

Divisione tra polinomi

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

- 1 Il problema
- 2 Come calcolare quoziente e resto
- 3 Approfondimento: perché funziona

Il problema

Abbiamo già visto in una scorsa lezione le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione tra polinomi.

Il problema

Abbiamo già visto in una scorsa lezione le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione tra polinomi.

Prendiamo adesso un polinomio in x estremamente semplice:

Il problema

Abbiamo già visto in una scorsa lezione le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione tra polinomi.

Prendiamo adesso un polinomio in x estremamente semplice:

$$A[x] = 3.$$

Il problema

Abbiamo già visto in una scorsa lezione le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione tra polinomi.

Prendiamo adesso un polinomio in x estremamente semplice:

$$A[x] = 3.$$

Abbiamo scritto $[x]$ per pensare che stiamo lavorando con una variabile, che indichiamo con x , ma di fatto essa non compare nel polinomio.

Il problema

Abbiamo già visto in una scorsa lezione le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione tra polinomi.

Prendiamo adesso un polinomio in x estremamente semplice:

$$A[x] = 3.$$

Abbiamo scritto $[x]$ per pensare che stiamo lavorando con una variabile, che indichiamo con x , ma di fatto essa non compare nel polinomio.

Adesso prendiamo un altro polinomio, molto semplice:

Il problema

Abbiamo già visto in una scorsa lezione le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione tra polinomi.

Prendiamo adesso un polinomio in x estremamente semplice:

$$A[x] = 3.$$

Abbiamo scritto $[x]$ per pensare che stiamo lavorando con una variabile, che indichiamo con x , ma di fatto essa non compare nel polinomio.

Adesso prendiamo un altro polinomio, molto semplice:

$$B[x] = x.$$

Il problema

Abbiamo già visto in una scorsa lezione le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione tra polinomi.

Prendiamo adesso un polinomio in x estremamente semplice:

$$A[x] = 3.$$

Abbiamo scritto $[x]$ per pensare che stiamo lavorando con una variabile, che indichiamo con x , ma di fatto essa non compare nel polinomio.

Adesso prendiamo un altro polinomio, molto semplice:

$$B[x] = x.$$

Ci chiediamo: *possiamo dare senso alla **divisione** di A per B ?*

Il problema

Abbiamo già visto in una scorsa lezione le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione tra polinomi.

Prendiamo adesso un polinomio in x estremamente semplice:

$$A[x] = 3.$$

Abbiamo scritto $[x]$ per pensare che stiamo lavorando con una variabile, che indichiamo con x , ma di fatto essa non compare nel polinomio.

Adesso prendiamo un altro polinomio, molto semplice:

$$B[x] = x.$$

Ci chiediamo: *possiamo dare senso alla **divisione** di A per B ?*

Qualunque essa sia, la divisione che cerchiamo deve rispettare le regole numeriche. In questo senso richiamiamo la

Qualunque essa sia, la divisione che cerchiamo deve rispettare le regole numeriche. In questo senso richiamiamo la

Proprietà fondamentale

Tutte le proprietà dell'Algebra devono essere dedotte *esclusivamente* dalle proprietà di base delle operazioni.

Qualunque essa sia, la divisione che cerchiamo deve rispettare le regole numeriche. In questo senso richiamiamo la

Proprietà fondamentale

Tutte le proprietà dell'Algebra devono essere dedotte *esclusivamente* dalle proprietà di base delle operazioni. In questo modo le proprietà dedotte saranno valide *per ogni* valore assunto dalle variabili.

Qualunque essa sia, la divisione che cerchiamo deve rispettare le regole numeriche. In questo senso richiamiamo la

Proprietà fondamentale

Tutte le proprietà dell'Algebra devono essere dedotte *esclusivamente* dalle proprietà di base delle operazioni. In questo modo le proprietà dedotte saranno valide *per ogni* valore assunto dalle variabili.

Pertanto, quello che stiamo cercando, il *quoziente*, deve essere tale che, come per i numeri, quando è moltiplicato per B dà A ...

Qualunque essa sia, la divisione che cerchiamo deve rispettare le regole numeriche. In questo senso richiamiamo la

Proprietà fondamentale

Tutte le proprietà dell'Algebra devono essere dedotte *esclusivamente* dalle proprietà di base delle operazioni. In questo modo le proprietà dedotte saranno valide *per ogni* valore assunto dalle variabili.

Pertanto, quello che stiamo cercando, il *quoziente*, deve essere tale che, come per i numeri, quando è moltiplicato per B dà A ...ossia cerchiamo un polinomio $Q[x]$ tale che

Qualunque essa sia, la divisione che cerchiamo deve rispettare le regole numeriche. In questo senso richiamiamo la

Proprietà fondamentale

Tutte le proprietà dell'Algebra devono essere dedotte *esclusivamente* dalle proprietà di base delle operazioni. In questo modo le proprietà dedotte saranno valide *per ogni* valore assunto dalle variabili.

Pertanto, quello che stiamo cercando, il *quoziente*, deve essere tale che, come per i numeri, quando è moltiplicato per B dà A ...ossia cerchiamo un polinomio $Q[x]$ tale che

$$Q[x] \cdot B[x] = A[x]$$

Vale a dire

$$Q[x] \cdot x = 3.$$

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1,

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1, e quindi non sarà *mai* uguale a 3, che ha grado *zero* (non contenendo x)!

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1, e quindi non sarà *mai* uguale a 3, che ha grado *zero* (non contenendo x)!

In un certo senso, è come se cercassimo di dividere 2 per 5 nell'insieme dei numeri interi:

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1, e quindi non sarà *mai* uguale a 3, che ha grado *zero* (non contenendo x)!

In un certo senso, è come se cercassimo di dividere 2 per 5 nell'insieme dei numeri interi: cerchiamo un numero che moltiplicato per 5 dia 2.

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1, e quindi non sarà *mai* uguale a 3, che ha grado *zero* (non contenendo x)!

In un certo senso, è come se cercassimo di dividere 2 per 5 nell'insieme dei numeri interi: cerchiamo un numero che moltiplicato per 5 dia 2. Chiaramente, 0 non va bene, e 1 è troppo grande.

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1, e quindi non sarà *mai* uguale a 3, che ha grado *zero* (non contenendo x)!

In un certo senso, è come se cercassimo di dividere 2 per 5 nell'insieme dei numeri interi: cerchiamo un numero che moltiplicato per 5 dia 2.

Chiaramente, 0 non va bene, e 1 è troppo grande.

L'idea per dar senso alla divisione ci viene allora proprio dai numeri interi:

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1, e quindi non sarà *mai* uguale a 3, che ha grado *zero* (non contenendo x)!

In un certo senso, è come se cercassimo di dividere 2 per 5 nell'insieme dei numeri interi: cerchiamo un numero che moltiplicato per 5 dia 2.

Chiaramente, 0 non va bene, e 1 è troppo grande.

L'idea per dar senso alla divisione ci viene allora proprio dai numeri interi: introdurre l'idea di "quoziente e resto".

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1, e quindi non sarà *mai* uguale a 3, che ha grado *zero* (non contenendo x)!

In un certo senso, è come se cercassimo di dividere 2 per 5 nell'insieme dei numeri interi: cerchiamo un numero che moltiplicato per 5 dia 2.

Chiaramente, 0 non va bene, e 1 è troppo grande.

L'idea per dar senso alla divisione ci viene allora proprio dai numeri interi: introdurre l'idea di “quoziente e resto”.

In altre parole, così come “2 diviso 5 dà zero col resto di 2”, potremmo dire che

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1, e quindi non sarà *mai* uguale a 3, che ha grado *zero* (non contenendo x)!

In un certo senso, è come se cercassimo di dividere 2 per 5 nell'insieme dei numeri interi: cerchiamo un numero che moltiplicato per 5 dia 2.

Chiaramente, 0 non va bene, e 1 è troppo grande.

L'idea per dar senso alla divisione ci viene allora proprio dai numeri interi: introdurre l'idea di “quoziente e resto”.

In altre parole, così come “2 diviso 5 dà zero col resto di 2”, potremmo dire che

3 diviso x dà zero col resto di x .

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1, e quindi non sarà *mai* uguale a 3, che ha grado *zero* (non contenendo x)!

In un certo senso, è come se cercassimo di dividere 2 per 5 nell'insieme dei numeri interi: cerchiamo un numero che moltiplicato per 5 dia 2.

Chiaramente, 0 non va bene, e 1 è troppo grande.

L'idea per dar senso alla divisione ci viene allora proprio dai numeri interi: introdurre l'idea di “quoziente e resto”.

In altre parole, così come “2 diviso 5 dà zero col resto di 2”, potremmo dire che

3 diviso x dà zero col resto di x .

Vediamo in simboli.

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1, e quindi non sarà *mai* uguale a 3, che ha grado *zero* (non contenendo x)!

In un certo senso, è come se cercassimo di dividere 2 per 5 nell'insieme dei numeri interi: cerchiamo un numero che moltiplicato per 5 dia 2.

Chiaramente, 0 non va bene, e 1 è troppo grande.

L'idea per dar senso alla divisione ci viene allora proprio dai numeri interi: introdurre l'idea di “quoziente e resto”.

In altre parole, così come “2 diviso 5 dà zero col resto di 2”, potremmo dire che

3 diviso x dà zero col resto di x .

