune Divisore** anche tra polinomi.

Come accade coi numeri interi, è possibile definire il concetto di **Massimo Comune Divisore** anche tra polinomi.

Per semplicità, consideriamo il caso in cui i polinomi assegnati contengano una sola lettera, supponiamo la x.

Come accade coi numeri interi, è possibile definire il concetto di **Massimo Comune Divisore** anche tra polinomi.

Per semplicità, consideriamo il caso in cui i polinomi assegnati contengano una sola lettera, supponiamo la x.

Prima di dare la definizione di Massimo Comune Divisore tra polinomi, è necessario premettere un'ulteriore definizione:

Come accade coi numeri interi, è possibile definire il concetto di **Massimo Comune Divisore** anche tra polinomi.

Per semplicità, consideriamo il caso in cui i polinomi assegnati contengano una sola lettera, supponiamo la x.

Prima di dare la definizione di Massimo Comune Divisore tra polinomi, è necessario premettere un'ulteriore definizione:

Definizione

Assegnati due polinomi A(x) e B(x), diciamo che il polinomio B(x) divide il polinomio A(x) e scriviamo

$$B(x) \mid A(x)$$
,

se esiste un polinomio C(x) tale che

$$A(x) = B(x) \cdot C(x)$$
.

Ad esempio, il polinomio B(x) = x - 1 divide $A(x) = x^2 + 2x - 3$:

Ad esempio, il polinomio B(x) = x - 1 divide $A(x) = x^2 + 2x - 3$: infatti

$$\underbrace{x^2 + 2x - 3}_{A(x)} = \underbrace{(x - 1)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(x + 3)}_{C(x)}$$

Nel caso di numeri interi, si dice che b divide a quando a è un multiplo di b (o, equivalentemente, b è un sottomultiplo di a).

Effettivamente, per semplicità, si può estendere tale notazione anche al caso dei polinomi.

Possiamo affermare che il polinomio B(x) divide il polinomio A(x) se A(x) è un multiplo (attraverso una costante o un effettivo polinomio) di B(x).

Ad esempio, il polinomio B(x) = x - 1 divide $A(x) = x^2 + 2x - 3$: infatti

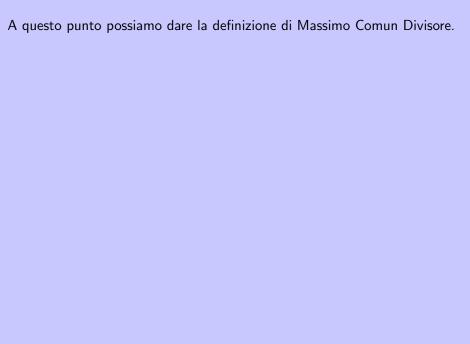
$$\underbrace{x^2 + 2x - 3}_{A(x)} = \underbrace{(x - 1)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(x + 3)}_{C(x)}$$

Nel caso di numeri interi, si dice che b divide a quando a è un multiplo di b (o, equivalentemente, b è un sottomultiplo di a).

Effettivamente, per semplicità, si può estendere tale notazione anche al caso dei polinomi.

Possiamo affermare che il polinomio B(x) divide il polinomio A(x) se A(x) è un multiplo (attraverso una costante o un effettivo polinomio) di B(x). Osserviamo che se B(x) divide A(x), si ha necessariamente

$$\operatorname{grado}[A(x)] \ge \operatorname{grado}[B(x)]$$



A questo punto possiamo dare la definizione di Massimo Comun Divisore.

MCD tra polinomi

Dati due polinomi A(x) e B(x) chiamiamo Massimo Comune Divisore tra A(x) e B(x), e lo denotiamo con

un polinomio D(x) tale che:

- D(x) | A(x), D(x) | B(x)
- Se esiste un polinomio C(x) tale che $C(x) \mid A(x)$ e $C(x) \mid A(x)$, allora $C(x) \mid D(x)$

A questo punto possiamo dare la definizione di Massimo Comun Divisore.

MCD tra polinomi

Dati due polinomi A(x) e B(x) chiamiamo Massimo Comune Divisore tra A(x) e B(x), e lo denotiamo con

un polinomio D(x) tale che:

- D(x) | A(x), D(x) | B(x)
- Se esiste un polinomio C(x) tale che $C(x) \mid A(x)$ e $C(x) \mid A(x)$, allora $C(x) \mid D(x)$

In altre parole, il *MCD* tra due polinomi è, come accadeva coi numeri, un polinomio che sia contemporaneamente sottomultiplo di entrambi i polinomi di partenza e che abbia grado più alto possibile.

Si tratta ora di stabilire in quale maniera si possa determinare tale polinomio.

Si tratta ora di stabilire in quale maniera si possa determinare tale polinomio.

