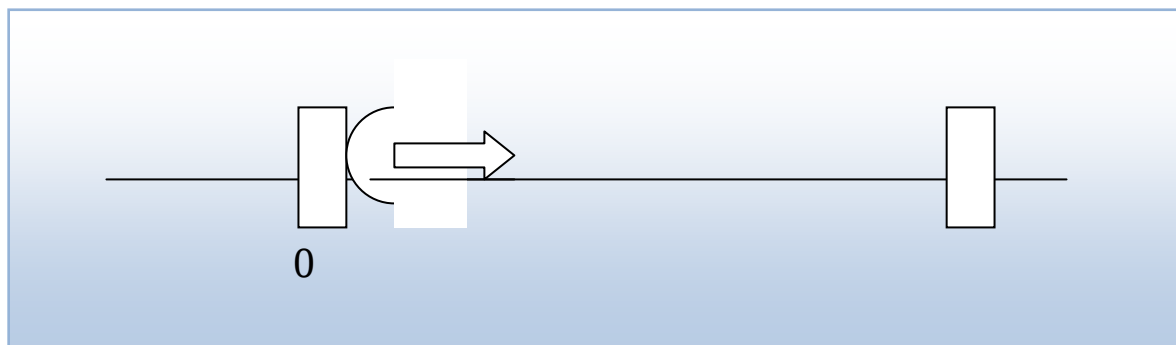


DALLO SPAZIO E DAL TEMPO ALLO SPAZIOTEMPO

Ledo Stefanini

1. COME COSTRIRSI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO (INERZIALE)

Mettiamo che nel punto O dello spazio si trovi un fisico che vuole esplorare e descrivere lo spazio circostante. Prima di tutto dovrà definire tre assi (poniamo ortogonali) rispetto ai quali riferire le distanze. Ogni punto su uno degli assi sarà caratterizzato da una sola ordinata che verrà definita nel modo che diremo. Il fisico dispone di un radar, di un orologio e di un principio: il principio dell'isotropia dello spazio per le onde elettromagnetiche. Detto in un altro modo: *la velocità della luce è la stessa per tutte le direzioni*. Si tratta di un assunto pesante. In effetti, tutte le tecniche classiche, adottate per misurare la velocità della luce (Fizeau, Foucault, ecc.) utilizzano un percorso di andata e ritorno, il che richiede un solo orologio.



Il fisico O, allo scopo di determinare la distanza di un punto P, al tempo 0 (indicato dal suo orologio), invia un segnale radar verso P e al tempo T raccoglie il segnale riflesso. Tutto ciò di cui dispone sono i due tempi. Se accettiamo il principio che la velocità della luce sia la stessa all'andata e al ritorno e poniamo il suo valore come unitario, la distanza della stazione è

