

# La Divisione tra Polinomi

Michele Scaglia

Università Cattolica del Sacro Cuore

# Richiami sulla divisione tra numeri

# Richiami sulla divisione tra numeri

Siamo già abituati a parlare di divisione tra numeri interi (e, solo in un secondo momento, tra numeri razionali).

# Richiami sulla divisione tra numeri

Siamo già abituati a parlare di divisione tra numeri interi (e, solo in un secondo momento, tra numeri razionali). Qual è il significato della scrittura

$$a : b?$$

# Richiami sulla divisione tra numeri

Siamo già abituati a parlare di divisione tra numeri interi (e, solo in un secondo momento, tra numeri razionali). Qual è il significato della scrittura

$$a : b?$$

Sappiamo che, assegnati due numeri interi  $a$  (detto *dividendo*) e  $b$  (detto *divisore*) il *Teorema del quoziente e del resto* garantisce l'esistenza e l'unicità di due numeri interi  $q, r \in \mathbb{Z}$  tali che

$$a = bq + r,$$

$$0 \leq r < |b|.$$

# Richiami sulla divisione tra numeri

Siamo già abituati a parlare di divisione tra numeri interi (e, solo in un secondo momento, tra numeri razionali). Qual è il significato della scrittura

$$a : b?$$

Sappiamo che, assegnati due numeri interi  $a$  (detto *dividendo*) e  $b$  (detto *divisore*) il *Teorema del quoziente e del resto* garantisce l'esistenza e l'unicità di due numeri interi  $q, r \in \mathbb{Z}$  tali che

$$a = bq + r,$$

$$0 \leq r < |b|.$$

In altre parole: **eseguire la divisione** tra  $a$  e  $b$  significa **trovare due numeri interi**  $q$  ed  $r$  tali per cui il numero  $a$  sia uguale al prodotto tra i numeri  $b$  e  $q$  aumentato del numero  $r$ .

Gli unici numeri interi  $q$  ed  $r$  per cui

$$a = bq + r$$

vengono rispettivamente detti

Gli unici numeri interi  $q$  ed  $r$  per cui

$$a = bq + r$$

vengono rispettivamente detti

- $q$  : *quoziente* della divisione tra  $a$  e  $b$
- $r$  : *resto* della divisione tra  $a$  e  $b$



Gli unici numeri interi  $q$  ed  $r$  per cui

$$a = bq + r$$

vengono rispettivamente detti

- $q$  : *quoziente* della divisione tra  $a$  e  $b$
- $r$  : *resto* della divisione tra  $a$  e  $b$

La divisione tra  $a$  e  $b$  si dice **esatta** se  $r = 0$ .

Gli unici numeri interi  $q$  ed  $r$  per cui

$$a = bq + r$$

vengono rispettivamente detti

- $q$  : *quoziente* della divisione tra  $a$  e  $b$
- $r$  : *resto* della divisione tra  $a$  e  $b$

La divisione tra  $a$  e  $b$  si dice **esatta** se  $r = 0$ .

Siamo sempre stati abituati, sin dalla scuola elementare, a interpretare la divisione esatta tra due numeri interi  $a$  e  $b$  come quella situazione in cui il **numero  $b$  sta un numero esatto di volte nel numero  $a$**  (intendendo proprio che il resto della divisione è 0).

Ad esempio, se  $a = 29$  e  $b = 6$ , risulta  $q = 4$  e  $r = 5$ .

Ad esempio, se  $a = 29$  e  $b = 6$ , risulta  $q = 4$  e  $r = 5$ . Infatti

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$

$$0 \leq 5 < |6|,$$

Ad esempio, se  $a = 29$  e  $b = 6$ , risulta  $q = 4$  e  $r = 5$ . Infatti

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$

$$0 \leq 5 < |6|,$$

come da Teorema del quoziente e del resto.

Ad esempio, se  $a = 29$  e  $b = 6$ , risulta  $q = 4$  e  $r = 5$ . Infatti

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$

$$0 \leq 5 < |6|,$$

come da Teorema del quoziente e del resto.

Un altro esempio.

Ad esempio, se  $a = 29$  e  $b = 6$ , risulta  $q = 4$  e  $r = 5$ . Infatti

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$

$$0 \leq 5 < |6|,$$

come da Teorema del quoziente e del resto.

Un altro esempio.

Se  $a = 7$  e  $b = 9$ , allora si ha  $q = 0$  e  $r = 7$ .

Ad esempio, se  $a = 29$  e  $b = 6$ , risulta  $q = 4$  e  $r = 5$ . Infatti

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$

$$0 \leq 5 < |6|,$$

come da Teorema del quoziente e del resto.

Un altro esempio.

Se  $a = 7$  e  $b = 9$ , allora si ha  $q = 0$  e  $r = 7$ . Infatti

$$7 = 9 \cdot 0 + 7,$$

$$0 \leq 7 < |9|.$$



Ad esempio, se  $a = 29$  e  $b = 6$ , risulta  $q = 4$  e  $r = 5$ . Infatti

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$

$$0 \leq 5 < |6|,$$

come da Teorema del quoziente e del resto.

Un altro esempio.

Se  $a = 7$  e  $b = 9$ , allora si ha  $q = 0$  e  $r = 7$ . Infatti

$$7 = 9 \cdot 0 + 7,$$

$$0 \leq 7 < |9|.$$

In casi come questi si è soliti dire impropriamente che la divisione tra  $a$  e  $b$  non è eseguibile (essendo il dividendo minore del divisore).

Ad esempio, se  $a = 29$  e  $b = 6$ , risulta  $q = 4$  e  $r = 5$ . Infatti

$$29 = 6 \cdot 4 + 5,$$

$$0 \leq 5 < |6|,$$

come da Teorema del quoziente e del resto.

Un altro esempio.

Se  $a = 7$  e  $b = 9$ , allora si ha  $q = 0$  e  $r = 7$ . Infatti

$$7 = 9 \cdot 0 + 7,$$

$$0 \leq 7 < |9|.$$

In casi come questi si è soliti dire impropriamente che la divisione tra  $a$  e  $b$  non è eseguibile (essendo il dividendo minore del divisore).

In realtà la divisione è perfettamente eseguibile: si ha quoziente nullo e resto uguale al dividendo.

# Divisione di un Polinomio per un Monomio

# Divisione di un Polinomio per un Monomio

In maniera del tutto naturale si possono estendere le nozioni precedenti anche alla divisione tra un polinomio e un monomio e tra due polinomi.

# Divisione di un Polinomio per un Monomio

In maniera del tutto naturale si possono estendere le nozioni precedenti anche alla divisione tra un polinomio e un monomio e tra due polinomi.

Cominciamo a considerare il caso della **divisione tra un polinomio e un monomio**.

# Divisione di un Polinomio per un Monomio

In maniera del tutto naturale si possono estendere le nozioni precedenti anche alla divisione tra un polinomio e un monomio e tra due polinomi.

Cominciamo a considerare il caso della **divisione tra un polinomio e un monomio**.

## Divisibilità di un polinomio per un monomio

Assegnato un polinomio  $P$  (detto *dividendo*) ed un monomio  $M$  (detto *divisore*) diciamo che  $P$  è **divisibile** per  $M$  se esiste un polinomio  $Q$ , detto quoziente, che moltiplicato per il monomio  $M$  dia il polinomio  $P$ .

# Divisione di un Polinomio per un Monomio

In maniera del tutto naturale si possono estendere le nozioni precedenti anche alla divisione tra un polinomio e un monomio e tra due polinomi.

Cominciamo a considerare il caso della **divisione tra un polinomio e un monomio**.

## Divisibilità di un polinomio per un monomio

Assegnato un polinomio  $P$  (detto *dividendo*) ed un monomio  $M$  (detto *divisore*) diciamo che  $P$  è **divisibile** per  $M$  se esiste un polinomio  $Q$ , detto quoziente, che moltiplicato per il monomio  $M$  dia il polinomio  $P$ .

Da un punto di vista di calcolo, la divisione porta a quoziente non nullo solo nel caso in cui ciascun monomio del polinomio dividendo  $P$  risulti divisibile per il monomio dividendo  $M$ .

Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).



Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2 - 2x^2y + x^5y^4) : (-3x^2y).$$

Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2 - 2x^2y + x^5y^4) : (-3x^2y).$$

Applicando la proprietà distributiva troviamo che il quoziente  $Q$  è

Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2 - 2x^2y + x^5y^4) : (-3x^2y).$$

Applicando la proprietà distributiva troviamo che il quoziente  $Q$  è

$$Q =$$

Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2 - 2x^2y + x^5y^4) : (-3x^2y).$$

Applicando la proprietà distributiva troviamo che il quoziente  $Q$  è

$$Q = (3x^3y^2) : (-3x^2y)$$

Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2 - 2x^2y + x^5y^4) : (-3x^2y).$$

Applicando la proprietà distributiva troviamo che il quoziente  $Q$  è

$$Q = (3x^3y^2) : (-3x^2y) +$$

Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2 - 2x^2y + x^5y^4) : (-3x^2y).$$

Applicando la proprietà distributiva troviamo che il quoziente  $Q$  è

$$Q = (3x^3y^2) : (-3x^2y) + (-2x^2y) : (-3x^2y)$$

Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2 - 2x^2y + x^5y^4) : (-3x^2y).$$

Applicando la proprietà distributiva troviamo che il quoziente  $Q$  è

$$Q = (3x^3y^2) : (-3x^2y) + (-2x^2y) : (-3x^2y) +$$



Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2 - 2x^2y + x^5y^4) : (-3x^2y).$$

Applicando la proprietà distributiva troviamo che il quoziente  $Q$  è

$$Q = (3x^3y^2) : (-3x^2y) + (-2x^2y) : (-3x^2y) + (+x^5y^4) : (-3x^2y)$$

Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2 - 2x^2y + x^5y^4) : (-3x^2y).$$

Applicando la proprietà distributiva troviamo che il quoziente  $Q$  è

$$Q = (3x^3y^2) : (-3x^2y) + (-2x^2y) : (-3x^2y) + (+x^5y^4) : (-3x^2y) =$$

Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2 - 2x^2y + x^5y^4) : (-3x^2y).$$

Applicando la proprietà distributiva troviamo che il quoziente  $Q$  è

$$\begin{aligned} Q &= (3x^3y^2) : (-3x^2y) + (-2x^2y) : (-3x^2y) + (+x^5y^4) : (-3x^2y) = \\ &= -1xy \end{aligned}$$

Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2 - 2x^2y + x^5y^4) : (-3x^2y).$$

Applicando la proprietà distributiva troviamo che il quoziente  $Q$  è

$$\begin{aligned} Q &= (3x^3y^2) : (-3x^2y) + (-2x^2y) : (-3x^2y) + (+x^5y^4) : (-3x^2y) = \\ &= -1xy + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Per calcolare il quoziente  $Q$  della divisione si procede, applicando la **proprietà distributiva**, dividendo ciascun monomio di  $P$  per il monomio  $M$  (come si è visto nel capitolo del calcolo coi monomi).

Vediamo un esempio.

Si svolga la divisione:

$$(3x^3y^2 - 2x^2y + x^5y^4) : (-3x^2y).$$

Applicando la proprietà distributiva troviamo che il quoziente  $Q$  è

$$\begin{aligned} Q &= (3x^3y^2) : (-3x^2y) + (-2x^2y) : (-3x^2y) + (+x^5y^4) : (-3x^2y) = \\ &= -1xy + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x^3y^3. \end{aligned}$$

# Divisione di due polinomi

# Divisione di due polinomi

Passiamo ora alla questione centrale della trattazione, vale a dire la divisione tra due polinomi.

# Divisione di due polinomi

Passiamo ora alla questione centrale della trattazione, vale a dire la divisione tra due polinomi.

Consideriamo inizialmente due polinomi  $A$  (dividendo) e  $B$  (divisore) contenenti una sola lettera  $x$ , denotandoli con  $A(x)$  e  $B(x)$ .



# Divisione di due polinomi

Passiamo ora alla questione centrale della trattazione, vale a dire la divisione tra due polinomi.

Consideriamo inizialmente due polinomi  $A$  (dividendo) e  $B$  (divisore) contenenti una sola lettera  $x$ , denotandoli con  $A(x)$  e  $B(x)$ .

È possibile dimostrare, come accadeva nell'ambito dei numeri naturali, il seguente teorema:

# Divisione di due polinomi

Passiamo ora alla questione centrale della trattazione, vale a dire la divisione tra due polinomi.

Consideriamo inizialmente due polinomi  $A$  (dividendo) e  $B$  (divisore) contenenti una sola lettera  $x$ , denotandoli con  $A(x)$  e  $B(x)$ .

È possibile dimostrare, come accadeva nell'ambito dei numeri naturali, il seguente teorema:

## Teorema del Quoziente e del Resto

Se  $A(x)$  e  $B(x)$  sono due polinomi ordinati secondo le potenze decrescenti della  $x$  e se  $B(x)$  non è il polinomio nullo, esistono e sono unici un polinomio  $Q(x)$  ed un polinomio  $R(x)$  che soddisfano

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$\text{grado}[R(x)] < \text{grado}[B(x)]$$

Il polinomio  $Q(x)$  è detto **quoziente** mentre il polinomio  $R(x)$  è detto **resto** della divisione del polinomio  $A(x)$  per il polinomio  $B(x)$ .

Il polinomio  $Q(x)$  è detto **quoziente** mentre il polinomio  $R(x)$  è detto **resto** della divisione del polinomio  $A(x)$  per il polinomio  $B(x)$ .

Se si ha  $R(x) = 0$  si dice che  $A(x)$  è divisibile (esattamente) per  $B(x)$  o che la divisione è **esatta**.

Il polinomio  $Q(x)$  è detto **quoziente** mentre il polinomio  $R(x)$  è detto **resto** della divisione del polinomio  $A(x)$  per il polinomio  $B(x)$ .

Se si ha  $R(x) = 0$  si dice che  $A(x)$  è divisibile (esattamente) per  $B(x)$  o che la divisione è **esatta**.

Pertanto, come accadeva per le divisioni tra numeri, **dividere un polinomio  $A(x)$  per un polinomio  $B(x)$**  significa **trovare due** opportuni **polinomi**,  $Q(x)$  e  $R(x)$ , tali per cui il polinomio dividendo  $A(x)$  sia uguale al prodotto tra i polinomi  $B(x)$  e  $Q(x)$  aumentato del polinomio  $R(x)$ .

Il polinomio  $Q(x)$  è detto **quoziente** mentre il polinomio  $R(x)$  è detto **resto** della divisione del polinomio  $A(x)$  per il polinomio  $B(x)$ .

Se si ha  $R(x) = 0$  si dice che  $A(x)$  è divisibile (esattamente) per  $B(x)$  o che la divisione è **esatta**.

Pertanto, come accadeva per le divisioni tra numeri, **dividere un polinomio  $A(x)$  per un polinomio  $B(x)$**  significa **trovare due** opportuni **polinomi**,  $Q(x)$  e  $R(x)$ , tali per cui il polinomio dividendo  $A(x)$  sia uguale al prodotto tra i polinomi  $B(x)$  e  $Q(x)$  aumentato del polinomio  $R(x)$ .

Si tratta ora di illustrare un **algoritmo di calcolo** (come peraltro accadeva già per le divisioni tra numeri) che, assegnati due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$  con  $\text{grado}A(x) \geq \text{grado}B(x)$ , consenta di calcolarne il quoziente  $Q(x)$  e il resto  $R(x)$  della loro divisione.

Il polinomio  $Q(x)$  è detto **quoziente** mentre il polinomio  $R(x)$  è detto **resto** della divisione del polinomio  $A(x)$  per il polinomio  $B(x)$ .

Se si ha  $R(x) = 0$  si dice che  $A(x)$  è divisibile (esattamente) per  $B(x)$  o che la divisione è **esatta**.

Pertanto, come accadeva per le divisioni tra numeri, **dividere un polinomio  $A(x)$  per un polinomio  $B(x)$**  significa **trovare due** opportuni **polinomi**,  $Q(x)$  e  $R(x)$ , tali per cui il polinomio dividendo  $A(x)$  sia uguale al prodotto tra i polinomi  $B(x)$  e  $Q(x)$  aumentato del polinomio  $R(x)$ .