Vediamo in simboli. Dati due numeri interi positivi a e b , cosa significa che q è il quoziente e r è il resto?

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1, e quindi non sarà *mai* uguale a 3, che ha grado *zero* (non contenendo x)!

In un certo senso, è come se cercassimo di dividere 2 per 5 nell'insieme dei numeri interi: cerchiamo un numero che moltiplicato per 5 dia 2.

Chiaramente, 0 non va bene, e 1 è troppo grande.

L'idea per dar senso alla divisione ci viene allora proprio dai numeri interi: introdurre l'idea di “quoziente e resto”.

In altre parole, così come “2 diviso 5 dà zero col resto di 2”, potremmo dire che

3 diviso x dà zero col resto di x .

Vediamo in simboli. Dati due numeri interi positivi a e b , cosa significa che q è il quoziente e r è il resto? Significa che

$$a = b \cdot q + r$$

Ci accorgiamo subito, però, di un problema: siccome abbiamo imparato che il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla *somma* dei gradi, il grado di $Q[x] \cdot x$ deve essere *almeno* 1, e quindi non sarà *mai* uguale a 3, che ha grado *zero* (non contenendo x)!

In un certo senso, è come se cercassimo di dividere 2 per 5 nell'insieme dei numeri interi: cerchiamo un numero che moltiplicato per 5 dia 2.

Chiaramente, 0 non va bene, e 1 è troppo grande.

L'idea per dar senso alla divisione ci viene allora proprio dai numeri interi: introdurre l'idea di “quoziente e resto”.

In altre parole, così come “2 diviso 5 dà zero col resto di 2”, potremmo dire che

3 diviso x dà zero col resto di x .

Vediamo in simboli. Dati due numeri interi positivi a e b , cosa significa che q è il quoziente e r è il resto? Significa che

$$a = b \cdot q + r \quad \text{con } r < b.$$

Per esempio, se $a = 26$ e $b = 7$, il quoziente è 3 e il resto è 5:

Per esempio, se $a = 26$ e $b = 7$, il quoziente è 3 e il resto è 5: infatti
 $7 \cdot 3 + 5 = 26$.

Per esempio, se $a = 26$ e $b = 7$, il quoziente è 3 e il resto è 5: infatti $7 \cdot 3 + 5 = 26$.

Tentiamo di fare allora la stessa cosa per due polinomi $A[x]$ e $B[x]$.

Per esempio, se $a = 26$ e $b = 7$, il quoziente è 3 e il resto è 5: infatti $7 \cdot 3 + 5 = 26$.

Tentiamo di fare allora la stessa cosa per due polinomi $A[x]$ e $B[x]$.

Diremo che due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ sono rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di A per B se

Per esempio, se $a = 26$ e $b = 7$, il quoziente è 3 e il resto è 5: infatti $7 \cdot 3 + 5 = 26$.

Tentiamo di fare allora la stessa cosa per due polinomi $A[x]$ e $B[x]$.

Diremo che due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ sono rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di A per B se

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

Per esempio, se $a = 26$ e $b = 7$, il quoziente è 3 e il resto è 5: infatti $7 \cdot 3 + 5 = 26$.

Tentiamo di fare allora la stessa cosa per due polinomi $A[x]$ e $B[x]$.

Diremo che due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ sono rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di A per B se

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

oppure, più brevemente,

Per esempio, se $a = 26$ e $b = 7$, il quoziente è 3 e il resto è 5: infatti $7 \cdot 3 + 5 = 26$.

Tentiamo di fare allora la stessa cosa per due polinomi $A[x]$ e $B[x]$.

Diremo che due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ sono rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di A per B se

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

oppure, più brevemente,

$$A = B \cdot Q + R.$$

Per esempio, se $a = 26$ e $b = 7$, il quoziente è 3 e il resto è 5: infatti $7 \cdot 3 + 5 = 26$.

Tentiamo di fare allora la stessa cosa per due polinomi $A[x]$ e $B[x]$.

Diremo che due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ sono rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di A per B se

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

oppure, più brevemente,

$$A = B \cdot Q + R.$$

Questa idea non è in disaccordo con la proprietà fondamentale, perché quando i polinomi sono dei numeri, si ritrova la stessa idea del quoziente e resto.

Per esempio, se $a = 26$ e $b = 7$, il quoziente è 3 e il resto è 5: infatti $7 \cdot 3 + 5 = 26$.

Tentiamo di fare allora la stessa cosa per due polinomi $A[x]$ e $B[x]$.

Diremo che due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ sono rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di A per B se

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

oppure, più brevemente,

$$A = B \cdot Q + R.$$

Questa idea non è in disaccordo con la proprietà fondamentale, perché quando i polinomi sono dei numeri, si ritrova la stessa idea del quoziente e resto.

A questo punto, se $A[x] = 3$, $B[x] = x$, $Q[x] = 0$ e $R[x] = 3$, abbiamo

Per esempio, se $a = 26$ e $b = 7$, il quoziente è 3 e il resto è 5: infatti $7 \cdot 3 + 5 = 26$.

Tentiamo di fare allora la stessa cosa per due polinomi $A[x]$ e $B[x]$.

Diremo che due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ sono rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di A per B se

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

oppure, più brevemente,

$$A = B \cdot Q + R.$$

Questa idea non è in disaccordo con la proprietà fondamentale, perché quando i polinomi sono dei numeri, si ritrova la stessa idea del quoziente e resto.

A questo punto, se $A[x] = 3$, $B[x] = x$, $Q[x] = 0$ e $R[x] = 3$, abbiamo

$$3 = x \cdot 0 + 3$$

e il conto torna.

C'è però un piccolo problema, che illustriamo con un esempio.

C'è però un piccolo problema, che illustriamo con un esempio.
Chiaramente, x^3 diviso x^2 deve dare x , perché questa è una proprietà delle potenze.

C'è però un piccolo problema, che illustriamo con un esempio.
Chiaramente, x^3 diviso x^2 deve dare x , perché questa è una proprietà delle potenze. Quindi siamo portati a dire che il quoziente è x e il resto è zero (ed è giusto). Però

C'è però un piccolo problema, che illustriamo con un esempio.
Chiaramente, x^3 diviso x^2 deve dare x , perché questa è una proprietà delle potenze. Quindi siamo portati a dire che il quoziente è x e il resto è zero (ed è giusto). Però

$$x^3 = x^2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3$$

C'è però un piccolo problema, che illustriamo con un esempio.
Chiaramente, x^3 diviso x^2 deve dare x , perché questa è una proprietà delle potenze. Quindi siamo portati a dire che il quoziente è x e il resto è zero (ed è giusto). Però

$$x^3 = x^2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3$$

è un'identità (verificatela!) che possiamo interpretare così:

C'è però un piccolo problema, che illustriamo con un esempio.
Chiaramente, x^3 diviso x^2 deve dare x , perché questa è una proprietà delle potenze. Quindi siamo portati a dire che il quoziente è x e il resto è zero (ed è giusto). Però

$$x^3 = x^2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3$$

è un'identità (verificatela!) che possiamo interpretare così:

$$\underbrace{x^3}_{A[x]} = \underbrace{x^2}_{B[x]} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x}_{Q[x]} + \underbrace{\frac{1}{2}x^3}_{R[x]}$$

C'è però un piccolo problema, che illustriamo con un esempio.
Chiaramente, x^3 diviso x^2 deve dare x , perché questa è una proprietà delle potenze. Quindi siamo portati a dire che il quoziente è x e il resto è zero (ed è giusto). Però

$$x^3 = x^2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3$$

è un'identità (verificatela!) che possiamo interpretare così:

$$\underbrace{x^3}_{A[x]} = \underbrace{x^2}_{B[x]} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x}_{Q[x]} + \underbrace{\frac{1}{2}x^3}_{R[x]}$$

A questo punto non è chiaro se il quoziente e resto siano x e 0 , oppure $(1/2)x$ e $(1/2)x^3$!

C'è però un piccolo problema, che illustriamo con un esempio.
Chiaramente, x^3 diviso x^2 deve dare x , perché questa è una proprietà delle potenze. Quindi siamo portati a dire che il quoziente è x e il resto è zero (ed è giusto). Però

$$x^3 = x^2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3$$

è un'identità (verificatela!) che possiamo interpretare così:

$$\underbrace{x^3}_{A[x]} = \underbrace{x^2}_{B[x]} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x}_{Q[x]} + \underbrace{\frac{1}{2}x^3}_{R[x]}$$

A questo punto non è chiaro se il quoziente e resto siano x e 0 , oppure $(1/2)x$ e $(1/2)x^3$! Entrambi i casi sono possibili!

C'è però un piccolo problema, che illustriamo con un esempio.
Chiaramente, x^3 diviso x^2 deve dare x , perché questa è una proprietà delle potenze. Quindi siamo portati a dire che il quoziente è x e il resto è zero (ed è giusto). Però

$$x^3 = x^2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3$$

è un'identità (verificatela!) che possiamo interpretare così:

$$\underbrace{x^3}_{A[x]} = \underbrace{x^2}_{B[x]} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x}_{Q[x]} + \underbrace{\frac{1}{2}x^3}_{R[x]}$$

A questo punto non è chiaro se il quoziente e resto siano x e 0 , oppure $(1/2)x$ e $(1/2)x^3$! Entrambi i casi sono possibili! Come possiamo fare?