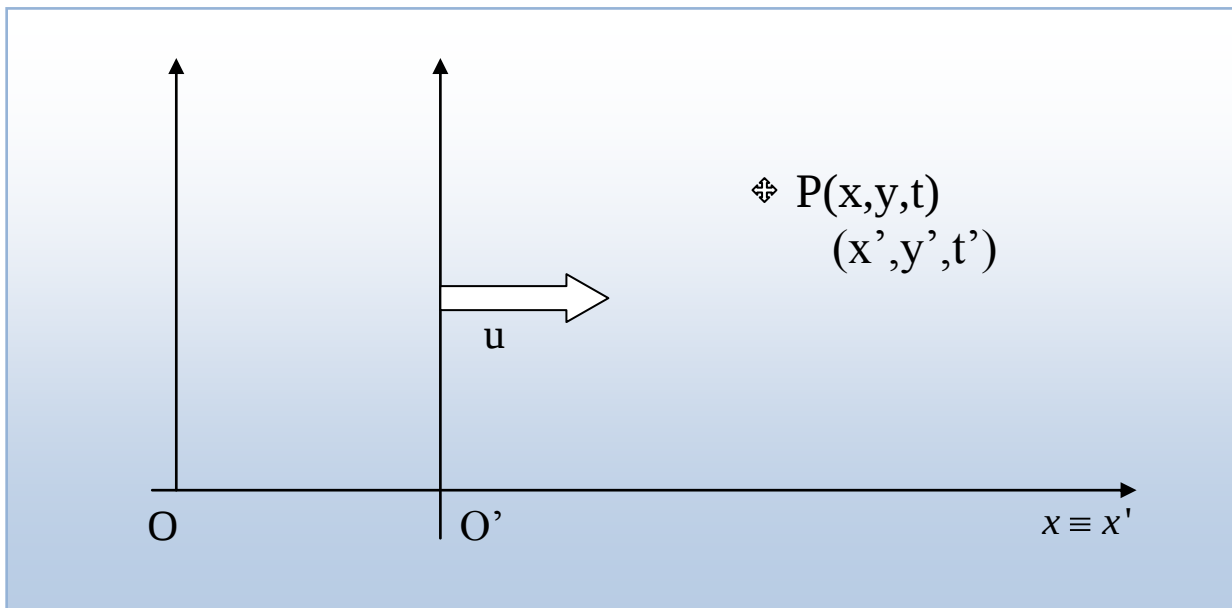
$$x = \frac{T}{2}. \quad 1.1$$

Nulla ci impedisce di pensare che ogni punto sia sede di una stazione di osservazione a cui, mediante il radar, l'osservatore in O attribuisce tre coordinate. Ma le tre coordinate spaziali non bastano per costruire una fisica: è necessario anche accordare gli orologi delle stazioni con quello dell'osservatore principale. Il metodo seguito sarà lo stesso: se il segnale radar parte al tempo zero e torna al tempo T, e se la velocità delle onde elettromagnetiche è la stessa (all'andata come al ritorno), il punto P viene raggiunto al tempo

$$t = \frac{T}{2}. \quad 1.2$$

In questo modo, ogni stazione del sistema di riferimento di O viene dotata di tre coordinate spaziali e di una temporale.

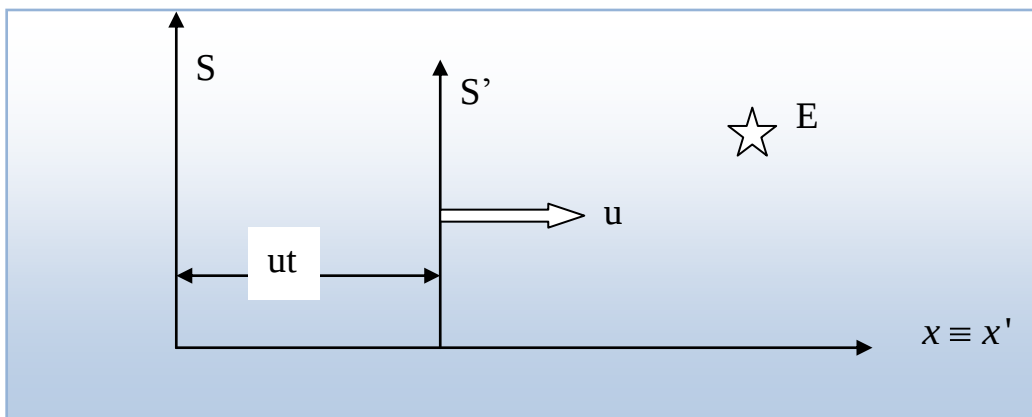
Ciascun osservatore può attrezzare il suo sistema di riferimento in questo modo. Prendiamo un caso particolarmente semplice: uno spazio a due dimensioni che viene mappato da due osservatori diversi O e O', in moto uniforme l'uno rispetto all'altro, e con un asse in comune.



Mettiamo che O ed O' misurino le coordinate spaziali e temporali di una stessa stazione P con il metodo radar. Avranno risultati diversi, perché O' corre incontro al segnale riflesso da P.

2. TRASFORMATE DI GALILEO

Siano S ed S' due sistemi di riferimento in moto, l'uno rispetto all'altro, con velocità costante u .



