Definizione e concetto di limite

Luca Lussardi

Università Cattolica del Sacro Cuore

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Introduzione

La nozione di limite di funzione oggi sta alla base dell'intera analisi matematica;

Introduzione

La nozione di limite di funzione oggi sta alla base dell'intera analisi matematica; nonostante questo, essa arriva sul panorama della matematica molto più tardi rispetto al calcolo delle derivate e degli integrali:

Introduzione

La nozione di limite di funzione oggi sta alla base dell'intera analisi matematica; nonostante questo, essa arriva sul panorama della matematica molto più tardi rispetto al calcolo delle derivate e degli integrali: infatti, già Newton e Leibniz nel Settecento conoscevano il calcolo infinitesimale, mentre la definizione di limite che si mette a fondamento di esso verrà data solo nel tardo Ottocento.

Introduzione

La nozione di limite di funzione oggi sta alla base dell'intera analisi matematica; nonostante questo, essa arriva sul panorama della matematica molto più tardi rispetto al calcolo delle derivate e degli integrali: infatti, già Newton e Leibniz nel Settecento conoscevano il calcolo infinitesimale, mentre la definizione di limite che si mette a fondamento di esso verrà data solo nel tardo Ottocento. Il caso più intuitivo dal quale iniziamo è il caso di limite di successione,

Introduzione

La nozione di limite di funzione oggi sta alla base dell'intera analisi matematica; nonostante questo, essa arriva sul panorama della matematica molto più tardi rispetto al calcolo delle derivate e degli integrali: infatti, già Newton e Leibniz nel Settecento conoscevano il calcolo infinitesimale, mentre la definizione di limite che si mette a fondamento di esso verrà data solo nel tardo Ottocento. Il caso più intuitivo dal quale iniziamo è il caso di limite di successione, ma prima ricordiamo cosa è una successione reale.

Limite di successioni reali

Una *successione reale* è una funzione $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$;

Limite di successioni reali

Una *successione reale* è una funzione $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; si è soliti usare la notazione

$$x_h := x(h), \quad h \in \mathbb{N}.$$

Limite di successioni reali

Una *successione reale* è una funzione $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; si è soliti usare la notazione

$$x_h := x(h), \quad h \in \mathbb{N}.$$

Ad esempio, $x_h := h^2$ è una successione reale:

Limite di successioni reali

Una *successione reale* è una funzione $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; si è soliti usare la notazione

$$x_h := x(h), \quad h \in \mathbb{N}.$$

Ad esempio, $x_h := h^2$ è una successione reale:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 9, \quad \ldots$$

Limite di successioni reali

Una *successione reale* è una funzione $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; si è soliti usare la notazione

$$x_h := x(h), \quad h \in \mathbb{N}.$$

Ad esempio, $x_h := h^2$ è una successione reale:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 9, \quad \ldots$$

Alcune volte capita che una successione non abbia una definizione per i primi valori di h,

Limite di successioni reali

Una *successione reale* è una funzione $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; si è soliti usare la notazione

$$x_h := x(h), \quad h \in \mathbb{N}.$$

Ad esempio, $x_h := h^2$ è una successione reale:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 9, \quad \ldots$$

Alcune volte capita che una successione non abbia una definizione per i primi valori di h, ma non è un problema:

Limite di successioni reali

Una *successione reale* è una funzione $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; si è soliti usare la notazione

$$x_h := x(h), \quad h \in \mathbb{N}.$$

Ad esempio, $x_h := h^2$ è una successione reale:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 9, \quad \ldots$$

Alcune volte capita che una successione non abbia una definizione per i primi valori di h, ma non è un problema: ad esempio, la successione

$$x_h := \frac{1}{h}$$

Limite di successioni reali

Una *successione reale* è una funzione $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; si è soliti usare la notazione

$$x_h := x(h), \quad h \in \mathbb{N}.$$

Ad esempio, $x_h := h^2$ è una successione reale:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 9, \quad \ldots$$

Alcune volte capita che una successione non abbia una definizione per i primi valori di h, ma non è un problema: ad esempio, la successione

$$x_h := \frac{1}{h}$$

è definita solo se $h > 0$,

Limite di successioni reali

Una *successione reale* è una funzione $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; si è soliti usare la notazione

$$x_h := x(h), \quad h \in \mathbb{N}.$$

Ad esempio, $x_h := h^2$ è una successione reale:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 9, \quad \ldots$$