L'idea è questa:

L'idea è questa: richiedere che il grado del resto sia *strettamente minore* del grado del divisore.

L'idea è questa: richiedere che il grado del resto sia *strettamente minore* del grado del divisore. (Questa proprietà corrisponde a dire " $r < b$ " nella divisione fra interi).

L'idea è questa: richiedere che il grado del resto sia *strettamente minore* del grado del divisore. (Questa proprietà corrisponde a dire " $r < b$ " nella divisione fra interi). In questo modo l'interpretazione

$$\underbrace{x^3}_{A[x]} = \underbrace{x^2}_{B[x]} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x}_{Q[x]} + \underbrace{\frac{1}{2}x^3}_{R[x]}$$

L'idea è questa: richiedere che il grado del resto sia *strettamente minore* del grado del divisore. (Questa proprietà corrisponde a dire " $r < b$ " nella divisione fra interi). In questo modo l'interpretazione

$$\underbrace{x^3}_{A[x]} = \underbrace{x^2}_{B[x]} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x}_{Q[x]} + \underbrace{\frac{1}{2}x^3}_{R[x]}$$

non è più valida, perché $(1/2)x^3$ ha grado 3, mentre $B[x]$, che è x^2 , ha grado 2.

L'idea è questa: richiedere che il grado del resto sia *strettamente minore* del grado del divisore. (Questa proprietà corrisponde a dire " $r < b$ " nella divisione fra interi). In questo modo l'interpretazione

$$\underbrace{x^3}_{A[x]} = \underbrace{x^2}_{B[x]} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x}_{Q[x]} + \underbrace{\frac{1}{2}x^3}_{R[x]}$$

non è più valida, perché $(1/2)x^3$ ha grado 3, mentre $B[x]$, che è x^2 , ha grado 2.

Pertanto abbiamo la

Definizione di quoziente e resto

Dati due polinomi $A[x]$ e $B[x]$ in una incognita, due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ si diranno rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di $A[x]$ per $B[x]$ se

Definizione di quoziente e resto

Dati due polinomi $A[x]$ e $B[x]$ in una incognita, due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ si diranno rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di $A[x]$ per $B[x]$ se

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x]$$

Definizione di quoziente e resto

Dati due polinomi $A[x]$ e $B[x]$ in una incognita, due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ si diranno rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di $A[x]$ per $B[x]$ se

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x] \quad \text{e} \quad \text{grado}(R) < \text{grado}(B).$$

Definizione di quoziente e resto

Dati due polinomi $A[x]$ e $B[x]$ in una incognita, due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ si diranno rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di $A[x]$ per $B[x]$ se

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x] \quad \text{e} \quad \text{grado}(R) < \text{grado}(B).$$

Nota di approfondimento: se i polinomi hanno grado zero, ossia sono delle costanti, tutto dipende dal tipo di numeri usati.

Definizione di quoziente e resto

Dati due polinomi $A[x]$ e $B[x]$ in una incognita, due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ si diranno rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di $A[x]$ per $B[x]$ se

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x] \quad \text{e} \quad \text{grado}(R) < \text{grado}(B).$$

Nota di approfondimento: se i polinomi hanno grado zero, ossia sono delle costanti, tutto dipende dal tipo di numeri usati. Nei numeri *razionali*, il resto, quando esiste, è sempre zero (perché la divisione è sempre possibile in $\mathbb{Q}$ a meno che B non sia nullo); nei numeri *interi* la situazione è più interessante e la condizione su R è sostituita da $|R| < B$.

Definizione di quoziente e resto

Dati due polinomi $A[x]$ e $B[x]$ in una incognita, due polinomi $Q[x]$ e $R[x]$ si diranno rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di $A[x]$ per $B[x]$ se

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x] \quad \text{e} \quad \text{grado}(R) < \text{grado}(B).$$

Nota di approfondimento: se i polinomi hanno grado zero, ossia sono delle costanti, tutto dipende dal tipo di numeri usati. Nei numeri *razionali*, il resto, quando esiste, è sempre zero (perché la divisione è sempre possibile in $\mathbb{Q}$ a meno che B non sia nullo); nei numeri *interi* la situazione è più interessante e la condizione su R è sostituita da $|R| < B$. La divisione fra interi, infatti, assomiglia molto a quella fra polinomi.

Il teorema fondamentale di questa lezione è il seguente:

Il teorema fondamentale di questa lezione è il seguente:

Teorema

Se $B[x]$ non è il polinomio nullo, il quoziente e il resto della divisione di $A[x]$ per $B[x]$ *esistono* e sono *unici*.

Val la pena di osservare che questo risultato *non* è banale, perché il prodotto di polinomi è ben più complicato del prodotto fra numeri.

Vediamo dapprima come fare per calcolare quoziente e resto.

Vediamo dapprima come fare per calcolare quoziente e resto. Poi, come approfondimento, vedremo perché funziona.

Vediamo dapprima come fare per calcolare quoziente e resto. Poi, come approfondimento, vedremo perché funziona.

Per mostrare come fare utilizzeremo un esempio. Prenderemo per $A[x]$ il polinomio

Vediamo dapprima come fare per calcolare quoziente e resto. Poi, come approfondimento, vedremo perché funziona.

Per mostrare come fare utilizzeremo un esempio. Prenderemo per $A[x]$ il polinomio

$$A[x] = 4x^4 + \frac{3}{128}x + 1$$

Vediamo dapprima come fare per calcolare quoziente e resto. Poi, come approfondimento, vedremo perché funziona.

Per mostrare come fare utilizzeremo un esempio. Prenderemo per $A[x]$ il polinomio

$$A[x] = 4x^4 + \frac{3}{128}x + 1$$

e per $B[x]$ il polinomio

Vediamo dapprima come fare per calcolare quoziente e resto. Poi, come approfondimento, vedremo perché funziona.

Per mostrare come fare utilizzeremo un esempio. Prenderemo per $A[x]$ il polinomio

$$A[x] = 4x^4 + \frac{3}{128}x + 1$$

e per $B[x]$ il polinomio

$$B[x] = 4x^2 - \frac{5}{2}x$$

Vediamo dapprima come fare per calcolare quoziente e resto. Poi, come approfondimento, vedremo perché funziona.

Per mostrare come fare utilizzeremo un esempio. Prenderemo per $A[x]$ il polinomio

$$A[x] = 4x^4 + \frac{3}{128}x + 1$$

e per $B[x]$ il polinomio

$$B[x] = 4x^2 - \frac{5}{2}x$$

che sono abbastanza generici per permetterci di capire come funziona in tutti gli altri casi.

Vediamo dapprima come fare per calcolare quoziente e resto. Poi, come approfondimento, vedremo perché funziona.

Per mostrare come fare utilizzeremo un esempio. Prenderemo per $A[x]$ il polinomio

$$A[x] = 4x^4 + \frac{3}{128}x + 1$$

e per $B[x]$ il polinomio

$$B[x] = 4x^2 - \frac{5}{2}x$$

che sono abbastanza generici per permetterci di capire come funziona in tutti gli altri casi.

Per prima cosa supponiamo di avere ordinato i polinomi con i gradi *decrescenti* dei loro monomi, come abbiamo già fatto,

Vediamo dapprima come fare per calcolare quoziente e resto. Poi, come approfondimento, vedremo perché funziona.

Per mostrare come fare utilizzeremo un esempio. Prenderemo per $A[x]$ il polinomio

$$A[x] = 4x^4 + \frac{3}{128}x + 1$$

e per $B[x]$ il polinomio

$$B[x] = 4x^2 - \frac{5}{2}x$$

che sono abbastanza generici per permetterci di capire come funziona in tutti gli altri casi.

Per prima cosa supponiamo di avere ordinato i polinomi con i gradi *decrescenti* dei loro monomi, come abbiamo già fatto, e di aver controllato che il grado di A non sia più piccolo di quello di B .

Vediamo dapprima come fare per calcolare quoziente e resto. Poi, come approfondimento, vedremo perché funziona.

Per mostrare come fare utilizzeremo un esempio. Prenderemo per $A[x]$ il polinomio

$$A[x] = 4x^4 + \frac{3}{128}x + 1$$

e per $B[x]$ il polinomio

$$B[x] = 4x^2 - \frac{5}{2}x$$

che sono abbastanza generici per permetterci di capire come funziona in tutti gli altri casi.

Per prima cosa supponiamo di avere ordinato i polinomi con i gradi *decrescenti* dei loro monomi, come abbiamo già fatto, e di aver controllato che il grado di A non sia più piccolo di quello di B . (Se così fosse, avremmo finito: Q sarebbe zero e A sarebbe il resto).

$$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$$

$$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$$

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$		
		$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$

Conviene allora scrivere i polinomi di partenza in una griglia, come nella figura sopra.

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	
	$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$

Conviene allora scrivere i polinomi di partenza in una griglia, come nella figura sopra.

L'importante, come vedete, è piazzare le “caselle vuote” o i coefficienti zero, corrispondenti ai gradi mancanti dei polinomi, per poterli ordinare bene.

Fissiamo la nostra attenzione sui primi monomi dei due polinomi...

Fissiamo la nostra attenzione sui primi monomi dei due polinomi...

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 & \\ \hline & 4x^2 - \frac{5}{2}x + 0 \end{array}$$

...dividiamo il primo monomio di A per il primo monomio di B e riportiamo il risultato a destra.