Si tratta ora di illustrare un **algoritmo di calcolo** (come peraltro accadeva già per le divisioni tra numeri) che, assegnati due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$  con  $\text{grado}A(x) \geq \text{grado}B(x)$ , consenta di calcolarne il quoziente  $Q(x)$  e il resto  $R(x)$  della loro divisione.

Esporrremo questo algoritmo di divisione attraverso un esempio.

# Esempio illustrativo



## Esempio illustrativo

Calcoliamo il quoziente  $Q(x)$  e il resto  $R(x)$  della divisione

$$(3x^4 - 2x^2 + x + 1) : (-x + x^2).$$

## Esempio illustrativo

Calcoliamo il quoziente  $Q(x)$  e il resto  $R(x)$  della divisione

$$(3x^4 - 2x^2 + x + 1) : (-x + x^2).$$

1) Per prima cosa si **ordinano** sia il dividendo che il divisore secondo le **potenze decrescenti** della lettera  $x$ ; inoltre si provvede a **completare il dividendo**. Si scrive quindi

## Esempio illustrativo

Calcoliamo il quoziente  $Q(x)$  e il resto  $R(x)$  della divisione

$$(3x^4 - 2x^2 + x + 1) : (-x + x^2).$$

1) Per prima cosa si **ordinano** sia il dividendo che il divisore secondo le **potenze decrescenti** della lettera  $x$ ; inoltre si provvede a **completare il dividendo**. Si scrive quindi

$$\underbrace{(3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x + 1)}_{\text{ordinato e completato}} : \underbrace{(x^2 - x)}_{\text{ordinato}}.$$

2) Si dispongono dividendo e divisore nella prima riga dello schema che segue:

2) Si dispongono dividendo e divisore nella prima riga dello schema che segue:

$$\begin{array}{r|rr} 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & x^2 & -x \\ \hline \end{array}$$

2) Si dispongono dividendo e divisore nella prima riga dello schema che segue:

$$\begin{array}{r|rr} 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & x^2 & -x \\ \hline \end{array}$$

3) Si **divide** il **primo termine** di  $A(x)$ , cioè  $3x^4$ , per il **primo termine** di  $B(x)$ , cioè  $x^2$ .

2) Si dispongono dividendo e divisore nella prima riga dello schema che segue:

$$\begin{array}{r|rr} 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & x^2 & -x \\ \hline \end{array}$$

3) Si **divide** il **primo termine** di  $A(x)$ , cioè  $3x^4$ , per il **primo termine** di  $B(x)$ , cioè  $x^2$ .

Si ottiene quindi

$$3x^4 : (x^2) = 3x^2.$$

2) Si dispongono dividendo e divisore nella prima riga dello schema che segue:

$$\begin{array}{r|rr} 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & x^2 & -x \\ \hline \end{array}$$

3) Si **divide** il **primo termine** di  $A(x)$ , cioè  $3x^4$ , per il **primo termine** di  $B(x)$ , cioè  $x^2$ .

Si ottiene quindi

$$3x^4 : (x^2) = 3x^2.$$

Questo è il **primo termine del quoziente**  $Q(x)$  e lo si scrive nella posizione indicata in tabella:





$$\begin{array}{r|rr}
 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & x^2 & -x \\
 & & & & & & \hline
 & & & & & & 3x^2 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr}
 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & x^2 & -x \\
 & & & & & & \hline
 & & & & & & 3x^2 & 
 \end{array}$$

4) Si moltiplica questo primo termine  $3x^2$  per ciascun termine del divisore  $B(x)$ :

$$\begin{array}{r|rr}
 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & x^2 & -x \\
 & & & & & & \hline
 & & & & & & 3x^2 & 
 \end{array}$$

4) Si moltiplica questo primo termine  $3x^2$  per ciascun termine del divisore  $B(x)$ :

$$3x^2 \cdot x^2 = 3x^4, \quad 3x^2 \cdot (-x) = -3x^3$$

5) I prodotti ottenuti, **cambiati in segno**, si scrivono sotto  $A(x)$  come mostrato nello schema:

5) I prodotti ottenuti, **cambiati in segno**, si scrivono sotto  $A(x)$  come mostrato nello schema:

$$\begin{array}{rcccccc|cc}
 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & x^2 & -x \\
 -3x^4 & +3x^3 & & & & & 3x^2 & \\
 \hline
 \end{array}$$

5) I prodotti ottenuti, **cambiati in segno**, si scrivono sotto  $A(x)$  come mostrato nello schema:

$$\begin{array}{rcccccc|cc}
 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & x^2 & -x \\
 -3x^4 & +3x^3 & & & & & 3x^2 & \\
 \hline
 \end{array}$$

6) A questo punto si calcola il primo resto parziale  $R_1(x)$  effettuando la somma algebrica tra  $A(x)$  e il polinomio appena scritto al di sotto di  $A(x)$ : tale resto parziale risulta uguale a

5) I prodotti ottenuti, **cambiati in segno**, si scrivono sotto  $A(x)$  come mostrato nello schema:

$$\begin{array}{rcccccc|cc}
 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & x^2 & -x \\
 -3x^4 & +3x^3 & & & & & 3x^2 & \\
 \hline
 \end{array}$$

6) A questo punto si calcola il primo resto parziale  $R_1(x)$  effettuando la somma algebrica tra  $A(x)$  e il polinomio appena scritto al di sotto di  $A(x)$ : tale resto parziale risulta uguale a

$$(3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x + 1) + (-3x^4 + 3x^3) =$$



5) I prodotti ottenuti, **cambiati in segno**, si scrivono sotto  $A(x)$  come mostrato nello schema:

$$\begin{array}{rcccccc|cc} 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & x^2 & -x \\ -3x^4 & +3x^3 & & & & & 3x^2 & \end{array}$$

6) A questo punto si calcola il primo resto parziale  $R_1(x)$  effettuando la somma algebrica tra  $A(x)$  e il polinomio appena scritto al di sotto di  $A(x)$ : tale resto parziale risulta uguale a

$$\begin{aligned} (3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x + 1) + (-3x^4 + 3x^3) = \\ = 3x^3 - 2x^2 + x + 1 =: R_1(x) \end{aligned}$$

|          |         |         |         |      |      |  |        |      |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--|--------|------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |  | $x^2$  | $-x$ |
|          | $-3x^4$ | $+3x^3$ |         |      |      |  | $3x^2$ |      |
| $R_1(x)$ |         | $3x^3$  | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |  |        |      |

$$\begin{array}{r|rr}
 & 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & x^2 & -x \\
 & -3x^4 & +3x^3 & & & & 3x^2 & \\
 R_1(x) & \hline & 3x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & 
 \end{array}$$

7) Ora si ripete la stessa procedura iniziata al punto 3) partendo dal polinomio  $R_1(x)$ . Dividiamo quindi il **primo termine** di  $R_1(x)$ , cioè  $+3x^3$ , per il primo termine di  $B(x)$ , cioè  $x^2$ , trovando

$$(+3x^3) : (x^2) = 3x.$$

|          |         |         |         |      |      |        |      |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--------|------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ | $x^2$  | $-x$ |
|          | $-3x^4$ | $+3x^3$ |         |      |      | $3x^2$ |      |
| $R_1(x)$ | $3x^3$  |         |         |      |      |        |      |
|          |         | $-2x^2$ | $+x$    | $+1$ |      |        |      |

7) Ora si ripete la stessa procedura iniziata al punto 3) partendo dal polinomio  $R_1(x)$ . Dividiamo quindi il **primo termine** di  $R_1(x)$ , cioè  $+3x^3$ , per il primo termine di  $B(x)$ , cioè  $x^2$ , trovando

$$(+3x^3) : (x^2) = 3x.$$

Scriviamo tale risultato (che sarà il **secondo termine del quoziente**) nella riga del quoziente, accanto al primo termine  $3x^2$ .