Sia E un evento che ha coordinate (in S) x, y, t . Vogliamo le sue coordinate in S', che, all'istante zero coincideva con S.

Intanto sarà $t' = t$ perché il tempo è invariante nel passaggio da un sistema all'altro; inoltre sarà $y' = y$, perché l'ordinata non può cambiare dall'uno all'altro sistema di riferimento. Infine $x' = x - ut$, essendo ut il tratto percorso da S' nel tempo t .

Le equazioni

$$t' = t$$

$$x' = x - ut \quad (2.1)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

vengono indicate come equazioni di trasformazione della relatività galileiana o, semplicemente, *trasformate di Galileo*.

Da queste si ricavano l'equazione di trasformazione della velocità:

$$v' = \frac{x'}{t'} = \frac{x'}{t} = \frac{x}{t} - u = v - u \quad 2.2$$

e dell'accelerazione:

$$a' = \frac{v'}{t'} = \frac{v'}{t} = \frac{v}{t} = a \quad 2.3$$

Per la relatività galileiana, l'accelerazione è un'*invariante*. Se un corpo accelera rispetto ad un sistema inerziale, la sua accelerazione è la stessa per tutti i sistemi in moto uniforme rispetto al primo.

Per le trasformate di Galileo, sono *invarianti* anche le distanze e i tempi. Anche le masse e le forze sono *invarianti*. Poiché le velocità sono *relative*, non possono comparire nelle equazioni della meccanica classica. Dal che si evince che la forza di Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad 2.4$$

che descrive la forza agente su una carica in moto in un campo magnetico, non è una legge classica.

3. RELATIVITA' DEI TEMPI E DELLE DISTANZE

3.1 RELATIVITA' DEI TEMPI

Accettare l'ipotesi dell'*invarianza* della velocità della luce, equivale a negare la relatività galileiana, e ciò comporta profondi cambiamenti delle nozioni di distanze spaziali e temporali. Per esempio si propongono due diverse nozioni di tempo. Ne daremo una illustrazione elementare. Abbiamo già detto che uno degli assiomi della teoria della relatività è che la velocità della luce si possa misurare facendo uso di un solo orologio, cioè che la velocità all'andata sia uguale alla velocità di ritorno.

Un secondo assioma, molto più difficile da accettare, è che la velocità della luce sia un invariante, cioè sia la stessa in tutti i sistemi di riferimento.

Significa che la luce che arriva da una stella risulta la stessa per tutti gli osservatori che la misurano, cioè per quelli che si avvicinano alla stella e per quelli che se ne allontanano. Oppure, che la velocità della luce emessa dalle stelle è la stessa, indipendentemente dal fatto che si avvicinino o si allontanino da noi. O anche: durante l'anno, ci sono periodi in cui ci avviciniamo ad una certa stella ed altri in cui ce ne allontaniamo, a causa del moto di rivoluzione della terra. Ebbene, la velocità della luce che ci giunge dalla stella rimane sempre la stessa. E' legittimo pensare che questo assioma sia in contraddizione con l'interpretazione corrente del fenomeno che Bradley chiamò *aberrazione della luce stellare*. Dopo aver messo in luce la natura scandalosa (per la fisica classica) dell'assioma dell'invarianza della velocità della luce, vediamo alcune delle conseguenze che comporta sulle nostre idee di tempo e di distanza.

Poiché c (la velocità della luce) è il fattore che lega il tempo e lo spazio percorso dalla luce in quel tempo,