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 & \\ \hline & 4x^2 - \frac{5}{2}x + 0 \end{array}$$

...dividiamo il primo monomio di A per il primo monomio di B e riportiamo il risultato a destra.

The diagram illustrates the first step of polynomial long division. A horizontal line represents the division bar. Above the line, the dividend is written as $4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$. The first term, $4x^4$, is enclosed in a red box. To the right of the dividend, the divisor x^2 is written in blue. A curved arrow labeled "diviso" (divided) points from the $4x^4$ box to a new box on the right side of the division bar. This box contains the result $4x^2$ in red, followed by $-\frac{5}{2}x + 0$. A vertical line is drawn below the division bar, and a horizontal line is drawn to the right of the $4x^2$ box, forming a new area for the next steps of the division.

Adesso moltiplichiamo il monomio trovato (x) per tutti i monomi del divisore ($B[x]$) cambiando segno...

Adesso moltiplichiamo il monomio trovato (x) per tutti i monomi del divisore ($B[x]$) cambiando segno...

The diagram illustrates a step in polynomial long division. A horizontal line separates the dividend from the quotient. On the left side of the line, the dividend is written as $4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$. On the right side, the quotient term x^2 is shown in a box. To its right, another box contains the instruction "moltiplicare cambiando segno...". Three arrows point from the x^2 box to the terms of the product below the line: $4x^2$, $-\frac{5}{2}x$, and $+0$.

$$\begin{array}{r} 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \\ \hline \end{array}$$

x^2 moltiplicare cambiando segno...

$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$

... e riportiamo il risultato sotto il polinomio di sinistra, sotto i corrispondenti esponenti.

The diagram illustrates the first step of polynomial long division. A horizontal line separates the dividend from the quotient. On the left side of the line, the dividend is written as $4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$. On the right side, above the line, the divisor x^2 is enclosed in a box. To the right of this box is another box containing the text "moltiplicare cambiando segno...". Three arrows originate from the bottom of the x^2 box: one points down to the $4x^2$ term of the partial quotient, another points down to the $-\frac{5}{2}x$ term, and a third points down to the $+0$ term. The partial quotient $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ is written below the horizontal line, aligned with the terms it represents.

$$\begin{array}{r} 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \\ \hline x^2 \quad \text{moltiplicare cambiando segno...} \\ \underline{4x^2 - \frac{5}{2}x + 0} \end{array}$$

... e riportiamo il risultato sotto il polinomio di sinistra, sotto i corrispondenti esponenti.

The diagram illustrates a step in polynomial long division. A horizontal line separates the dividend from the current remainder. On the left side of the line, the dividend is written as $4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$. On the right side, a box contains the divisor x^2 . A text box to the right of the divisor says "moltiplicare cambiando segno...". Three arrows point from the x^2 box to the terms of the remainder below the line: $4x^2$, $-\frac{5}{2}x$, and $+0$. The remainder is written as $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$. An arrow points from the remainder back to the dividend side, with the text "e riportare al posto giusto" below it.

$$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$$

$$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$$

e riportare al posto giusto

... e riportiamo il risultato sotto il polinomio di sinistra, sotto i corrispondenti esponenti.

The diagram illustrates a step in polynomial long division. A horizontal line separates the dividend from the partial quotient. Above the line, the dividend is written as $4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$. Below the line, the current partial quotient is $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$. A box containing x^2 is positioned above the partial quotient, with arrows pointing to its terms. A bracket below the partial quotient is labeled "e riportare al posto giusto", with an arrow pointing to the dividend's terms. The subtraction result is shown as $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ below the dividend.

$$\begin{array}{r} 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \\ - (4x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 0x^2) \\ \hline \end{array}$$

e riportare al posto giusto

Sommiamo i due polinomi trovati e osserviamo che i primi monomi si elidono sempre:

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	x^2
$-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$	$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
// $\frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	

Adesso ripetiamo la procedura con il polinomio appena trovato, di grado tre...

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	x^2
$-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$	$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
$// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	

Adesso ripetiamo la procedura con il polinomio appena trovato, di grado tre...

$$\begin{array}{r|l}
 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 & x^2 + \frac{5}{8}x \\
 \hline
 -4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 & 4x^2 - \frac{5}{2}x + 0 \\
 \hline
 // \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 &
 \end{array}$$

The diagram illustrates the division of a polynomial by a linear divisor. The main division shows the polynomial $4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ divided by $x^2 + \frac{5}{8}x$, resulting in $-4x^2 + \frac{5}{2}x + 0$. A secondary division shows the polynomial $\frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ divided by $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$. Arrows indicate the relationship between the terms: an arrow from the $\frac{5}{2}x^3$ term in the second polynomial to the $\frac{5}{8}x$ term in the first polynomial, and an arrow from the $4x^2$ term in the second polynomial to the $4x^4$ term in the first polynomial.

Dividiamo il primo monomio per il primo monomio di $B[x]$...

$$\begin{array}{r|l}
 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 & x^2 + \frac{5}{8}x \\
 \hline
 -4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 & 4x^2 - \frac{5}{2}x + 0 \\
 \hline
 // \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 &
 \end{array}$$

diviso

... e rimoltiplichiamo il risultato trovato $(5/8x)$ per i monomi di $B[x]$, cambiando segno...

... e rimoltiplichiamo il risultato trovato $(5/8x)$ per i monomi di $B[x]$, cambiando segno...

$ \begin{array}{r} 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \\ \hline -4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 \\ \hline // \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \end{array} $	$x^2 + \boxed{\frac{5}{8}x}$ $\swarrow \quad \searrow \quad \downarrow$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ moltiplicare cambiando segno...
--	---

... e riportando i risultati sotto i corrispondenti monomi a sinistra.

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	$x^2 + \frac{5}{8}x$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ moltiplicare cambiando segno...
---	--

... e riportando i risultati sotto i corrispondenti monomi a sinistra.

$2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-2x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ 	$x^2 + \frac{5}{8}x$ $\frac{5}{8}$ ↙ ↘ ↓ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ e riportare al posto giusto
--	---

... e riportando i risultati sotto i corrispondenti monomi a sinistra.

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$	$x^2 + \frac{5}{8}x$ $\frac{5}{8}$ $\swarrow$ $\searrow$ $\downarrow$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ e riportare al posto giusto

Adesso sommiamo i polinomi ottenuti...

$ \begin{array}{r} 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \\ \hline -4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 \\ \hline // \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \\ \hline -\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x \\ \hline \end{array} $	$x^2 + \boxed{\frac{5}{8}x}$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ e riportare al posto giusto
---	--

Adesso sommiamo i polinomi ottenuti...

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$ $// \quad \frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	$x^2 + \boxed{\frac{5}{8}}x$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
--	---

Osservando che i primi monomi si elidono.

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	$x^2 + \boxed{\frac{5}{8}x}$
$-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$	$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
// $\frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	
$-\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$	
// $\frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	

Osservando che i primi monomi si elidono.

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	$x^2 + \boxed{\frac{5}{8}}x$
$-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$	$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
// $\frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	
$-\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$	
// $\frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	

Ora ricominciamo:

Ora ricominciamo: dividiamo il primo monomio dell'ultimo polinomio per il primo di $B[x]$...

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$ $// \quad \frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	$x^2 + \frac{5}{8}x$ $\swarrow$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
--	---

Ora ricominciamo:

Ora ricominciamo: dividiamo il primo monomio dell'ultimo polinomio per il primo di $B[x]$...

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$ $// \quad \frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	$x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
--	--

... e rimoltiplichiamo cambiando segno come prima...

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$ $// \quad \frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	$x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
--	--

... e rimoltiplichiamo cambiando segno come prima...

$ \begin{array}{r} 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \\ \hline -4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 \\ \hline // \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \\ \hline -\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x \\ \hline // \quad \frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \end{array} $	$\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{8}x + \boxed{\frac{25}{64}}$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ multiplicare cambiando i segni...
---	--

... riportando il risultato sotto.

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$ $// \quad \frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-\frac{25}{16}x^2 + \frac{125}{128}x$	$x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
---	--

Diagram illustrating the long division process. The dividend is $4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$. The divisor is $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$. The quotient is $x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}$. The remainder is $-\frac{25}{16}x^2 + \frac{125}{128}x$. The diagram shows the steps of the division, including the subtraction of the product of the divisor and the quotient from the dividend to find the remainder.

Adesso c'è l'ultima somma da fare...

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$ $// \quad \frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-\frac{25}{16}x^2 + \frac{125}{128}x$	$x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}$ $\frac{25}{64}$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
---	---

Diagram illustrating the polynomial division process. The left side shows the long division steps, and the right side shows the quotient and the remainder. Arrows indicate the correspondence between the terms in the quotient and the remainder.

Adesso c'è l'ultima somma da fare...

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$ $// \quad \frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-\frac{25}{16}x^2 + \frac{125}{128}x$ $// \quad \boxed{x+1}$ resto	$x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ quoziente
---	---

Siccome l'ultimo polinomio ha grado inferiore a quello di $B[x]$, è il resto...

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $- \frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$ $// \quad \frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $- \frac{25}{16}x^2 + \frac{125}{128}x$ $// \quad \boxed{x+1}$ resto	$x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ quoziente
---	--

... mentre quello a destra è il quoziente.