Alcune volte capita che una successione non abbia una definizione per i primi valori di h, ma non è un problema: ad esempio, la successione

$$x_h := \frac{1}{h}$$

è definita solo se $h > 0$, ma possiamo ridefinire la "stessa" successione ponendo, ad esempio,

$$x_h := \begin{cases} \dfrac{1}{h} & h > 0 \\[2ex] 0 & h = 0 \end{cases}$$

L'idea di limite di successione vuole essere quella di cogliere il comportamento della successione data quando h diventa "grande":

L'idea di limite di successione vuole essere quella di cogliere il comportamento della successione data quando h diventa "grande": ad esempio, nel caso della successione $x_h = h^2$ se uno tabula i valori assunti ottiene:

h	x_h
0	0
1	1
2	4
3	9
9	81
25	625
40	1600

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

L'idea di limite di successione vuole essere quella di cogliere il comportamento della successione data quando h diventa "grande": ad esempio, nel caso della successione $x_h = h^2$ se uno tabula i valori assunti ottiene:

h	x_h
0	0
1	1
2	4
3	9
9	81
25	625
40	1600

e come si può notare in questo caso i valori assunti tendono a diventare sempre più grandi, superando, prima o poi, ogni numero positivo arbitrariamente fissato.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Invece, nel caso della successione

$$x_h = 1 + \frac{1}{h}$$

se uno tabula i valori assunti ottiene:

h	x_h
1	2
2	1.5
4	1.25
10	1.01
100	1.001
1000	1.0001
10000	1.00001

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Invece, nel caso della successione

$$x_h = 1 + \frac{1}{h}$$

se uno tabula i valori assunti ottiene:

h	x_h
1	2
2	1.5
4	1.25
10	1.01
100	1.001
1000	1.0001
10000	1.00001

Sembra dunque che in questo caso i valori assunti tendono a diventare sempre più prossimi a 1, differendo da esso, prima o poi, meno di ogni numero positivo arbitrariamente fissato.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Formalizziamo le osservazioni precedenti con la seguente definizione:

Formalizziamo le osservazioni precedenti con la seguente definizione:

DEFINIZIONE: *Sia x_h una successione reale e sia $\ell \in \mathbb{R}$.*

Formalizziamo le osservazioni precedenti con la seguente definizione:

DEFINIZIONE: *Sia x_h una successione reale e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Diciamo che ℓ è limite di x_h se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N} > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha*

$$|x_h - \ell| < \varepsilon.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Formalizziamo le osservazioni precedenti con la seguente definizione:

DEFINIZIONE: *Sia x_h una successione reale e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Diciamo che ℓ è limite di x_h se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N} > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha*

$$|x_h - \ell| < \varepsilon.$$

Diciamo che $+\infty$ è limite di x_h se per ogni $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N} > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha

$$x_h > M.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Formalizziamo le osservazioni precedenti con la seguente definizione:

DEFINIZIONE: *Sia x_h una successione reale e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Diciamo che ℓ è limite di x_h se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N} > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha*

$$|x_h - \ell| < \varepsilon.$$

Diciamo che $+\infty$ è limite di x_h se per ogni $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N} > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha

$$x_h > M.$$

Sia x_h una successione reale.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Formalizziamo le osservazioni precedenti con la seguente definizione:

DEFINIZIONE: *Sia x_h una successione reale e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Diciamo che ℓ è limite di x_h se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N} > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha*

$$|x_h - \ell| < \varepsilon.$$

Diciamo che $+\infty$ è limite di x_h se per ogni $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N} > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha

$$x_h > M.$$

Sia x_h una successione reale. Diciamo che $-\infty$ è limite di x_h se per ogni $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N} > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha

$$x_h < -M.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Formalizziamo le osservazioni precedenti con la seguente definizione:

DEFINIZIONE: *Sia x_h una successione reale e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Diciamo che ℓ è limite di x_h se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N} > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha*

$$|x_h - \ell| < \varepsilon.$$

Diciamo che $+\infty$ è limite di x_h se per ogni $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N} > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha

$$x_h > M.$$

Sia x_h una successione reale. Diciamo che $-\infty$ è limite di x_h se per ogni $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N} > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha

$$x_h < -M.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Analizziamo l'esempio della successione $x_h = h^2$;

Analizziamo l'esempio della successione $x_h = h^2$; allora $+\infty$ è limite di x_h.