La determinazione del MCD tra due polinomi A(x) e B(x) assegnati avviene tramite una procedura che trova ampia giustificazione a livello teorico.

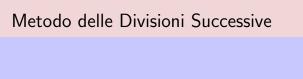
Noi ci limitiamo a illustrare tale procedura e a vederla applicata a un esempio concreto.

Si tratta ora di stabilire in quale maniera si possa determinare tale polinomio.

La determinazione del MCD tra due polinomi A(x) e B(x) assegnati avviene tramite una procedura che trova ampia giustificazione a livello teorico.

Noi ci limitiamo a illustrare tale procedura e a vederla applicata a un esempio concreto.

L'algoritmo per l'individuazione del *MCD* tra due polinomi prende il nome di **Metodo delle Divisioni Successive**.



Metodo delle Divisioni Successive

Consideriamo due polinomi A(x) e B(x), con grado $[A(x)] \ge \operatorname{grado}[B(x)]$.

1) Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi $Q_0(x)$ e $R_1(x)$ tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q_0(x) + R_1(x).$$

Metodo delle Divisioni Successive

Consideriamo due polinomi A(x) e B(x), con grado $[A(x)] \ge \operatorname{grado}[B(x)]$.

1) Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi $Q_0(x)$ e $R_1(x)$ tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q_0(x) + R_1(x).$$

Possono verificarsi due casi:

Metodo delle Divisioni Successive

Consideriamo due polinomi A(x) e B(x), con grado $[A(x)] \ge \operatorname{grado}[B(x)]$.

1) Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi $Q_0(x)$ e $R_1(x)$ tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q_0(x) + R_1(x).$$

Possono verificarsi due casi:

• Se $R_1(x) = 0$, allora MCD(A(x), B(x)) = B(x) e l'algoritmo termina.

Metodo delle Divisioni Successive

Consideriamo due polinomi A(x) e B(x), con grado $[A(x)] \ge \operatorname{grado}[B(x)]$.

1) Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi $Q_0(x)$ e $R_1(x)$ tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q_0(x) + R_1(x).$$

Possono verificarsi due casi:

- Se $R_1(x) = 0$, allora MCD(A(x), B(x)) = B(x) e l'algoritmo termina.
- Se, invece, $R_1(x) \neq 0$, allora $0 < \text{grado}[R_1(x)] < \text{grado}[B(x)]$ e l'algoritmo prosegue al passo 2).

2) Dobbiamo effettuare la divisione tra B(x) e $R_1(x)$.

2) Dobbiamo effettuare la divisione tra B(x) e $R_1(x)$.

Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi $Q_1(x)$ e $R_2(x)$ tali che

$$B(x) = Q_1(x)R_1(x) + R_2(x).$$

2) Dobbiamo effettuare la divisione tra B(x) e $R_1(x)$.

Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi $Q_1(x)$ e $R_2(x)$ tali che

$$B(x) = Q_1(x)R_1(x) + R_2(x).$$

- Se $R_2(x) = 0$, allora $MCD(A(x), B(x)) = R_1(x)$ e l'algoritmo termina.
- Se, invece, $R_2(x) \neq 0$, allora $0 < \text{grado}[R_2(x)] < \text{grado}[R_1(x)]$ e l'algoritmo prosegue al passo 3).

3) Eseguiamo quindi la divisione tra $R_1(x)$ e $R_2(x)$.

3) Eseguiamo quindi la divisione tra $R_1(x)$ e $R_2(x)$. Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi $Q_2(x)$ e $R_3(x)$ tali che

$$R_1(x) = Q_2(x)R_2(x) + R_3(x).$$

3) Eseguiamo quindi la divisione tra $R_1(x)$ e $R_2(x)$. Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi $Q_2(x)$ e $R_3(x)$ tali che

$$R_1(x) = Q_2(x)R_2(x) + R_3(x).$$

- Se $R_3(x) = 0$, allora $MCD(A(x), B(x)) = R_2(x)$ e l'algoritmo termina.
- Se, invece, $R_3(x) \neq 0$, allora $0 < \text{grado}[R_3(x)] < \text{grado}[R_2(x)]$ e l'algoritmo prosegue al passo 4).

3) Eseguiamo quindi la divisione tra $R_1(x)$ e $R_2(x)$.

Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi $Q_2(x)$ e $R_3(x)$ tali che

$$R_1(x) = Q_2(x)R_2(x) + R_3(x).$$

- Se $R_3(x) = 0$, allora $MCD(A(x), B(x)) = R_2(x)$ e l'algoritmo termina.
- Se, invece, $R_3(x) \neq 0$, allora $0 < \text{grado}[R_3(x)] < \text{grado}[R_2(x)]$ e l'algoritmo prosegue al passo 4).

In pratica, l'algoritmo termina non appena si individui, nella sequenza di divisioni appena definite, il **primo resto diverso dal polinomio nullo**.