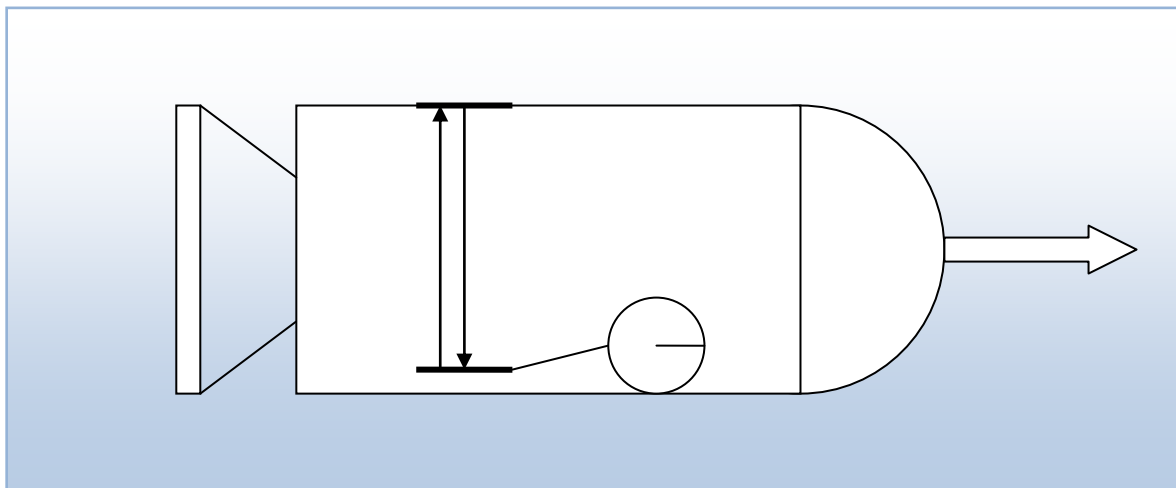
$$x = c t \quad 3.1$$

se è invariante, viene degradato al ruolo di puro fattore di proporzionalità, così come la costante J che lega due unità diverse di energia: le *calorie* e i *Joule*. Possiamo addirittura assumere c come unità di misura delle velocità per cui la relazione precedente si riduce a:

$$x = t \quad 3.2$$

Significa che, grazie agli assiomi che abbiamo assunto, le distanze e i tempi si possono misurare nelle stesse unità; per esempio, poiché $c = 30 \frac{cm}{ns}$, possiamo dire che $1 m = 3,3 ns$. O, invece di dire che un uomo è alto 1,80 m, dire che la sua altezza è 6 ns.

Sia S' una stazione spaziale che viaggia di moto uniforme (con velocità u) rispetto ad una stazione terrestre S .



A bordo sia montato un *orologio a luce* costituito da due specchi perfettamente riflettenti tra i quali oscilla indefinitamente un *flash* di luce. Se la distanza tra gli specchi è L , il tempo battuto dall'orologio è

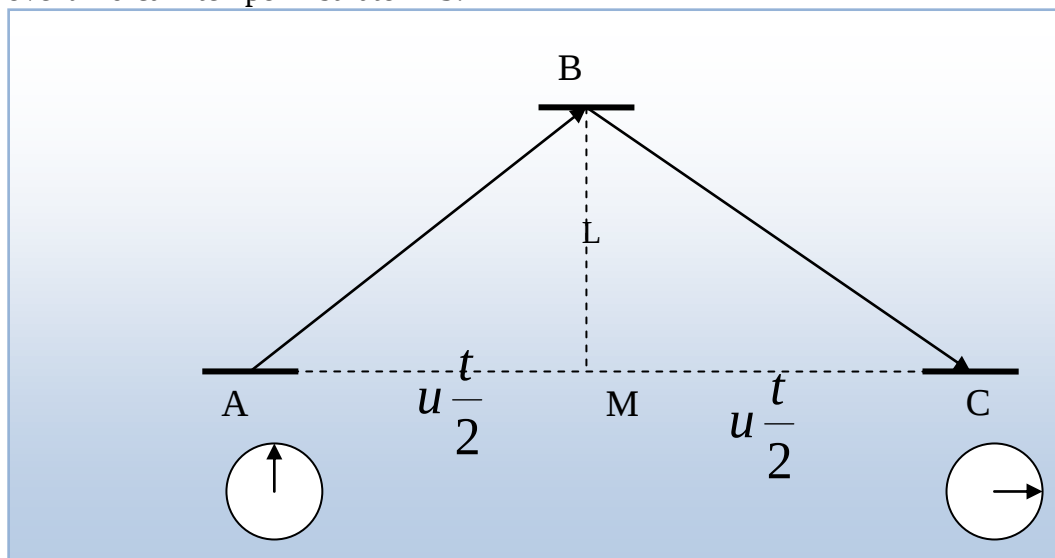
$$\tau = 2L \quad 3.3$$

avendo assunto come unitaria la velocità della luce.