Analizziamo l'esempio della successione $x_h = h^2$; allora $+\infty$ è limite di x_h. Infatti, posto $M > 0$ sia ν il primo intero tale che

$$\nu^2 > M.$$

Analizziamo l'esempio della successione $x_h = h^2$; allora $+\infty$ è limite di x_h. Infatti, posto $M > 0$ sia ν il primo intero tale che

$$\nu^2 > M.$$

Dunque, per ogni $h > \nu$ si ha

$$x_h = h^2 > \nu^2 > M.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Analizziamo l'esempio della successione $x_h = h^2$; allora $+\infty$ è limite di x_h. Infatti, posto $M > 0$ sia ν il primo intero tale che

$$\nu^2 > M.$$

Dunque, per ogni $h > \nu$ si ha

$$x_h = h^2 > \nu^2 > M.$$

Analizziamo invece l'esempio della successione $x_h = 1 + \dfrac{1}{h}$;

Analizziamo l'esempio della successione $x_h = h^2$; allora $+\infty$ è limite di x_h. Infatti, posto $M > 0$ sia ν il primo intero tale che

$$\nu^2 > M.$$

Dunque, per ogni $h > \nu$ si ha

$$x_h = h^2 > \nu^2 > M.$$

Analizziamo invece l'esempio della successione $x_h = 1 + \dfrac{1}{h}$; allora 1 è limite di x_h.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Analizziamo l'esempio della successione $x_h = h^2$; allora $+\infty$ è limite di x_h. Infatti, posto $M > 0$ sia ν il primo intero tale che

$$\nu^2 > M.$$

Dunque, per ogni $h > \nu$ si ha

$$x_h = h^2 > \nu^2 > M.$$

Analizziamo invece l'esempio della successione $x_h = 1 + \dfrac{1}{h}$; allora 1 è limite di x_h. Infatti, posto $\varepsilon > 0$ sia ν il primo intero tale che

$$\nu > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Analizziamo l'esempio della successione $x_h = h^2$; allora $+\infty$ è limite di x_h. Infatti, posto $M > 0$ sia ν il primo intero tale che

$$\nu^2 > M.$$

Dunque, per ogni $h > \nu$ si ha

$$x_h = h^2 > \nu^2 > M.$$

Analizziamo invece l'esempio della successione $x_h = 1 + \dfrac{1}{h}$; allora 1 è limite di x_h. Infatti, posto $\varepsilon > 0$ sia ν il primo intero tale che

$$\nu > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dunque, per ogni $h > \nu$ si ha

$$|x_h - 1| = \left|1 + \frac{1}{h} - 1\right| = \frac{1}{h} < \frac{1}{\nu} < \varepsilon.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Se una successione reale ammette limite allora esso è necessariamente unico:

Se una successione reale ammette limite allora esso è necessariamente unico: mostriamolo ad esempio nel caso di limite finito.

Se una successione reale ammette limite allora esso è necessariamente unico: mostriamolo ad esempio nel caso di limite finito. Sia x_h una successione reale e supponiamo per assurdo che $\ell_1 \neq \ell_2$ siano due limiti di x_h

Se una successione reale ammette limite allora esso è necessariamente unico: mostriamolo ad esempio nel caso di limite finito. Sia x_h una successione reale e supponiamo per assurdo che $\ell_1 \neq \ell_2$ siano due limiti di x_h e sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$2\varepsilon < |\ell_1 - \ell_2|.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Se una successione reale ammette limite allora esso è necessariamente unico: mostriamolo ad esempio nel caso di limite finito. Sia x_h una successione reale e supponiamo per assurdo che $\ell_1 \neq \ell_2$ siano due limiti di x_h e sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$2\varepsilon < |\ell_1 - \ell_2|.$$

Per definizione, esiste $\nu_1 > 0$ tale che per ogni $h > \nu_1$ si ha

$$|x_h - \ell_1| < \varepsilon.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Se una successione reale ammette limite allora esso è necessariamente unico: mostriamolo ad esempio nel caso di limite finito. Sia x_h una successione reale e supponiamo per assurdo che $\ell_1 \neq \ell_2$ siano due limiti di x_h e sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$2\varepsilon < |\ell_1 - \ell_2|.$$