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $- \frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$ $// \quad \frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $- \frac{25}{16}x^2 + \frac{125}{128}x$ $// \quad \boxed{x+1}$ resto	$x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ quoziente
---	---

Per fare la prova, dovrebbe accadere che

Per fare la prova, dovrebbe accadere che

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

Per fare la prova, dovrebbe accadere che

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

ossia

$$\underbrace{4x^4 + \frac{3}{128}x + 1}_{A[x]} =$$

Per fare la prova, dovrebbe accadere che

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

ossia

$$\underbrace{4x^4 + \frac{3}{128}x + 1}_{A[x]} = \left(\underbrace{4x^2 - \frac{5}{2}x}_{B[x]} \right) \left(\underbrace{x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}}_{Q[x]} \right) + \underbrace{x + 1}_{R[x]}.$$

Per fare la prova, dovrebbe accadere che

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

ossia

$$\underbrace{4x^4 + \frac{3}{128}x + 1}_{A[x]} = \left(\underbrace{4x^2 - \frac{5}{2}x}_{B[x]} \right) \left(\underbrace{x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}}_{Q[x]} \right) + \underbrace{x + 1}_{R[x]}.$$

E in effetti

Per fare la prova, dovrebbe accadere che

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

ossia

$$\underbrace{4x^4 + \frac{3}{128}x + 1}_{A[x]} = \left(\underbrace{4x^2 - \frac{5}{2}x}_{B[x]} \right) \left(\underbrace{x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}}_{Q[x]} \right) + \underbrace{x + 1}_{R[x]}.$$

E in effetti

$$\left(4x^2 - \frac{5}{2}x \right) \left(x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64} \right) + x + 1 =$$

Per fare la prova, dovrebbe accadere che

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

ossia

$$\underbrace{4x^4 + \frac{3}{128}x + 1}_{A[x]} = \left(\underbrace{4x^2 - \frac{5}{2}x}_{B[x]} \right) \left(\underbrace{x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}}_{Q[x]} \right) + \underbrace{x + 1}_{R[x]}.$$

E in effetti

$$\begin{aligned} & \left(4x^2 - \frac{5}{2}x \right) \left(x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64} \right) + x + 1 = \\ & = 4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 \end{aligned}$$

Per fare la prova, dovrebbe accadere che

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

ossia

$$\underbrace{4x^4 + \frac{3}{128}x + 1}_{A[x]} = \left(\underbrace{4x^2 - \frac{5}{2}x}_{B[x]} \right) \left(\underbrace{x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}}_{Q[x]} \right) + \underbrace{x + 1}_{R[x]}.$$

E in effetti

$$\begin{aligned} & \left(4x^2 - \frac{5}{2}x \right) \left(x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64} \right) + x + 1 = \\ & = 4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{25}{16}x^2 - \frac{125}{128}x + x + 1 = \end{aligned}$$

Per fare la prova, dovrebbe accadere che

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

ossia

$$\underbrace{4x^4 + \frac{3}{128}x + 1}_{A[x]} = \left(\underbrace{4x^2 - \frac{5}{2}x}_{B[x]} \right) \left(\underbrace{x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}}_{Q[x]} \right) + \underbrace{x + 1}_{R[x]}.$$

E in effetti

$$\begin{aligned} & \left(4x^2 - \frac{5}{2}x \right) \left(x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64} \right) + x + 1 = \\ &= 4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{25}{16}x^2 - \frac{125}{128}x + x + 1 = \\ &= 4x^4 - \frac{125}{128}x \end{aligned}$$

Per fare la prova, dovrebbe accadere che

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

ossia

$$\underbrace{4x^4 + \frac{3}{128}x + 1}_{A[x]} = \left(\underbrace{4x^2 - \frac{5}{2}x}_{B[x]} \right) \left(\underbrace{x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}}_{Q[x]} \right) + \underbrace{x + 1}_{R[x]}.$$

E in effetti

$$\begin{aligned} & \left(4x^2 - \frac{5}{2}x \right) \left(x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64} \right) + x + 1 = \\ &= 4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{25}{16}x^2 - \frac{125}{128}x + x + 1 = \\ &= 4x^4 - \frac{125}{128}x + x + 1 = \end{aligned}$$

Per fare la prova, dovrebbe accadere che

$$A[x] = B[x] \cdot Q[x] + R[x],$$

ossia

$$\underbrace{4x^4 + \frac{3}{128}x + 1}_{A[x]} = \left(\underbrace{4x^2 - \frac{5}{2}x}_{B[x]} \right) \left(\underbrace{x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}}_{Q[x]} \right) + \underbrace{x + 1}_{R[x]}.$$

E in effetti

$$\begin{aligned} & \left(4x^2 - \frac{5}{2}x \right) \left(x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64} \right) + x + 1 = \\ &= 4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{25}{16}x^2 - \frac{125}{128}x + x + 1 = \\ &= 4x^4 - \frac{125}{128}x + x + 1 = 4x^4 - \frac{3}{128}x + 1. \end{aligned}$$

Meno semplice è capire *perché* funziona il metodo indicato,

Meno semplice è capire *perché* funziona il metodo indicato, e se funziona *sempre*.

Meno semplice è capire *perché* funziona il metodo indicato, e se funziona *sempre*.

La seconda domanda è più facile:

Meno semplice è capire *perché* funziona il metodo indicato, e se funziona *sempre*.

La seconda domanda è più facile: siccome le uniche *divisioni* sono quelle per il *primo* monomio di $B[x]$, se questo non è zero, si possono sempre fare.

Meno semplice è capire *perché* funziona il metodo indicato, e se funziona *sempre*.

La seconda domanda è più facile: siccome le uniche *divisioni* sono quelle per il *primo* monomio di $B[x]$, se questo non è zero, si possono sempre fare. Ma siccome per ipotesi $B[x]$ non è zero, la procedura si può sempre fare.

Meno semplice è capire *perché* funziona il metodo indicato, e se funziona *sempre*.

La seconda domanda è più facile: siccome le uniche *divisioni* sono quelle per il *primo* monomio di $B[x]$, se questo non è zero, si possono sempre fare. Ma siccome per ipotesi $B[x]$ non è zero, la procedura si può sempre fare.

Altro problema è: ma la procedura, prima o poi *si arresta*,

Meno semplice è capire *perché* funziona il metodo indicato, e se funziona *sempre*.

La seconda domanda è più facile: siccome le uniche *divisioni* sono quelle per il *primo* monomio di $B[x]$, se questo non è zero, si possono sempre fare. Ma siccome per ipotesi $B[x]$ non è zero, la procedura si può sempre fare.

Altro problema è: ma la procedura, prima o poi *si arresta*, o continua all'infinito?

Meno semplice è capire *perché* funziona il metodo indicato, e se funziona *sempre*.

La seconda domanda è più facile: siccome le uniche *divisioni* sono quelle per il *primo* monomio di $B[x]$, se questo non è zero, si possono sempre fare. Ma siccome per ipotesi $B[x]$ non è zero, la procedura si può sempre fare.

Altro problema è: ma la procedura, prima o poi *si arresta*, o continua all'infinito?

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^{\textcircled{3}} + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $- \frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$ $// \quad \frac{25}{16}x^{\textcircled{2}} + \frac{3}{128}x + 1$ $- \frac{25}{16}x^2 + \frac{125}{128}x$ $// \quad \boxed{x + 1}$ resto	$x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ quoziente grado 1
---	--

Anche questo è facile:

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$ $// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $- \frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$ $// \quad \frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $- \frac{25}{16}x^2 + \frac{125}{128}x$ $// \quad x + 1$	$x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ quoziente
--	---

grado 1

resto

Anche questo è facile: siccome ad ogni passaggio il primo monomio si elide con il primo monomio del polinomio riportato, il grado di questi polinomi continua a scendere...

$ \begin{array}{r} 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \\ \hline -4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 \\ \hline // \quad \frac{5}{2}x^{\textcircled{3}} + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \\ \hline -\frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x \\ \hline // \quad \frac{25}{16}x^{\textcircled{2}} + \frac{3}{128}x + 1 \\ \hline -\frac{25}{16}x^2 + \frac{125}{128}x \\ \hline // \quad \boxed{x + 1} \\ \hline \text{resto} \end{array} $	$x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{25}{64}$ $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$ quoziente grado 1
--	---

... e prima o poi deve scendere sotto il grado di $B[x]$.

Ma perché i primi monomi si elidono sempre?

Ma perché i primi monomi si elidono sempre? Pure questo è facile:

Ma perché i primi monomi si elidono sempre? Pure questo è facile: per determinare il monomio de quoziente abbiamo *diviso* i primi monomi,

Ma perché i primi monomi si elidono sempre? Pure questo è facile: per determinare il monomio de quoziente abbiamo *diviso* i primi monomi, poi nel riportare il polinomio a sinistra abbiamo *rimoltiplicato* e *cambiato segno*, per cui è ovvio che il primo monomio torna quello di partenza.

$$\begin{array}{r} 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \\ \hline -4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 \\ \hline \end{array}$$

e riportare al posto giusto

La cosa più complicata è vedere che la procedura fornisce proprio quoziente e resto.

La cosa più complicata è vedere che la procedura fornisce proprio quoziente e resto.