Vediamo ora come il funzionamento dell'orologio viene descritto da un osservatore a terra. Nel tempo di un'andata e ritorno del flash, la nave si sposta di un tratto

$$x = ut \quad 3.4$$

ove t indica il tempo misurato in S .



Ma il tratto percorso dalla luce, per l'osservatore a terra, ha una lunghezza maggiore:

$$2\sqrt{L^2 + \left(u \frac{t}{2}\right)^2} \quad 3.5$$

e il tempo impiegato è tale che

$$t = 2\sqrt{L^2 + \left(u \frac{t}{2}\right)^2} \quad 3.6$$

Da questa si ricava

$$t = 2L \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \tau \gamma \quad 3.7$$

dove la velocità u è espressa in unità di c e, come d'uso, si è posto

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \gamma \quad 3.8$$

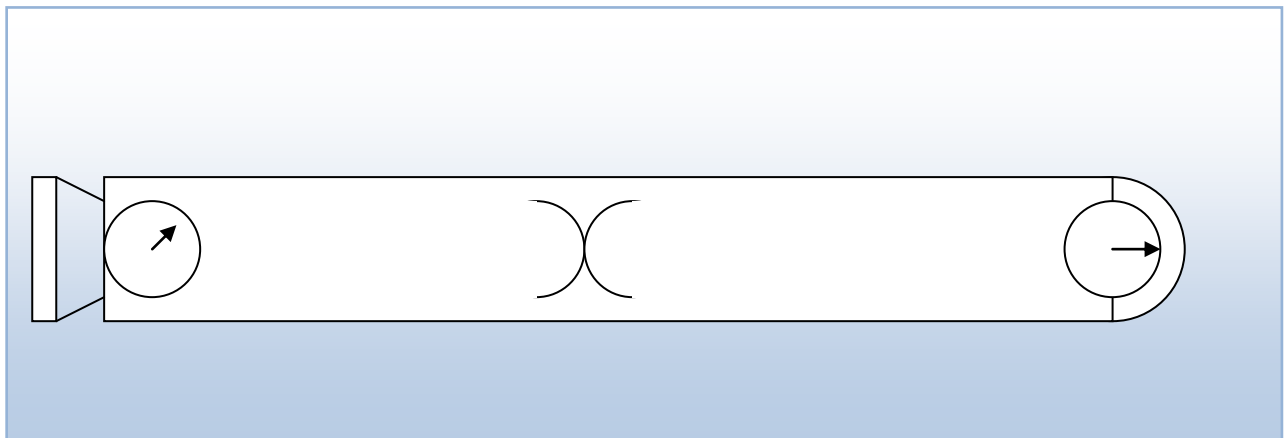
Il risultato espresso dalla (3.7) è clamoroso: il tempo t registrato dall'orologio di S è maggiore del tempo τ registrato dall'osservatore che viaggia con l'orologio stesso. Va sotto il nome di *dilatazione dei tempi*.

In realtà, il fenomeno non ha nulla di misterioso: si tratta semplicemente del fatto che le grandezze misurate nei due sistemi di riferimento sono diverse.