Otteniamo quindi

Otteniamo quindi

$$\begin{array}{r|rr}
 & 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & x^2 & -x \\
 & -3x^4 & +3x^3 & & & & 3x^2 & +3x \\
 R_1(x) & \hline
 & & 3x^3 & -2x^2 & +x & +1 & \hline
 \end{array}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{array}{r|rr}
 & 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & x^2 & -x \\
 & -3x^4 & +3x^3 & & & & & 3x^2 & +3x \\
 R_1(x) & \hline & 3x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & & 
 \end{array}$$

A questo punto moltiplichiamo il termine  $-3x$  per tutti i termini del divisore  $B(x)$

Otteniamo quindi

$$\begin{array}{r|rr}
 & 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & x^2 & -x \\
 & -3x^4 & +3x^3 & & & & & 3x^2 & +3x \\
 R_1(x) & \hline & 3x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & & 
 \end{array}$$

A questo punto moltiplichiamo il termine  $-3x$  per tutti i termini del divisore  $B(x)$

$$3x \cdot (x^2) = 3x^3, \quad 3x \cdot (-x) = -3x^2,$$



Otteniamo quindi

$$\begin{array}{r|rr}
 & 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & x^2 & -x \\
 & -3x^4 & +3x^3 & & & & & 3x^2 & +3x \\
 R_1(x) & \hline & 3x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & & 
 \end{array}$$

A questo punto moltiplichiamo il termine  $-3x$  per tutti i termini del divisore  $B(x)$

$$3x \cdot (x^2) = 3x^3, \quad 3x \cdot (-x) = -3x^2,$$

e riportiamo, cambiati in segno, tali prodotti al di sotto di  $R_1(x)$ :

|          |         |         |         |      |      |        |       |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--------|-------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$ | $-3x^3$ |         |      |      | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ |         | $+3x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |        |       |

|          |         |         |         |      |      |        |       |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--------|-------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$ | $-3x^3$ |         |      |      | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ | <hr/>   |         |         |      |      |        |       |
|          |         | $+3x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |        |       |

Calcoliamo quindi il resto parziale  $R_2(x)$  e otteniamo

$$(3x^3 - 2x^2 + x + 1) + (-3x^3 + 3x^2) = x^2 + x + 1 =: R_2(x).$$

|          |         |         |         |      |      |        |       |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--------|-------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$ | $-3x^3$ |         |      |      | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ |         | $+3x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |        |       |

Calcoliamo quindi il resto parziale  $R_2(x)$  e otteniamo

$$(3x^3 - 2x^2 + x + 1) + (-3x^3 + 3x^2) = x^2 + x + 1 =: R_2(x).$$

Aggiorniamo la tabella:

|          |         |         |         |      |      |        |       |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--------|-------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$ | $-3x^3$ |         |      |      | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ |         | $3x^3$  | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |        |       |
| $R_2(x)$ |         |         | $x^2$   | $+x$ | $+1$ |        |       |

|          |         |         |         |      |      |        |       |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--------|-------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$ | $-3x^3$ |         |      |      | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ |         | $3x^3$  | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |        |       |
| $R_2(x)$ |         |         | $x^2$   | $+x$ | $+1$ |        |       |

8) E così via. Si procede sempre allo stesso modo. **L'algoritmo termina quando si trova un resto parziale che abbia grado minore di quello del divisore** (il che vuol dire che non è più possibile effettuare la divisione). Quest'ultimo resto parziale sarà il **resto** della divisione di partenza.

|          |         |         |         |      |      |  |        |       |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--|--------|-------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |  | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$ | $-3x^3$ |         |      |      |  | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ |         | $3x^3$  | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |  |        |       |
|          |         | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |  |        |       |
| $R_2(x)$ |         |         | $x^2$   | $+x$ | $+1$ |  |        |       |

8) E così via. Si procede sempre allo stesso modo. **L'algoritmo termina quando si trova un resto parziale che abbia grado minore di quello del divisore** (il che vuol dire che non è più possibile effettuare la divisione). Quest'ultimo resto parziale sarà il **resto** della divisione di partenza.

Nel nostro caso la procedura non è ancora arrestata in quanto il polinomio  $R_2(x)$ ,  $x^2 + x + 1$ , ha lo stesso grado del divisore  $B(x)$ .

Pertanto procediamo, dividendo il **primo termine** di  $R_2(x)$  per il **primo** di  $B(x)$ .



Pertanto procediamo, dividendo il **primo termine** di  $R_2(x)$  per il **primo** di  $B(x)$ . Si trova,

$$x^2 : (x^2) = +1.$$

Pertanto procediamo, dividendo il **primo termine** di  $R_2(x)$  per il **primo** di  $B(x)$ . Si trova,

$$x^2 : (x^2) = +1.$$

Procedendo come prima troviamo

Pertanto procediamo, dividendo il **primo termine** di  $R_2(x)$  per il **primo** di  $B(x)$ . Si trova,

$$x^2 : (x^2) = +1.$$

Procedendo come prima troviamo

|          |         |         |         |      |      |  |        |       |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--|--------|-------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |  | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$ | $-3x^3$ |         |      |      |  | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ |         | $3x^3$  | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |  |        | $+1$  |
|          |         | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |  |        |       |
| $R_2(x)$ |         |         | $x^2$   | $+x$ | $+1$ |  |        |       |

Pertanto procediamo, dividendo il **primo termine** di  $R_2(x)$  per il **primo** di  $B(x)$ . Si trova,

$$x^2 : (x^2) = +1.$$

Procedendo come prima troviamo

|          |                          |         |         |      |      |        |       |
|----------|--------------------------|---------|---------|------|------|--------|-------|
|          | $3x^4$                   | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$                  | $-3x^3$ |         |      |      | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ | $3x^3$ $-2x^2$ $+x$ $+1$ |         |         |      |      |        |       |
|          |                          | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |        |       |
| $R_2(x)$ | $x^2$ $+x$ $+1$          |         |         |      |      |        |       |

da cui, moltiplicando opportunamente come da regola, e incolonnando con  $R_2(x)$  troviamo

|          |         |         |         |      |      |        |       |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--------|-------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$ | $-3x^3$ |         |      |      | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ |         | $3x^3$  | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |        |       |
| $R_2(x)$ |         |         | $x^2$   | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         |         | $-x^2$  | $+x$ | $+1$ |        |       |
| $R_3(x)$ |         |         |         | $2x$ | $+1$ |        |       |

|          |         |         |         |      |      |        |       |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--------|-------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$ | $-3x^3$ |         |      |      | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ |         | $3x^3$  | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |        |       |
| $R_2(x)$ |         |         | $x^2$   | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         |         | $-x^2$  | $+x$ | $+1$ |        |       |
| $R_3(x)$ |         |         |         | $2x$ | $+1$ |        |       |

Poiché il resto parziale ottenuto,  $R_3(x) = 2x + 1$ , ha grado 1 (inferiore a quello di  $B(x)$ ), la divisione si arresta e tale resto diviene il resto della divisione originaria.

|          |         |         |         |      |      |        |       |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--------|-------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$ | $-3x^3$ |         |      |      | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ |         | $3x^3$  | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |        |       |
| $R_2(x)$ |         |         | $x^2$   | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         |         | $-x^2$  | $+x$ | $+1$ |        |       |
| $R_3(x)$ |         |         |         | $2x$ | $+1$ |        |       |

Poiché il resto parziale ottenuto,  $R_3(x) = 2x + 1$ , ha grado 1 (inferiore a quello di  $B(x)$ ), la divisione si arresta e tale resto diviene il resto della divisione originaria.

Concludiamo che

|          |         |         |         |      |      |        |       |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--------|-------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$ | $-3x^3$ |         |      |      | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ |         | $3x^3$  | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |        |       |
| $R_2(x)$ |         |         | $x^2$   | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         |         | $-x^2$  | $+x$ | $+1$ |        |       |
| $R_3(x)$ |         |         |         | $2x$ | $+1$ |        |       |

Poiché il resto parziale ottenuto,  $R_3(x) = 2x + 1$ , ha grado 1 (inferiore a quello di  $B(x)$ ), la divisione si arresta e tale resto diviene il resto della divisione originaria.