Per capire questo, chiamiamo $Q_1[x]$ il risultato della primissima divisione:

Per capire questo, chiamiamo $Q_1[x]$ il risultato della primissima divisione:

A diagram illustrating the first step of polynomial division. A horizontal line represents the division bar. Above the line, the polynomial $4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ is written. The term $4x^4$ is enclosed in a red box. Below the line, the term $4x^2$ is enclosed in a red box, and the term $\frac{5}{2}x + 0$ is written. A curved arrow labeled "diviso" points from the $4x^4$ box to the $4x^2$ box. Another curved arrow points from the $4x^2$ box to the x^2 term, which is written in blue above the line.

La cosa più complicata è vedere che la procedura fornisce proprio quoziente e resto.

Per capire questo, chiamiamo $Q_1[x]$ il risultato della primissima divisione:

The diagram illustrates the first step of polynomial division. A horizontal line represents the division bar. Above the bar, the dividend is written as $4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$. The term $4x^4$ is enclosed in a box. To the right of the bar, the divisor is written as x^2 . Below the bar, the result of the division is shown as $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$. The term $4x^2$ is enclosed in a box. A curved arrow labeled "diviso" points from the boxed $4x^4$ term to the boxed $4x^2$ term, indicating the division operation.

$$Q_1[x] = (4x^4) : (4x^2) = x^2.$$

Come è stato determinato Q_1 ?

La cosa più complicata è vedere che la procedura fornisce proprio quoziente e resto.

Per capire questo, chiamiamo $Q_1[x]$ il risultato della primissima divisione:

The diagram illustrates the first step of polynomial division. A horizontal line separates the dividend from the divisor. Above the line, the dividend is written as $4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$. The first term, $4x^4$, is enclosed in a red box. To the right of the dividend, the divisor is written as x^2 in blue. Below the line, the result of the division is shown as $4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$. The first term, $4x^2$, is enclosed in a red box. A curved arrow labeled "diviso" points from the red box containing $4x^4$ to the red box containing $4x^2$. A vertical line is drawn between the dividend and the divisor, and another vertical line is drawn between the divisor and the quotient.

$$Q_1[x] = (4x^4) : (4x^2) = x^2.$$

Come è stato determinato Q_1 ? Con il solo intento di ottenere qualcosa che, moltiplicato per $B[x]$, dia un polinomio con il primo monomio uguale a quello di $A[x]$ e cambiato di segno:

La cosa più complicata è vedere che la procedura fornisce proprio quoziente e resto.

Per capire questo, chiamiamo $Q_1[x]$ il risultato della primissima divisione:

$$\begin{array}{r} \boxed{4x^4} + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 \\ \hline \boxed{4x^2} - \frac{5}{2}x + 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$Q_1[x] = (4x^4) : (4x^2) = x^2.$$

Come è stato determinato Q_1 ? Con il solo intento di ottenere qualcosa che, moltiplicato per $B[x]$, dia un polinomio con il primo monomio uguale a quello di $A[x]$ e cambiato di segno:

$$Q_1[x] \cdot B[x] = -4x^4 + \frac{5}{2}x^3.$$

$$Q_1[x] \cdot B[x] = -4x^4 + \frac{5}{2}x^3.$$

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	x^2
$-4x^4 + \frac{5}{2}x^3$	$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$

Come vedete, questo polinomio appare nella tabella...

$$Q_1[x] \cdot B[x] = -4x^4 + \frac{5}{2}x^3.$$

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	x^2
$-4x^4 + \frac{5}{2}x^3$	$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$

Come vedete, questo polinomio appare nella tabella...

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	x^2
$-4x^4 + \frac{5}{2}x^3$	$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
$Q_1[x] \cdot B[x]$	

L'idea è che

L'idea è che

$A[x] - Q_1[x] \cdot B[x]$ ha grado *inferiore* a quello di $A[x]$.

L'idea è che

$$A[x] - Q_1[x] \cdot B[x] \quad \text{ha grado } \textit{inferiore} \text{ a quello di } A[x].$$

Chiamiamo $A_1[x]$ questo nuovo polinomio, che compare in tabella dopo la prima somma:

L'idea è che

$$A[x] - Q_1[x] \cdot B[x] \quad \text{ha grado } \textit{inferiore} \text{ a quello di } A[x].$$

Chiamiamo $A_1[x]$ questo nuovo polinomio, che compare in tabella dopo la prima somma:

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	$Q_1[x]$ x^2
$-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$	$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
$// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	$B[x]$
$A_1[x]$	

$$A_1 = A - Q_1 \cdot B$$

L'idea è che

$$A[x] - Q_1[x] \cdot B[x] \quad \text{ha grado } \textit{inferiore} \text{ a quello di } A[x].$$

Chiamiamo $A_1[x]$ questo nuovo polinomio, che compare in tabella dopo la prima somma:

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	$Q_1[x]$ x^2
$-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$	$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
$// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$ $A_1[x]$	$B[x]$

$$A_1 = A - Q_1 \cdot B$$

(omettiamo i vari $[x]$ per semplificare le formule)

Adesso si tratta di rifare con A_1 la stessa cosa che abbiamo fatto con A ,
e cioè cercare un Q_2 tale che

Adesso si tratta di rifare con A_1 la stessa cosa che abbiamo fatto con A , e cioè cercare un Q_2 tale che

$$A_1[x] - Q_2[x] \cdot B[x] \quad \text{abbia grado } \textit{inferiore} \text{ a quello di } A_1[x].$$

Adesso si tratta di rifare con A_1 la stessa cosa che abbiamo fatto con A , e cioè cercare un Q_2 tale che

$$A_1[x] - Q_2[x] \cdot B[x] \quad \text{abbia grado } \textit{inferiore} \text{ a quello di } A_1[x].$$

Questo si fa come prima: dividendo il primo monomio di A_1 per il primo di B si ottiene Q_2 che è $(5/8)x$ nell'esempio visto:

Adesso si tratta di rifare con A_1 la stessa cosa che abbiamo fatto con A , e cioè cercare un Q_2 tale che

$$A_1[x] - Q_2[x] \cdot B[x] \quad \text{abbia grado inferiore a quello di } A_1[x].$$

Questo si fa come prima: dividendo il primo monomio di A_1 per il primo di B si ottiene Q_2 che è $(5/8)x$ nell'esempio visto:

$$\begin{array}{r|l}
 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 & x^2 + \boxed{\frac{5}{8}x} - Q_2[x] \\
 \hline
 -2x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 & 4x^2 - \frac{5}{2}x + 0 \\
 \hline
 // \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1 &
 \end{array}$$

cosicchè il polinomio $A_2[x]$ definito da

cosicchè il polinomio $A_2[x]$ definito da

$$A_2 = A_1 - Q_2 \cdot B \quad \text{ha grado } \textit{inferiore} \text{ a quello di } A_1.$$

cosicchè il polinomio $A_2[x]$ definito da

$$A_2 = A_1 - Q_2 \cdot B \quad \text{ha grado inferiore a quello di } A_1.$$

$4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	$x^2 + \boxed{\frac{5}{8}x} - Q_2[x]$
$-4x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 0x^2$	$4x^2 - \frac{5}{2}x + 0$
$// \quad \frac{5}{2}x^3 + 0x^2 + \frac{3}{128}x + 1$	
$- \frac{5}{2}x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 0x$	
$// \quad \boxed{\frac{25}{16}x^2 + \frac{3}{128}x + 1}$	
$A_2[x]$	

A questo punto si continua: dividendo il primo monomio di A_2 , come abbiamo fatto, per il primo di B si trova Q_3 , che nell'esempio era $16/25$, e il polinomio $A_3[x]$ definito da

A questo punto si continua: dividendo il primo monomio di A_2 , come abbiamo fatto, per il primo di B si trova Q_3 , che nell'esempio era $16/25$, e il polinomio $A_3[x]$ definito da

$$A_3 = A_2 - Q_3 \cdot B \quad \text{ha grado } \textit{inferiore} \text{ a quello di } A_2.$$

A questo punto si continua: dividendo il primo monomio di A_2 , come abbiamo fatto, per il primo di B si trova Q_3 , che nell'esempio era $16/25$, e il polinomio $A_3[x]$ definito da

$$A_3 = A_2 - Q_3 \cdot B \quad \text{ha grado } \textit{inferiore} \text{ a quello di } A_2.$$

Continuando questo procedimento il grado dei vari polinomi A che troviamo scende sempre,

A questo punto si continua: dividendo il primo monomio di A_2 , come abbiamo fatto, per il primo di B si trova Q_3 , che nell'esempio era $16/25$, e il polinomio $A_3[x]$ definito da

$$A_3 = A_2 - Q_3 \cdot B \quad \text{ha grado } \textit{inferiore} \text{ a quello di } A_2.$$

Continuando questo procedimento il grado dei vari polinomi A che troviamo scende sempre, e ad un bel momento scenderà sotto quello di B , che è fisso dall'inizio.

A questo punto si continua: dividendo il primo monomio di A_2 , come abbiamo fatto, per il primo di B si trova Q_3 , che nell'esempio era $16/25$, e il polinomio $A_3[x]$ definito da

$$A_3 = A_2 - Q_3 \cdot B \quad \text{ha grado inferiore a quello di } A_2.$$

Continuando questo procedimento il grado dei vari polinomi A che troviamo scende sempre, e ad un bel momento scenderà sotto quello di B , che è fisso dall'inizio.