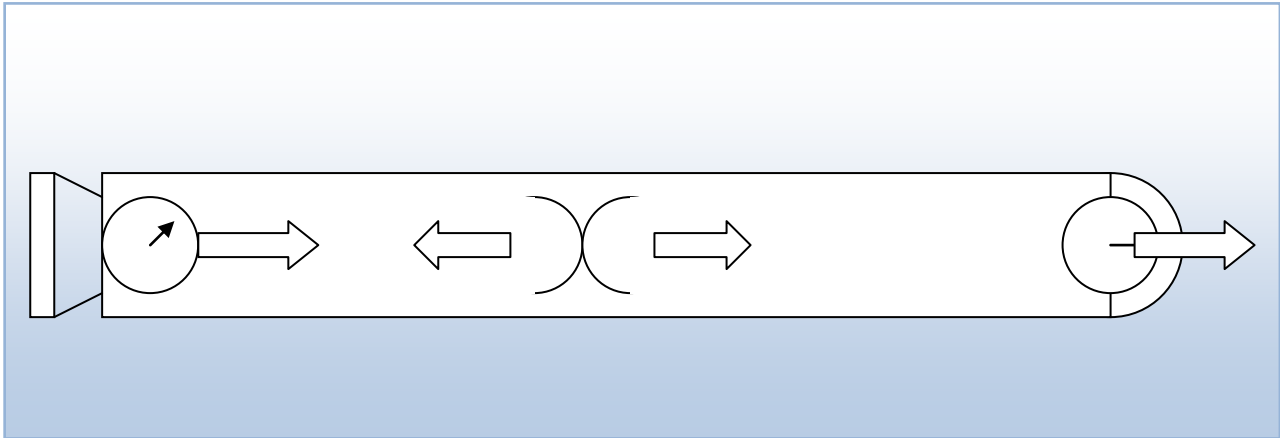
Nel sistema S' , per misurare il tempo tra la partenza e l'arrivo del flash occorre un orologio solo; nel sistema S ancorato a terra, per misurare la separazione temporale tra i due eventi (partenza e arrivo) occorrono *due* orologi, collocati in luoghi diversi. Ora, l'utilizzo di orologi posti in punti diversi richiede un'operazione preliminare importante: la loro *sincronizzazione*.

La sincronizzazione è un'operazione relativa come illustra il seguente esempio.

Sia una lunga astronave che viaggia nello spazio siderale. L'astronave è dotata di molti orologi; ma noi prestiamo attenzione solo ai due che sono collocati a prua e a poppa.



Per sincronizzare gli orologi, periodicamente, da una sorgente collocata al centro della nave viene emesso un segnale radio. Se la cosa soddisfa gli astronauti che si trovano a bordo di questa astronave, non viene approvata da un osservatore che non partecipi al moto di questa. Per questo osservatore l'operazione di sincronizzazione non è valida perché, mentre l'orologio di prua fugge davanti al segnale, quello di poppa gli va incontro.



Pertanto, i due eventi – arrivo del segnale a prua e a poppa – sono simultanei nel sistema di riferimento dell'astronave, mentre non lo sono in un sistema di riferimento in moto rispetto al primo.

Possiamo quindi definire due grandezze diverse:

1. Il *tempo proprio*, cioè l'intervallo di tempo che separa due eventi che hanno luogo in uno stesso punto. La sua misura richiede un solo orologio ed è un *assoluto*.
2. Il *tempo* (senza ulteriori specificazioni) che separa due eventi che hanno luogo in punti diversi. La sua misura richiede due orologi diversi (che devono essere sincronizzati) ed è un valore *relativo* al sistema di riferimento.

3.2 RELATIVITÀ DELLE DISTANZE

Torniamo all'astronave attrezzata con l'orologio a luce. L'osservatore che si trova su S' vede passare prima il punto A e poi, dopo un tempo τ , il punto C. Poiché la velocità relativa è u , la distanza che separa i due eventi A e C è

$$x' = u \tau = 2L u \quad 3.9$$

Per contro, nel sistema di riferimento della terra S , la distanza tra i due eventi è

$$x = u t = 2L u \gamma = x' \gamma \quad 3.10$$

La distanza spaziale tra i due eventi, misurata in S' è minore della loro separazione spaziale misurata in S . In questo consiste il fenomeno della *contrazione delle lunghezze*.