Concludiamo che

$$Q(x) = 3x^2 + 3x + 1,$$



|          |         |         |         |      |      |        |       |
|----------|---------|---------|---------|------|------|--------|-------|
|          | $3x^4$  | $+0x^3$ | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ | $x^2$  | $-x$  |
|          | $-3x^4$ | $-3x^3$ |         |      |      | $3x^2$ | $+3x$ |
| $R_1(x)$ |         | $3x^3$  | $-2x^2$ | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         | $-3x^3$ | $+3x^2$ |      |      |        |       |
| $R_2(x)$ |         |         | $x^2$   | $+x$ | $+1$ |        |       |
|          |         |         | $-x^2$  | $+x$ | $+1$ |        |       |
| $R_3(x)$ |         |         |         | $2x$ | $+1$ |        |       |

Poiché il resto parziale ottenuto,  $R_3(x) = 2x + 1$ , ha grado 1 (inferiore a quello di  $B(x)$ ), la divisione si arresta e tale resto diviene il resto della divisione originaria.

Concludiamo che

$$Q(x) = 3x^2 + 3x + 1, \quad R(x) = 2x + 1$$

Pertanto, in forza del Teorema del Quoziente e del Resto prima enunciato, possiamo affermare che

$$\underbrace{3x^4 - 2x^2 + x + 1}_{A(x)} = \underbrace{(x^2 - x)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(3x^2 + 3x + 1)}_{Q(x)} + \underbrace{(2x + 1)}_{R(x)}.$$

Pertanto, in forza del Teorema del Quoziente e del Resto prima enunciato, possiamo affermare che

$$\underbrace{3x^4 - 2x^2 + x + 1}_{A(x)} = \underbrace{(x^2 - x)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(3x^2 + 3x + 1)}_{Q(x)} + \underbrace{(2x + 1)}_{R(x)}.$$

Effettivamente, se si controlla col calcolo, si trova che la precedente uguaglianza (comunque garantita dal Teorema) risulta verificata.

# Caso a coefficienti letterali

## Caso a coefficienti letterali

Consideriamo in questa sezione divisioni in una certa variabile e i cui coefficienti siano costituiti anche da lettere.

# Caso a coefficienti letterali

Consideriamo in questa sezione divisioni in una certa variabile e i cui coefficienti siano costituiti anche da lettere.

La procedura è la medesima di quella relativa al caso con coefficienti numerici.

# Caso a coefficienti letterali

Consideriamo in questa sezione divisioni in una certa variabile e i cui coefficienti siano costituiti anche da lettere.

La procedura è la medesima di quella relativa al caso con coefficienti numerici.

Vediamo un esempio.

## Caso a coefficienti letterali

Consideriamo in questa sezione divisioni in una certa variabile e i cui coefficienti siano costituiti anche da lettere.

La procedura è la medesima di quella relativa al caso con coefficienti numerici.

Vediamo un esempio.

Si esegua la divisione

$$(9x^3 + 3x^2y - 11xy^2) : (3x^2 + 2xy - 3y^2).$$



## Caso a coefficienti letterali

Consideriamo in questa sezione divisioni in una certa variabile e i cui coefficienti siano costituiti anche da lettere.

La procedura è la medesima di quella relativa al caso con coefficienti numerici.

Vediamo un esempio.

Si esegua la divisione

$$(9x^3 + 3x^2y - 11xy^2) : (3x^2 + 2xy - 3y^2).$$

Constatiamo immediatamente che compaiono **due lettere**.

Il **quoziente** e il **resto** della divisione **cambiano** a seconda di quale sia la lettera che si vuole considerare come variabile della divisione.

## Caso a coefficienti letterali

Consideriamo in questa sezione divisioni in una certa variabile e i cui coefficienti siano costituiti anche da lettere.

La procedura è la medesima di quella relativa al caso con coefficienti numerici.

Vediamo un esempio.

Si esegua la divisione

$$(9x^3 + 3x^2y - 11xy^2) : (3x^2 + 2xy - 3y^2).$$

Constatiamo immediatamente che compaiono **due lettere**.

Il **quoziente** e il **resto** della divisione **cambiano** a seconda di quale sia la lettera che si vuole considerare come variabile della divisione. Risolveremo pertanto la divisione dapprima considerando la  $x$  come variabile e la  $y$  come costante, successivamente considerando la  $y$  come variabile e la  $x$  come costante.

# Risoluzione rispetto alla variabile $x$

## Risoluzione rispetto alla variabile $x$

Cominciamo col riscrivere la divisione **ordinando** e **completando rispetto alla variabile**  $x$  ed evidenziando in colore blu i coefficienti (numeri e lettere) e in colore rosso la variabile ( $x$ ):

# Risoluzione rispetto alla variabile $x$

Cominciamo col riscrivere la divisione **ordinando** e **completando rispetto alla variabile**  $x$  ed evidenziando in colore blu i coefficienti (numeri e lettere) e in colore rosso la variabile ( $x$ ):

$$(9x^3 + 3yx^2 - 11y^2x + 0) : (3x^2 + 2yx - 3y^2) .$$

## Risoluzione rispetto alla variabile $x$

Cominciamo col riscrivere la divisione **ordinando** e **completando rispetto alla variabile**  $x$  ed evidenziando in colore blu i coefficienti (numeri e lettere) e in colore rosso la variabile ( $x$ ):

$$(9x^3 + 3yx^2 - 11y^2x + 0) : (3x^2 + 2yx - 3y^2) .$$

A questo punto, procediamo seguendo la regola già illustrata.

## Risoluzione rispetto alla variabile $x$

Cominciamo col riscrivere la divisione **ordinando** e **completando rispetto alla variabile**  $x$  ed evidenziando in colore blu i coefficienti (numeri e lettere) e in colore rosso la variabile ( $x$ ):

$$(9x^3 + 3yx^2 - 11y^2x + 0) : (3x^2 + 2yx - 3y^2) .$$

A questo punto, procediamo seguendo la regola già illustrata.

1) Disponiamo in tabella dividendo e divisore:

## Risoluzione rispetto alla variabile $x$

Cominciamo col riscrivere la divisione **ordinando** e **completando rispetto alla variabile**  $x$  ed evidenziando in colore blu i coefficienti (numeri e lettere) e in colore rosso la variabile ( $x$ ):

$$(9x^3 + 3yx^2 - 11y^2x + 0) : (3x^2 + 2yx - 3y^2) .$$

A questo punto, procediamo seguendo la regola già illustrata.

1) Disponiamo in tabella dividendo e divisore:

|        |          |           |      |  |        |        |         |
|--------|----------|-----------|------|--|--------|--------|---------|
| $9x^3$ | $+3yx^2$ | $-11y^2x$ | $+0$ |  | $3x^2$ | $+2yx$ | $-3y^2$ |
|        |          |           |      |  |        |        |         |
|        |          |           |      |  |        |        |         |
|        |          |           |      |  |        |        |         |
|        |          |           |      |  |        |        |         |
|        |          |           |      |  |        |        |         |
|        |          |           |      |  |        |        |         |
|        |          |           |      |  |        |        |         |
|        |          |           |      |  |        |        |         |
|        |          |           |      |  |        |        |         |
|        |          |           |      |  |        |        |         |



2) Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore:

$$(9x^3) : (3x^2) = 3x,$$

2) Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore:

$$(9x^3) : (3x^2) = 3x,$$

e riportiamo tale risultato (primo termine del quoziente) nella riga sotto al divisore:

2) Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore:

$$(9x^3) : (3x^2) = 3x,$$

e riportiamo tale risultato (primo termine del quoziente) nella riga sotto al divisore:

|        |          |           |      |  |        |        |         |
|--------|----------|-----------|------|--|--------|--------|---------|
| $9x^3$ | $+3yx^2$ | $-11y^2x$ | $+0$ |  | $3x^2$ | $+2yx$ | $-3y^2$ |
|        |          |           |      |  | $3x$   |        |         |

2) Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore:

$$(9x^3) : (3x^2) = 3x,$$

e riportiamo tale risultato (primo termine del quoziente) nella riga sotto al divisore:

|        |          |           |      |  |        |        |         |
|--------|----------|-----------|------|--|--------|--------|---------|
| $9x^3$ | $+3yx^2$ | $-11y^2x$ | $+0$ |  | $3x^2$ | $+2yx$ | $-3y^2$ |
|        |          |           |      |  | $3x$   |        |         |

3) Moltiplichiamo il termine  $3x$  per ogni termine del divisore:

2) Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore:

$$(9x^3) : (3x^2) = 3x,$$

e riportiamo tale risultato (primo termine del quoziente) nella riga sotto al divisore:

|        |          |           |      |  |        |        |         |
|--------|----------|-----------|------|--|--------|--------|---------|
| $9x^3$ | $+3yx^2$ | $-11y^2x$ | $+0$ |  | $3x^2$ | $+2yx$ | $-3y^2$ |
|        |          |           |      |  | $3x$   |        |         |

3) Moltiplichiamo il termine  $3x$  per ogni termine del divisore:

$$3x \cdot (3x^2) = 9x^3, \quad 3x \cdot (2yx) = 6yx^2 \quad 3x \cdot (-3y^2) = -9y^2x,$$

e riportiamo i quozienti ottenuti, cambiati in segno, sotto al dividendo.  
Sommiamo e generiamo il primo resto parziale.

e riportiamo i quozienti ottenuti, cambiati in segno, sotto al dividendo. Sommiamo e generiamo il primo resto parziale.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 9x^3 & +3yx^2 & -11y^2x & +0 \\
 & -9x^3 & -6yx^2 & +9y^2x & \\
 R_1(x) & \hline
 & & -3yx^2 & -2y^2x & +0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rrr}
 & 3x^2 & +2yx & -3y^2 \\
 & \hline
 & 3x & & 
 \end{array}$$

e riportiamo i quozienti ottenuti, cambiati in segno, sotto al dividendo. Sommiamo e generiamo il primo resto parziale.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 9x^3 & +3yx^2 & -11y^2x & +0 \\
 & -9x^3 & -6yx^2 & +9y^2x & \\
 R_1(x) & \hline
 & & -3yx^2 & -2y^2x & +0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rrr}
 & 3x^2 & +2yx & -3y^2 \\
 & \hline
 & 3x & & 
 \end{array}$$

4) Dividiamo il primo termine di  $R_1(x)$ , cioè  $-3yx^2$ , per il primo termine del divisore, vale a dire  $3x^2$ , ricordandoci che la lettera  $y$  è una costante: troviamo

$$(-3yx^2) : (3x^2) = -y.$$



Scriviamo tale risultato accanto al primo termine  $3x$  del quoziente:

|          |         |          |           |      |  |        |        |         |
|----------|---------|----------|-----------|------|--|--------|--------|---------|
|          | $9x^3$  | $+3yx^2$ | $-11y^2x$ | $+0$ |  | $3x^2$ | $+2yx$ | $-3y^2$ |
|          | $-9x^3$ | $-6yx^2$ | $+3y^2x$  |      |  | $3x$   | $-y$   |         |
| $R_1(x)$ |         | $-3yx^2$ | $-2y^2x$  | $+0$ |  |        |        |         |

Scriviamo tale risultato accanto al primo termine  $3x$  del quoziente:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 9x^3 & +3yx^2 & -11y^2x & +0 & & 3x^2 & +2yx & -3y^2 \\
 & -9x^3 & -6yx^2 & +3y^2x & & & \color{red}{3x} & \color{red}{-y} & \\
 R_1(x) & \hline & & -3yx^2 & -2y^2x & +0 & & & 
 \end{array}$$

5) Procedendo come sempre, aggiorniamo lo schema:

Scriviamo tale risultato accanto al primo termine  $3x$  del quoziente:

|          |         |          |           |      |        |        |         |
|----------|---------|----------|-----------|------|--------|--------|---------|
|          | $9x^3$  | $+3yx^2$ | $-11y^2x$ | $+0$ | $3x^2$ | $+2yx$ | $-3y^2$ |
|          | $-9x^3$ | $-6yx^2$ | $+3y^2x$  |      | $3x$   | $-y$   |         |
| $R_1(x)$ |         | $-3yx^2$ | $-2y^2x$  | $+0$ |        |        |         |

5) Procedendo come sempre, aggiorniamo lo schema:

|          |         |          |           |         |        |        |         |
|----------|---------|----------|-----------|---------|--------|--------|---------|
|          | $9x^3$  | $+3yx^2$ | $-11y^2x$ | $+0$    | $3x^2$ | $+2yx$ | $-3y^2$ |
|          | $-9x^3$ | $-6yx^2$ | $+3y^2x$  |         | $3x$   | $-y$   |         |
| $R_1(x)$ |         | $-3yx^2$ | $-2y^2x$  | $+0$    |        |        |         |
|          |         | $3yx^2$  | $+2y^2x$  | $-3y^3$ |        |        |         |
| $R_2(x)$ |         |          |           | $-3y^3$ |        |        |         |

6) Poiché il primo (e unico) termine del resto  $R_2(x)$ , vale a dire  $-3y^3 = -3y^3x^0$  non è divisibile per  $3x^2$ , concludiamo che

$$Q(x) = 3x - y,$$

$$R(x) = -3y^3.$$

# Risoluzione rispetto alla variabile $y$

## Risoluzione rispetto alla variabile $y$

Diverso è il risultato se si decide di considerare come **variabile** della divisione la lettera  $y$ .

## Risoluzione rispetto alla variabile $y$

Diverso è il risultato se si decide di considerare come **variabile** della divisione la lettera  $y$ .

A tale scopo, riordiniamo opportunamente il polinomio, considerando la lettera  $x$  come una costante.

## Risoluzione rispetto alla variabile $y$

Diverso è il risultato se si decide di considerare come **variabile** della divisione la lettera  $y$ .

A tale scopo, riordiniamo opportunamente il polinomio, considerando la lettera  $x$  come una costante. Risulta, evidenziando come prima,

$$(-11xy^2 + 3x^2y + 9x^3) : (-3y^2 + 2xy + 3x^2).$$



# Risoluzione rispetto alla variabile $y$

Diverso è il risultato se si decide di considerare come **variabile** della divisione la lettera  $y$ .

A tale scopo, riordiniamo opportunamente il polinomio, considerando la lettera  $x$  come una costante. Risulta, evidenziando come prima,

$$(-11xy^2 + 3x^2y + 9x^3) : (-3y^2 + 2xy + 3x^2).$$

Predisponiamo lo schema:

$$\begin{array}{r|rrr} -11xy^2 & +3x^2y & +9x^3 & \\ \hline & & & \end{array}$$

A questo punto si rimette in atto il solito algoritmo (non dimenticandosi che la  $y$  è la variabile, mentre la  $x$  è una costante).

A questo punto si rimette in atto il solito algoritmo (non dimenticandosi che la  $y$  è la variabile, mentre la  $x$  è una costante). Si trova facilmente

$$\begin{array}{r|rrr}
 -11xy^2 & +3x^2y & +9x^3 & -3y^2 & +2yx & +3x^2 \\
 11y^2x & -\frac{22}{3}x^2y & -11x^3 & \frac{11}{3}x & & \\
 \hline
 R_1(y) & -\frac{13}{3}x^2y & -2x^3 & & & 
 \end{array}$$

A questo punto si rimette in atto il solito algoritmo (non dimenticandosi che la  $y$  è la variabile, mentre la  $x$  è una costante). Si trova facilmente

$$\begin{array}{r|rrr}
 & -11xy^2 & +3x^2y & +9x^3 \\
 R_1(y) & 11y^2x & -\frac{22}{3}x^2y & -11x^3 \\
 \hline
 & & -\frac{13}{3}x^2y & -2x^3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rrr}
 & -3y^2 & +2yx & +3x^2 \\
 \hline
 & \frac{11}{3}x & & 
 \end{array}$$

Poiché il primo termine di  $R_1(y)$ , vale a dire  $-\frac{11}{3}x^2y$  non è divisibile per il primo termine del divisore, cioè  $-3y^2$ , concludiamo che

$$Q(y) = \frac{11}{3}x, \quad R(y) = -\frac{13}{3}x^2y - 2x^3.$$

# MCD tra polinomi

# MCD tra polinomi

Come accade coi numeri interi, è possibile definire il concetto di **Massimo Comune Divisore** anche tra polinomi.

# MCD tra polinomi

Come accade coi numeri interi, è possibile definire il concetto di **Massimo Comune Divisore** anche tra polinomi.

Per semplicità, consideriamo il caso in cui i polinomi assegnati contengano una sola lettera, supponiamo la  $x$ .

# MCD tra polinomi

Come accade coi numeri interi, è possibile definire il concetto di **Massimo Comune Divisore** anche tra polinomi.