A quel punto il polinomio "A" di grado inferiore a quello di B sarà il resto R , e vedremo tra un attimo perché.

A questo punto si continua: dividendo il primo monomio di A_2 , come abbiamo fatto, per il primo di B si trova Q_3 , che nell'esempio era $16/25$, e il polinomio $A_3[x]$ definito da

$$A_3 = A_2 - Q_3 \cdot B \quad \text{ha grado inferiore a quello di } A_2.$$

Continuando questo procedimento il grado dei vari polinomi A che troviamo scende sempre, e ad un bel momento scenderà sotto quello di B , che è fisso dall'inizio.

A quel punto il polinomio "A" di grado inferiore a quello di B sarà il resto R , e vedremo tra un attimo perché. Nell'esempio, esso era A_3 .

A questo punto si continua: dividendo il primo monomio di A_2 , come abbiamo fatto, per il primo di B si trova Q_3 , che nell'esempio era $16/25$, e il polinomio $A_3[x]$ definito da

$$A_3 = A_2 - Q_3 \cdot B \quad \text{ha grado inferiore a quello di } A_2.$$

Continuando questo procedimento il grado dei vari polinomi A che troviamo scende sempre, e ad un bel momento scenderà sotto quello di B , che è fisso dall'inizio.

A quel punto il polinomio "A" di grado inferiore a quello di B sarà il resto R , e vedremo tra un attimo perché. Nell'esempio, esso era A_3 . (Inoltre, a questo punto non è più possibile proseguire perché il grado del primo monomio di A_3 è inferiore di quello di B).

A questo punto si continua: dividendo il primo monomio di A_2 , come abbiamo fatto, per il primo di B si trova Q_3 , che nell'esempio era $16/25$, e il polinomio $A_3[x]$ definito da

$$A_3 = A_2 - Q_3 \cdot B \quad \text{ha grado inferiore a quello di } A_2.$$

Continuando questo procedimento il grado dei vari polinomi A che troviamo scende sempre, e ad un bel momento scenderà sotto quello di B , che è fisso dall'inizio.

A quel punto il polinomio “ A ” di grado inferiore a quello di B sarà il resto R , e vedremo tra un attimo perché. Nell'esempio, esso era A_3 . (Inoltre, a questo punto non è più possibile proseguire perché il grado del primo monomio di A_3 è inferiore di quello di B).

Il quoziente è invece, nell'esempio,

A questo punto si continua: dividendo il primo monomio di A_2 , come abbiamo fatto, per il primo di B si trova Q_3 , che nell'esempio era $16/25$, e il polinomio $A_3[x]$ definito da

$$A_3 = A_2 - Q_3 \cdot B \quad \text{ha grado inferiore a quello di } A_2.$$

Continuando questo procedimento il grado dei vari polinomi A che troviamo scende sempre, e ad un bel momento scenderà sotto quello di B , che è fisso dall'inizio.

A quel punto il polinomio "A" di grado inferiore a quello di B sarà il resto R , e vedremo tra un attimo perché. Nell'esempio, esso era A_3 . (Inoltre, a questo punto non è più possibile proseguire perché il grado del primo monomio di A_3 è inferiore di quello di B).

Il quoziente è invece, nell'esempio,

$$Q[x] = Q_1[x] + Q_2[x] + Q_3[x]$$

A questo punto si continua: dividendo il primo monomio di A_2 , come abbiamo fatto, per il primo di B si trova Q_3 , che nell'esempio era $16/25$, e il polinomio $A_3[x]$ definito da

$$A_3 = A_2 - Q_3 \cdot B \quad \text{ha grado inferiore a quello di } A_2.$$

Continuando questo procedimento il grado dei vari polinomi A che troviamo scende sempre, e ad un bel momento scenderà sotto quello di B , che è fisso dall'inizio.

A quel punto il polinomio “ A ” di grado inferiore a quello di B sarà il resto R , e vedremo tra un attimo perché. Nell'esempio, esso era A_3 . (Inoltre, a questo punto non è più possibile proseguire perché il grado del primo monomio di A_3 è inferiore di quello di B).

Il quoziente è invece, nell'esempio,

$$Q[x] = Q_1[x] + Q_2[x] + Q_3[x]$$

e pari alla somma dei vari “ Q ” trovati nel caso generale.

Vediamo allora perché $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ e $R = A_3$, dopodiché sarà chiaro anche nel caso generale.

Vediamo allora perché $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ e $R = A_3$, dopodiché sarà chiaro anche nel caso generale.

Deve succedere che

Vediamo allora perché $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ e $R = A_3$, dopodiché sarà chiaro anche nel caso generale.

Deve succedere che

$$B \cdot Q + R = A.$$

Vediamo allora perché $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ e $R = A_3$, dopodiché sarà chiaro anche nel caso generale.

Deve succedere che

$$B \cdot Q + R = A.$$

Allora

$$B \cdot Q + R =$$

Vediamo allora perché $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ e $R = A_3$, dopodiché sarà chiaro anche nel caso generale.

Deve succedere che

$$B \cdot Q + R = A.$$

Allora

$$B \cdot Q + R = B \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3) + A_3.$$

Vediamo allora perché $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ e $R = A_3$, dopodiché sarà chiaro anche nel caso generale.

Deve succedere che

$$B \cdot Q + R = A.$$

Allora

$$B \cdot Q + R = B \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3) + A_3.$$

Per la proprietà distributiva del prodotto di polinomi rispetto alla somma questo vale

Vediamo allora perché $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ e $R = A_3$, dopodiché sarà chiaro anche nel caso generale.

Deve succedere che

$$B \cdot Q + R = A.$$

Allora

$$B \cdot Q + R = B \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3) + A_3.$$

Per la proprietà distributiva del prodotto di polinomi rispetto alla somma questo vale

$$B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + B \cdot Q_3 + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + B \cdot Q_3 + A_3.$$

Vediamo allora perché $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ e $R = A_3$, dopodiché sarà chiaro anche nel caso generale.

Deve succedere che

$$B \cdot Q + R = A.$$

Allora

$$B \cdot Q + R = B \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3) + A_3.$$

Per la proprietà distributiva del prodotto di polinomi rispetto alla somma questo vale

$$B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + B \cdot Q_3 + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + B \cdot Q_3 + A_3.$$

Ma

Vediamo allora perché $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ e $R = A_3$, dopodiché sarà chiaro anche nel caso generale.

Deve succedere che

$$B \cdot Q + R = A.$$

Allora

$$B \cdot Q + R = B \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3) + A_3.$$

Per la proprietà distributiva del prodotto di polinomi rispetto alla somma questo vale

$$B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + B \cdot Q_3 + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + B \cdot Q_3 + A_3.$$

Ma

$$A_3 = A_2 - B \cdot Q_3$$

Vediamo allora perché $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ e $R = A_3$, dopodiché sarà chiaro anche nel caso generale.

Deve succedere che

$$B \cdot Q + R = A.$$

Allora

$$B \cdot Q + R = B \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3) + A_3.$$

Per la proprietà distributiva del prodotto di polinomi rispetto alla somma questo vale

$$B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + B \cdot Q_3 + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + B \cdot Q_3 + A_3.$$

Ma

$$A_3 = A_2 - B \cdot Q_3$$

e quindi (i termini rossi si elidono)

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + B \cdot Q_3 + A_2 - B \cdot Q_3 =$$

Vediamo allora perché $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ e $R = A_3$, dopodiché sarà chiaro anche nel caso generale.

Deve succedere che

$$B \cdot Q + R = A.$$

Allora

$$B \cdot Q + R = B \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3) + A_3.$$

Per la proprietà distributiva del prodotto di polinomi rispetto alla somma questo vale

$$B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + B \cdot Q_3 + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + B \cdot Q_3 + A_3.$$

Ma

$$A_3 = A_2 - B \cdot Q_3$$

e quindi (i termini rossi si elidono)

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + \textcolor{red}{B \cdot Q_3} + A_2 - \textcolor{red}{B \cdot Q_3} = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + A_2.$$

$$\text{Ma } A_2 = A_1 - B \cdot Q_2,$$

Ma $A_2 = A_1 - B \cdot Q_2$, e quindi

Ma $A_2 = A_1 - B \cdot Q_2$, e quindi

$$B \cdot Q + R =$$

Ma $A_2 = A_1 - B \cdot Q_2$, e quindi

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + A_1 - B \cdot Q_2 = B \cdot Q_1 + A_1.$$

Ma $A_2 = A_1 - B \cdot Q_2$, e quindi

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + A_1 - B \cdot Q_2 = B \cdot Q_1 + A_1.$$

Siccome poi $A_1 = A - B \cdot Q_1$, abbiamo infine

Ma $A_2 = A_1 - B \cdot Q_2$, e quindi

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + A_1 - B \cdot Q_2 = B \cdot Q_1 + A_1.$$

Siccome poi $A_1 = A - B \cdot Q_1$, abbiamo infine

$$B \cdot Q + R =$$

Ma $A_2 = A_1 - B \cdot Q_2$, e quindi

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + A_1 - B \cdot Q_2 = B \cdot Q_1 + A_1.$$

Siccome poi $A_1 = A - B \cdot Q_1$, abbiamo infine

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + A_1 =$$

Ma $A_2 = A_1 - B \cdot Q_2$, e quindi

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + A_1 - B \cdot Q_2 = B \cdot Q_1 + A_1.$$

Siccome poi $A_1 = A - B \cdot Q_1$, abbiamo infine

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + A_1 = B \cdot Q_1 + A - B \cdot Q_1 = A.$$

Ma $A_2 = A_1 - B \cdot Q_2$, e quindi

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + A_1 - B \cdot Q_2 = B \cdot Q_1 + A_1.$$

Siccome poi $A_1 = A - B \cdot Q_1$, abbiamo infine

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + A_1 = B \cdot Q_1 + A - B \cdot Q_1 = A.$$

Quindi i polinomi trovati sono proprio quoziente e resto della divisione, come afferma il teorema (anche perché R ha grado inferiore a quello di B).