4. TRASFORMATE DI LORENTZ- FITZGERALD

Se si vuole costruire una nuova relatività che contenga come caso particolare la relatività galileiana (valida per velocità piccole rispetto alla velocità della luce), conviene partire dalle trasformate di Galileo:

$$t' = t$$

$$x' = x - ut \quad (4.1)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Nella ricerca di nuove trasformazioni per le coordinate spaziali e temporali ci faremo guidare dai seguenti criteri:

1) Se la velocità della luce è un assoluto, conviene assumerla come unità di misura delle velocità e misurare anche gli spazi in unità di tempo:

$$x = t$$

2) Le equazioni che cerchiamo si devono ridurre alle trasformate di Galileo per $u \ll 1$;

3) È necessario tener conto della dilatazione dei tempi e della contrazione delle lunghezze per il

$$\text{fattore } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

4) Le coordinate spaziali e temporali devono essere simmetriche

5) La velocità della luce deve trasformarsi in se stessa.

Le equazioni di trasformazione che soddisfano ai detti criteri sono

$$t' = \gamma (t - ux)$$

$$x' = \gamma (x - ut) \quad (4.2)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Vanno sotto il nome di *trasformate di Lorentz- Fitzgerald*.

Poiché, per u tendente a zero, il fattore γ tende a uno, si vede che, per velocità piccole rispetto alla velocità della luce, le trasformate di L-F si riducono alle trasformate di Galileo.

Ricaviamo l'equazione di trasformazione per le velocità:

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} \frac{1}{\frac{\Delta t'}{\Delta t}} = \frac{\gamma \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - u \right)}{\gamma \left(1 - u \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)} = \frac{v - u}{1 - uv} \quad 4.3 .$$

Si osservi che se in questa inseriamo $v = 1$, otteniamo $v' = 1$, in conformità alla condizione (5).

5. INVARIANTE RELATIVISTICO

Dalle trasformate di Galileo si ricava che

$$\Delta t' = \Delta t$$

cioè che, per la relatività galileiana gli intervalli di tempo sono invarianti . Ma anche

$$\Delta x' = \Delta x - u \Delta t = \Delta x$$

cioè che le distanze spaziali sono invarianti nel passaggio da un sistema inerziale all'altro. Così non è per le trasformate di Lorentz. Infatti

$$\Delta t' = \gamma \Delta t - u \Delta x = \gamma \Delta t - u \Delta x \quad (5.1)$$

$$\Delta x' = \gamma \Delta x - u \Delta t = \gamma \Delta x - u \Delta t$$

da cui si ricava che

$$\text{se } \Delta x = 0 \Rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \quad (5.2)$$

e

$$\text{se } \Delta t = 0 \Rightarrow \Delta x' = \gamma \Delta x \quad (5.3)$$

cioè la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze; cioè due risultati che abbiamo ottenuto per via diretta.

Operando direttamente sulle trasformate di L.F. (4.2) si ottiene

$$\begin{aligned} t'^2 - x'^2 &= \gamma^2 (t - ux)^2 - \gamma^2 (x - ut)^2 = \\ &= \gamma^2 \left[t^2 + u^2 x^2 - x^2 + u^2 t^2 \right] = \\ &= \gamma^2 (1 - u^2) (t^2 - x^2) = t^2 - x^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Per le trasformate di L.-F. i tempi e le lunghezze non sono assoluti (o invarianti) ma lo è la grandezza $t^2 - x^2$.

Per il particolare sistema di riferimento nel quale i due eventi hanno la stessa coordinata spaziale x , il valore di tale invariante è quello che si chiama *tempo proprio* e che, all'inizio, abbiamo indicato con τ :

$$t^2 - x^2 = \tau^2. \quad (5.5)$$

Se in un sistema di riferimento la separazione spaziale di due eventi è Δx e quella temporale Δt , ciò che non cambia nel passaggio ad un altro sistema di riferimento è l'espressione

$$\Delta t^2 - \Delta x^2 \quad (5.6)$$

Ledo Stefanini
Università di Mantova – Pavia