3) Eseguiamo quindi la divisione tra $R_1(x)$ e $R_2(x)$. Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi $Q_2(x)$ e $R_3(x)$ tali che

$$R_1(x) = Q_2(x)R_2(x) + R_3(x).$$

- Se $R_3(x) = 0$, allora $MCD(A(x), B(x)) = R_2(x)$ e l'algoritmo termina.
- Se, invece, $R_3(x) \neq 0$, allora $0 < \text{grado}[R_3(x)] < \text{grado}[R_2(x)]$ e l'algoritmo prosegue al passo 4).

In pratica, l'algoritmo termina non appena si individui, nella sequenza di divisioni appena definite, il **primo resto diverso dal polinomio nullo**.

Osserviamo che, effettivamente, l'algoritmo appena illustrato ha sempre termine.

3) Eseguiamo quindi la divisione tra $R_1(x)$ e $R_2(x)$. Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi $Q_2(x)$ e $R_3(x)$ tali che

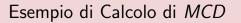
$$R_1(x) = Q_2(x)R_2(x) + R_3(x).$$

- Se $R_3(x) = 0$, allora $MCD(A(x), B(x)) = R_2(x)$ e l'algoritmo termina.
- Se, invece, $R_3(x) \neq 0$, allora $0 < \text{grado}[R_3(x)] < \text{grado}[R_2(x)]$ e l'algoritmo prosegue al passo 4).

In pratica, l'algoritmo termina non appena si individui, nella sequenza di divisioni appena definite, il **primo resto diverso dal polinomio nullo**.

Osserviamo che, effettivamente, l'algoritmo appena illustrato ha sempre termine.

Mostriamo ora un esempio di calcolo di MCD tra due polinomi.



Si determini

$$MCD(A(x) = x^3 + 1, B(x) = x^2 + 1).$$

Si determini

$$MCD(A(x) = x^3 + 1, B(x) = x^2 + 1).$$

1) Cominciamo a eseguire, attraverso l'algoritmo standard, la divisione tra A(x) e B(x):

Si determini

$$MCD(A(x) = x^3 + 1, B(x) = x^2 + 1).$$

1) Cominciamo a eseguire, attraverso l'algoritmo standard, la divisione tra A(x) e B(x):

$$R_1(x)$$
 $\begin{array}{c|cccc} & x^3 & +1 & x^2 & +1 \\ \hline & & & \\ & & & \\ \hline \end{array}$

Si determini

$$MCD(A(x) = x^3 + 1, B(x) = x^2 + 1).$$

1) Cominciamo a eseguire, attraverso l'algoritmo standard, la divisione tra A(x) e B(x):

Quindi

$$\underbrace{x^{3} + 1}_{A(x)} = \underbrace{(x^{2} + 1)}_{B(x)} \cdot \underbrace{x}_{Q_{0}(x)} + \underbrace{(-x + 1)}_{R_{1}(x)}$$

Poiché

$$R_1(x) = -x + 1 \neq 0,$$

l'algoritmo procede considerando la divisione tra i polinomi B(x) e $R_1(x)$.

$$R_1(x)=-x+1\neq 0,$$

l'algoritmo procede considerando la divisione tra i polinomi B(x) e $R_1(x)$. 2) Si ha

cioè

$$\underbrace{x^2 + 1}_{B(x)} = \underbrace{(-x + 1)}_{R_1(x)} \cdot \underbrace{-x - 1}_{Q_1(x)} + \underbrace{(2)}_{R_2(x)}.$$

Poiché

$$R_1(x)=-x+1\neq 0,$$

l'algoritmo procede considerando la divisione tra i polinomi B(x) e $R_1(x)$. 2) Si ha

cioè

$$\underbrace{x^2 + 1}_{B(x)} = \underbrace{(-x + 1)}_{R_1(x)} \cdot \underbrace{-x - 1}_{Q_1(x)} + \underbrace{(2)}_{R_2(x)}.$$

Poiché

$$R_2(x) = 2 \neq 0$$
,

l'algoritmo prosegue al passo 3) con la divisione tra $R_1(x)$ e $R_2(x)$.

3) Si ha

3) Si ha

Poiché

$$R_3(x)=0,$$

ne segue, per quanto illustrato nella parte teorica, che il Massimo Comun Divisore cercato è l'ultimo resto non nullo individuato, 3) Si ha

$$R_{3}(x) = \begin{array}{c|cccc} -x & +1 & & 2 & \\ \hline & -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2} & Q_{2}(x) & & \\ \hline \end{array}$$

Poiché

$$R_3(x)=0,$$

ne segue, per quanto illustrato nella parte teorica, che il Massimo Comun Divisore cercato è l'ultimo resto non nullo individuato, cioè

$$MCD(A(x), B(x)) = R_2(x) = 2.$$