Ma $A_2 = A_1 - B \cdot Q_2$, e quindi

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + A_1 - B \cdot Q_2 = B \cdot Q_1 + A_1.$$

Siccome poi $A_1 = A - B \cdot Q_1$, abbiamo infine

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + A_1 = B \cdot Q_1 + A - B \cdot Q_1 = A.$$

Quindi i polinomi trovati sono proprio quoziente e resto della divisione, come afferma il teorema (anche perché R ha grado inferiore a quello di B).

Resta da vedere perché essi sono *unici*.

Ma $A_2 = A_1 - B \cdot Q_2$, e quindi

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + A_1 - B \cdot Q_2 = B \cdot Q_1 + A_1.$$

Siccome poi $A_1 = A - B \cdot Q_1$, abbiamo infine

$$B \cdot Q + R = B \cdot Q_1 + A_1 = B \cdot Q_1 + A - B \cdot Q_1 = A.$$

Quindi i polinomi trovati sono proprio quoziente e resto della divisione, come afferma il teorema (anche perché R ha grado inferiore a quello di B).

Resta da vedere perché essi sono *unici*.

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{e} \quad A = B \cdot \hat{S} + \hat{T}.$$

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{e} \quad A = B \cdot \hat{S} + \hat{T}.$$

Allora intanto

$$A - R = B \cdot Q + R - R =$$

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{e} \quad A = B \cdot \hat{S} + \hat{T}.$$

Allora intanto

$$A - R = B \cdot Q + R - R = B \cdot Q$$

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{e} \quad A = B \cdot \hat{S} + \hat{T}.$$

Allora intanto

$$A - R = B \cdot Q + R - R = B \cdot Q \quad \text{e} \quad A - T = B \cdot S + T - T =$$

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{e} \quad A = B \cdot \hat{S} + \hat{T}.$$

Allora intanto

$$A - R = B \cdot Q + R - R = B \cdot Q \quad \text{e} \quad A - T = B \cdot S + T - T = B \cdot S.$$

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{e} \quad A = B \cdot \hat{S} + \hat{T}.$$

Allora intanto

$$A - R = B \cdot Q + R - R = B \cdot Q \quad \text{e} \quad A - \hat{T} = B \cdot \hat{S} + \hat{T} - \hat{T} = B \cdot \hat{S}.$$

Poi, per la proprietà distributiva e le relazioni appena trovate,

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{e} \quad A = B \cdot \hat{S} + \hat{T}.$$

Allora intanto

$$A - R = B \cdot Q + R - R = B \cdot Q \quad \text{e} \quad A - \hat{T} = B \cdot \hat{S} + \hat{T} - \hat{T} = B \cdot \hat{S}.$$

Poi, per la proprietà distributiva e le relazioni appena trovate,

$$B \cdot (Q - \hat{S}) = B \cdot Q - B \cdot \hat{S} =$$

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{e} \quad A = B \cdot \hat{S} + \hat{T}.$$

Allora intanto

$$A - R = B \cdot Q + R - R = B \cdot Q \quad \text{e} \quad A - \hat{T} = B \cdot \hat{S} + \hat{T} - \hat{T} = B \cdot \hat{S}.$$

Poi, per la proprietà distributiva e le relazioni appena trovate,

$$B \cdot (Q - \hat{S}) = B \cdot Q - B \cdot \hat{S} = (A - R) - (A - \hat{T}) =$$

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{e} \quad A = B \cdot \hat{S} + \hat{T}.$$

Allora intanto

$$A - R = B \cdot Q + R - R = B \cdot Q \quad \text{e} \quad A - \hat{T} = B \cdot \hat{S} + \hat{T} - \hat{T} = B \cdot \hat{S}.$$

Poi, per la proprietà distributiva e le relazioni appena trovate,

$$B \cdot (Q - \hat{S}) = B \cdot Q - B \cdot \hat{S} = (A - R) - (A - \hat{T}) = A - R - A + \hat{T} =$$

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{e} \quad A = B \cdot \hat{S} + \hat{T}.$$

Allora intanto

$$A - R = B \cdot Q + R - R = B \cdot Q \quad \text{e} \quad A - \hat{T} = B \cdot \hat{S} + \hat{T} - \hat{T} = B \cdot \hat{S}.$$

Poi, per la proprietà distributiva e le relazioni appena trovate,

$$B \cdot (Q - \hat{S}) = B \cdot Q - B \cdot \hat{S} = (A - R) - (A - \hat{T}) = A - R - A + \hat{T} = \hat{T} - R.$$

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{e} \quad A = B \cdot \hat{S} + \hat{T}.$$

Allora intanto

$$A - R = B \cdot Q + R - R = B \cdot Q \quad \text{e} \quad A - \hat{T} = B \cdot \hat{S} + \hat{T} - \hat{T} = B \cdot \hat{S}.$$

Poi, per la proprietà distributiva e le relazioni appena trovate,

$$B \cdot (Q - \hat{S}) = B \cdot Q - B \cdot \hat{S} = (A - R) - (A - \hat{T}) = A - R - A + \hat{T} = \hat{T} - R.$$

In definitiva

Supponiamo allora per assurdo che vi siano *due* quozienti e *due* resti della divisione:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{e} \quad A = B \cdot \hat{S} + \hat{T}.$$

Allora intanto

$$A - R = B \cdot Q + R - R = B \cdot Q \quad \text{e} \quad A - \hat{T} = B \cdot \hat{S} + \hat{T} - \hat{T} = B \cdot \hat{S}.$$

Poi, per la proprietà distributiva e le relazioni appena trovate,

$$B \cdot (Q - \hat{S}) = B \cdot Q - B \cdot \hat{S} = (A - R) - (A - \hat{T}) = A - R - A + \hat{T} = \hat{T} - R.$$

In definitiva

$$B \cdot (Q - \hat{S}) = \hat{T} - R.$$

Guardiamo ora la relazione appena trovata

$$B \cdot (Q - S) = T - R.$$

Guardiamo ora la relazione appena trovata

$$B \cdot (Q - S) = T - R.$$

T ed R sono i resti, ed hanno grado *inferiore* al grado di B .

Guardiamo ora la relazione appena trovata

$$B \cdot (Q - S) = T - R.$$

T ed R sono i resti, ed hanno grado *inferiore* al grado di B . D'altro canto, $B \cdot (Q - S)$ deve avere grado *maggiore o uguale* a quello di B , perché è B moltiplicato per un polinomio.

Guardiamo ora la relazione appena trovata

$$B \cdot (Q - S) = T - R.$$

T ed R sono i resti, ed hanno grado *inferiore* al grado di B . D'altro canto, $B \cdot (Q - S)$ deve avere grado *maggiore o uguale* a quello di B , perché è B moltiplicato per un polinomio. Questo è impossibile a meno che entrambi i polinomi $B(Q - S)$ e $T - R$ sono nulli.

Guardiamo ora la relazione appena trovata

$$B \cdot (Q - S) = T - R.$$

T ed R sono i resti, ed hanno grado *inferiore* al grado di B . D'altro canto, $B \cdot (Q - S)$ deve avere grado *maggiore o uguale* a quello di B , perché è B moltiplicato per un polinomio. Questo è impossibile a meno che entrambi i polinomi $B(Q - S)$ e $T - R$ sono nulli. Ma allora $T = R$, e siccome B non è il polinomio nullo, deve essere nullo il polinomio $Q - S$, e dunque $Q = S$.

Guardiamo ora la relazione appena trovata

$$B \cdot (Q - S) = T - R.$$

T ed R sono i resti, ed hanno grado *inferiore* al grado di B . D'altro canto, $B \cdot (Q - S)$ deve avere grado *maggiore o uguale* a quello di B , perché è B moltiplicato per un polinomio. Questo è impossibile a meno che entrambi i polinomi $B(Q - S)$ e $T - R$ sono nulli. Ma allora $T = R$, e siccome B non è il polinomio nullo, deve essere nullo il polinomio $Q - S$, e dunque $Q = S$. Ma allora quoziente e resto sono unici.

Guardiamo ora la relazione appena trovata

$$B \cdot (Q - S) = T - R.$$

T ed R sono i resti, ed hanno grado *inferiore* al grado di B . D'altro canto, $B \cdot (Q - S)$ deve avere grado *maggiore o uguale* a quello di B , perché è B moltiplicato per un polinomio. Questo è impossibile a meno che entrambi i polinomi $B(Q - S)$ e $T - R$ sono nulli. Ma allora $T = R$, e siccome B non è il polinomio nullo, deve essere nullo il polinomio $Q - S$, e dunque $Q = S$. Ma allora quoziente e resto sono unici. Questo completa la dimostrazione.