Per semplicità, consideriamo il caso in cui i polinomi assegnati contengano una sola lettera, supponiamo la  $x$ .

Prima di dare la definizione di Massimo Comune Divisore tra polinomi, è necessario premettere un'ulteriore definizione:



# MCD tra polinomi

Come accade coi numeri interi, è possibile definire il concetto di **Massimo Comune Divisore** anche tra polinomi.

Per semplicità, consideriamo il caso in cui i polinomi assegnati contengano una sola lettera, supponiamo la  $x$ .

Prima di dare la definizione di Massimo Comune Divisore tra polinomi, è necessario premettere un'ulteriore definizione:

## Definizione

Assegnati due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$ , diciamo che il polinomio  $B(x)$  **divide** il polinomio  $A(x)$  e scriviamo

$$B(x) \mid A(x),$$

se esiste un polinomio  $C(x)$  tale che

$$A(x) = B(x) \cdot C(x).$$



Intuitivamente,  $B(x)$  divide  $A(x)$  se il polinomio  $A(x)$  è ottenibile come prodotto del polinomio  $B(x)$  per un certo polinomio.

Intuitivamente,  $B(x)$  divide  $A(x)$  se il polinomio  $A(x)$  è ottenibile come prodotto del polinomio  $B(x)$  per un certo polinomio.

Ad esempio, il polinomio  $B(x) = x - 1$  divide  $A(x) = x^2 + 2x - 3$ :

Intuitivamente,  $B(x)$  divide  $A(x)$  se il polinomio  $A(x)$  è ottenibile come prodotto del polinomio  $B(x)$  per un certo polinomio.

Ad esempio, il polinomio  $B(x) = x - 1$  divide  $A(x) = x^2 + 2x - 3$ : infatti

$$\underbrace{x^2 + 2x - 3}_{A(x)} = \underbrace{(x - 1)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(x + 3)}_{C(x)}$$

Nel caso di numeri interi, si dice che  $b$  divide  $a$  quando  $a$  è un multiplo di  $b$  (o, equivalentemente,  $b$  è un sottomultiplo di  $a$ ).

Effettivamente, per semplicità, si può estendere tale notazione anche al caso dei polinomi.

Possiamo affermare che il polinomio  $B(x)$  divide il polinomio  $A(x)$  se  $A(x)$  è un multiplo (attraverso una costante o un effettivo polinomio) di  $B(x)$ .

Intuitivamente,  $B(x)$  divide  $A(x)$  se il polinomio  $A(x)$  è ottenibile come prodotto del polinomio  $B(x)$  per un certo polinomio.

Ad esempio, il polinomio  $B(x) = x - 1$  divide  $A(x) = x^2 + 2x - 3$ : infatti

$$\underbrace{x^2 + 2x - 3}_{A(x)} = \underbrace{(x - 1)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(x + 3)}_{C(x)}$$

Nel caso di numeri interi, si dice che  $b$  divide  $a$  quando  $a$  è un multiplo di  $b$  (o, equivalentemente,  $b$  è un sottomultiplo di  $a$ ).

Effettivamente, per semplicità, si può estendere tale notazione anche al caso dei polinomi.

Possiamo affermare che il polinomio  $B(x)$  divide il polinomio  $A(x)$  se  $A(x)$  è un multiplo (attraverso una costante o un effettivo polinomio) di  $B(x)$ .

Osserviamo che se  $B(x)$  divide  $A(x)$ , si ha necessariamente

$$\text{grado}[A(x)] \geq \text{grado}[B(x)]$$

A questo punto possiamo dare la definizione di Massimo Comun Divisore.

A questo punto possiamo dare la definizione di Massimo Comun Divisore.

### MCD tra polinomi

Dati due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$  chiamiamo Massimo Comune Divisore tra  $A(x)$  e  $B(x)$ , e lo denotiamo con

$$MCD(A(x), B(x)),$$

un polinomio  $D(x)$  tale che:

- $D(x) \mid A(x)$ ,  $D(x) \mid B(x)$
- Se esiste un polinomio  $C(x)$  tale che  $C(x) \mid A(x)$  e  $C(x) \mid B(x)$ , allora  $C(x) \mid D(x)$



A questo punto possiamo dare la definizione di Massimo Comun Divisore.

### MCD tra polinomi

Dati due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$  chiamiamo Massimo Comune Divisore tra  $A(x)$  e  $B(x)$ , e lo denotiamo con

$$MCD(A(x), B(x)),$$

un polinomio  $D(x)$  tale che:

- $D(x) \mid A(x)$ ,  $D(x) \mid B(x)$
- Se esiste un polinomio  $C(x)$  tale che  $C(x) \mid A(x)$  e  $C(x) \mid B(x)$ , allora  $C(x) \mid D(x)$

In altre parole, il  $MCD$  tra due polinomi è, come accadeva coi numeri, un polinomio che sia contemporaneamente sottomultiplo di entrambi i polinomi di partenza e che abbia grado più alto possibile.

È possibile dimostrare che, assegnati due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$ , il loro  $MCD$  è unico.

È possibile dimostrare che, assegnati due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$ , il loro  $MCD$  è unico.

Si tratta ora di stabilire in quale maniera si possa determinare tale polinomio.

È possibile dimostrare che, assegnati due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$ , il loro  $MCD$  è unico.

Si tratta ora di stabilire in quale maniera si possa determinare tale polinomio.

La determinazione del  $MCD$  tra due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$  assegnati avviene tramite una procedura che trova ampia giustificazione a livello teorico.

Noi ci limitiamo a illustrare tale procedura e a vederla applicata a un esempio concreto.

È possibile dimostrare che, assegnati due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$ , il loro  $MCD$  è unico.

Si tratta ora di stabilire in quale maniera si possa determinare tale polinomio.

La determinazione del  $MCD$  tra due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$  assegnati avviene tramite una procedura che trova ampia giustificazione a livello teorico.

Noi ci limitiamo a illustrare tale procedura e a vederla applicata a un esempio concreto.

L'algoritmo per l'individuazione del  $MCD$  tra due polinomi prende il nome di **Metodo delle Divisioni Successive**.

# Metodo delle Divisioni Successive

# Metodo delle Divisioni Successive

Consideriamo due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$ , con  $\text{grado}[A(x)] \geq \text{grado}[B(x)]$ .

1) Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi  $Q_0(x)$  e  $R_1(x)$  tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q_0(x) + R_1(x).$$

# Metodo delle Divisioni Successive

Consideriamo due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$ , con  $\text{grado}[A(x)] \geq \text{grado}[B(x)]$ .

1) Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi  $Q_0(x)$  e  $R_1(x)$  tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q_0(x) + R_1(x).$$

Possono verificarsi due casi:



# Metodo delle Divisioni Successive

Consideriamo due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$ , con  $\text{grado}[A(x)] \geq \text{grado}[B(x)]$ .

1) Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi  $Q_0(x)$  e  $R_1(x)$  tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q_0(x) + R_1(x).$$

Possono verificarsi due casi:

- Se  $R_1(x) = 0$ , allora  $\text{MCD}(A(x), B(x)) = B(x)$  e l'algoritmo termina.

# Metodo delle Divisioni Successive

Consideriamo due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$ , con  $\text{grado}[A(x)] \geq \text{grado}[B(x)]$ .

1) Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi  $Q_0(x)$  e  $R_1(x)$  tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q_0(x) + R_1(x).$$

Possono verificarsi due casi:

- Se  $R_1(x) = 0$ , allora  $\text{MCD}(A(x), B(x)) = B(x)$  e l'algoritmo termina.
- Se, invece,  $R_1(x) \neq 0$ , allora  $0 < \text{grado}[R_1(x)] < \text{grado}[B(x)]$  e l'algoritmo prosegue al passo 2).

2) Dobbiamo effettuare la divisione tra  $B(x)$  e  $R_1(x)$ .

2) Dobbiamo effettuare la divisione tra  $B(x)$  e  $R_1(x)$ .

Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi  $Q_1(x)$  e  $R_2(x)$  tali che

$$B(x) = Q_1(x)R_1(x) + R_2(x).$$

2) Dobbiamo effettuare la divisione tra  $B(x)$  e  $R_1(x)$ .

Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi  $Q_1(x)$  e  $R_2(x)$  tali che

$$B(x) = Q_1(x)R_1(x) + R_2(x).$$

- Se  $R_2(x) = 0$ , allora  $MCD(A(x), B(x)) = R_1(x)$  e l'algoritmo termina.
- Se, invece,  $R_2(x) \neq 0$ , allora  $0 < \text{grado}[R_2(x)] < \text{grado}[R_1(x)]$  e l'algoritmo prosegue al passo 3).

3) Eseguiamo quindi la divisione tra  $R_1(x)$  e  $R_2(x)$ .

3) Eseguiamo quindi la divisione tra  $R_1(x)$  e  $R_2(x)$ .

Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi  $Q_2(x)$  e  $R_3(x)$  tali che

$$R_1(x) = Q_2(x)R_2(x) + R_3(x).$$

3) Eseguiamo quindi la divisione tra  $R_1(x)$  e  $R_2(x)$ .

Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi  $Q_2(x)$  e  $R_3(x)$  tali che

$$R_1(x) = Q_2(x)R_2(x) + R_3(x).$$

- Se  $R_3(x) = 0$ , allora  $MCD(A(x), B(x)) = R_2(x)$  e l'algoritmo termina.
- Se, invece,  $R_3(x) \neq 0$ , allora  $0 < \text{grado}[R_3(x)] < \text{grado}[R_2(x)]$  e l'algoritmo prosegue al passo 4).



3) Eseguiamo quindi la divisione tra  $R_1(x)$  e  $R_2(x)$ .

Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi  $Q_2(x)$  e  $R_3(x)$  tali che

$$R_1(x) = Q_2(x)R_2(x) + R_3(x).$$

- Se  $R_3(x) = 0$ , allora  $MCD(A(x), B(x)) = R_2(x)$  e l'algoritmo termina.
- Se, invece,  $R_3(x) \neq 0$ , allora  $0 < \text{grado}[R_3(x)] < \text{grado}[R_2(x)]$  e l'algoritmo prosegue al passo 4).

In pratica, l'algoritmo termina non appena si individui, nella sequenza di divisioni appena definite, il **primo resto diverso dal polinomio nullo**.

3) Eseguiamo quindi la divisione tra  $R_1(x)$  e  $R_2(x)$ .

Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi  $Q_2(x)$  e  $R_3(x)$  tali che

$$R_1(x) = Q_2(x)R_2(x) + R_3(x).$$

- Se  $R_3(x) = 0$ , allora  $MCD(A(x), B(x)) = R_2(x)$  e l'algoritmo termina.
- Se, invece,  $R_3(x) \neq 0$ , allora  $0 < \text{grado}[R_3(x)] < \text{grado}[R_2(x)]$  e l'algoritmo prosegue al passo 4).

In pratica, l'algoritmo termina non appena si individui, nella sequenza di divisioni appena definite, il **primo resto diverso dal polinomio nullo**.

Osserviamo che, effettivamente, l'**algoritmo** appena illustrato **ha sempre termine**.

3) Eseguiamo quindi la divisione tra  $R_1(x)$  e  $R_2(x)$ .

Per il Teorema del Quoziente e del Resto esistono due polinomi  $Q_2(x)$  e  $R_3(x)$  tali che

$$R_1(x) = Q_2(x)R_2(x) + R_3(x).$$

- Se  $R_3(x) = 0$ , allora  $MCD(A(x), B(x)) = R_2(x)$  e l'algoritmo termina.
- Se, invece,  $R_3(x) \neq 0$ , allora  $0 < \text{grado}[R_3(x)] < \text{grado}[R_2(x)]$  e l'algoritmo prosegue al passo 4).

In pratica, l'algoritmo termina non appena si individui, nella sequenza di divisioni appena definite, il **primo resto diverso dal polinomio nullo**.

Osserviamo che, effettivamente, l'**algoritmo** appena illustrato **ha sempre termine**.

Mostriamo ora un esempio di calcolo di  $MCD$  tra due polinomi.

# Esempio di Calcolo di $MCD$

## Esempio di Calcolo di $MCD$

Si determini

$$MCD\left(A(x) = x^3 + 1, B(x) = x^2 + 1\right).$$

## Esempio di Calcolo di $MCD$

Si determini

$$MCD\left(A(x) = x^3 + 1, B(x) = x^2 + 1\right).$$

1) Cominciamo a eseguire, attraverso l'algoritmo standard, la divisione tra  $A(x)$  e  $B(x)$ :

# Esempio di Calcolo di $MCD$

Si determini

$$MCD(A(x) = x^3 + 1, B(x) = x^2 + 1).$$

1) Cominciamo a eseguire, attraverso l'algoritmo standard, la divisione tra  $A(x)$  e  $B(x)$ :

$$\begin{array}{r|rr} x^3 & +1 & & x^2 & +1 \\ \hline R_1(x) & -x & +1 & x & Q_0(x) \end{array}$$

# Esempio di Calcolo di $MCD$

Si determini

$$MCD(A(x) = x^3 + 1, B(x) = x^2 + 1).$$

1) Cominciamo a eseguire, attraverso l'algoritmo standard, la divisione tra  $A(x)$  e  $B(x)$ :

$$\begin{array}{r|rr} x^3 & +1 & & x^2 & +1 \\ \hline R_1(x) & -x & +1 & x & Q_0(x) \end{array}$$

Quindi

$$\underbrace{x^3 + 1}_{A(x)} = \underbrace{(x^2 + 1)}_{B(x)} \cdot \underbrace{x}_{Q_0(x)} + \underbrace{(-x + 1)}_{R_1(x)}$$



Poiché

$$R_1(x) = -x + 1 \neq 0,$$

l'algoritmo procede considerando la divisione tra i polinomi  $B(x)$  e  $R_1(x)$ .

Poiché

$$R_1(x) = -x + 1 \neq 0,$$

l'algoritmo procede considerando la divisione tra i polinomi  $B(x)$  e  $R_1(x)$ .

2) Si ha

$$\begin{array}{r|rr} x^2 & +1 & & -x & +1 \\ \hline & & & x & Q_1(x) \\ R_2(x) & \hline & 2 & & \end{array}$$

cioè

$$\underbrace{x^2 + 1}_{B(x)} = \underbrace{(-x + 1)}_{R_1(x)} \cdot \underbrace{-x - 1}_{Q_1(x)} + \underbrace{(2)}_{R_2(x)}.$$

Poiché

$$R_1(x) = -x + 1 \neq 0,$$

l'algoritmo procede considerando la divisione tra i polinomi  $B(x)$  e  $R_1(x)$ .

2) Si ha

$$\begin{array}{r|rr} x^2 & +1 & & -x & +1 \\ & & & \underline{x} & \\ R_2(x) & \underline{\hspace{1.5cm}} & 2 & & Q_1(x) \end{array}$$

cioè

$$\underbrace{x^2 + 1}_{B(x)} = \underbrace{(-x + 1)}_{R_1(x)} \cdot \underbrace{-x - 1}_{Q_1(x)} + \underbrace{(2)}_{R_2(x)}.$$

Poiché

$$R_2(x) = 2 \neq 0,$$

l'algoritmo prosegue al passo 3) con la divisione tra  $R_1(x)$  e  $R_2(x)$ .

3) Si ha

$$\begin{array}{r|rr} & -x & +1 \\ R_3(x) & \hline & 0 \\ \hline & -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2} & Q_2(x) \\ & \hline \end{array}$$

3) Si ha

$$\begin{array}{r|rr} & -x & +1 & \\ R_3(x) & \hline & & 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|rr} & & 2 & \\ & -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2} & Q_2(x) \end{array}$$

Poiché

$$R_3(x) = 0,$$

ne segue, per quanto illustrato nella parte teorica, che il Massimo Comun Divisore cercato è l'ultimo resto non nullo individuato,

3) Si ha

$$\begin{array}{r|rr} & -x & +1 \\ R_3(x) & \hline & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rr} & 2 \\ & \hline -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2} \end{array} \quad Q_2(x)$$

Poiché

$$R_3(x) = 0,$$

ne segue, per quanto illustrato nella parte teorica, che il Massimo Comun Divisore cercato è l'ultimo resto non nullo individuato, cioè

$$MCD(A(x), B(x)) = R_2(x) = 2.$$