Per definizione, esiste $\nu_1 > 0$ tale che per ogni $h > \nu_1$ si ha

$$|x_h - \ell_1| < \varepsilon.$$

D'altra parte, per lo stesso $\varepsilon > 0$ esiste anche $\nu_2 > 0$ tale che per ogni $h > \nu_2$ si ha

$$|x_h - \ell_2| < \varepsilon.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Se una successione reale ammette limite allora esso è necessariamente unico: mostriamolo ad esempio nel caso di limite finito. Sia x_h una successione reale e supponiamo per assurdo che $\ell_1 \neq \ell_2$ siano due limiti di x_h e sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$2\varepsilon < |\ell_1 - \ell_2|.$$

Per definizione, esiste $\nu_1 > 0$ tale che per ogni $h > \nu_1$ si ha

$$|x_h - \ell_1| < \varepsilon.$$

D'altra parte, per lo stesso $\varepsilon > 0$ esiste anche $\nu_2 > 0$ tale che per ogni $h > \nu_2$ si ha

$$|x_h - \ell_2| < \varepsilon.$$

Ma allora, se $h > \max\{\nu_1, \nu_2\}$ si trova che

$$2\varepsilon < |\ell_1 - \ell_2| \leq |x_h - \ell_1| + |x_h - \ell_2| < 2\varepsilon$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Se una successione reale ammette limite allora esso è necessariamente unico: mostriamolo ad esempio nel caso di limite finito. Sia x_h una successione reale e supponiamo per assurdo che $\ell_1 \neq \ell_2$ siano due limiti di x_h e sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$2\varepsilon < |\ell_1 - \ell_2|.$$

Per definizione, esiste $\nu_1 > 0$ tale che per ogni $h > \nu_1$ si ha

$$|x_h - \ell_1| < \varepsilon.$$

D'altra parte, per lo stesso $\varepsilon > 0$ esiste anche $\nu_2 > 0$ tale che per ogni $h > \nu_2$ si ha

$$|x_h - \ell_2| < \varepsilon.$$

Ma allora, se $h > \max\{\nu_1, \nu_2\}$ si trova che

$$2\varepsilon < |\ell_1 - \ell_2| \leq |x_h - \ell_1| + |x_h - \ell_2| < 2\varepsilon$$

che è una contraddizione.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Grazie al teorema di unicità del limite appena dimostrato possiamo fissare una notazione per esso:

Grazie al teorema di unicità del limite appena dimostrato possiamo fissare una notazione per esso: se x_h è una successione reale che ha limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ allora scriviamo anche

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = \ell.$$

Grazie al teorema di unicità del limite appena dimostrato possiamo fissare una notazione per esso: se x_h è una successione reale che ha limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ allora scriviamo anche

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = \ell.$$

Una successione x_h si dice:

Grazie al teorema di unicità del limite appena dimostrato possiamo fissare una notazione per esso: se x_h è una successione reale che ha limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ allora scriviamo anche

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = \ell.$$

Una successione x_h si dice:

- convergente se esiste finito il limite di x_h;

Grazie al teorema di unicità del limite appena dimostrato possiamo fissare una notazione per esso: se x_h è una successione reale che ha limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ allora scriviamo anche

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = \ell.$$

Una successione x_h si dice:

- convergente se esiste finito il limite di x_h;
- positivamente divergente se esiste il limite ed è $+\infty$;

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Grazie al teorema di unicità del limite appena dimostrato possiamo fissare una notazione per esso: se x_h è una successione reale che ha limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ allora scriviamo anche

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = \ell.$$

Una successione x_h si dice:

- convergente se esiste finito il limite di x_h;
- positivamente divergente se esiste il limite ed è $+\infty$;
- negativamente divergente se esiste il limite ed è $-\infty$;

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Grazie al teorema di unicità del limite appena dimostrato possiamo fissare una notazione per esso: se x_h è una successione reale che ha limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ allora scriviamo anche

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = \ell.$$

Una successione x_h si dice:

- convergente se esiste finito il limite di x_h;
- positivamente divergente se esiste il limite ed è $+\infty$;
- negativamente divergente se esiste il limite ed è $-\infty$;
- indeterminata se non esiste il limite di x_h.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Facciamo ora un esempio di successione indeterminata.

Facciamo ora un esempio di successione indeterminata. Sia x_h la successione reale data da

$$x_h = (-1)^h$$

Facciamo ora un esempio di successione indeterminata. Sia x_h la successione reale data da

$$x_h = (-1)^h$$

quindi, per esteso

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad \ldots$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Facciamo ora un esempio di successione indeterminata. Sia x_h la successione reale data da

$$x_h = (-1)^h$$

quindi, per esteso

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad \ldots$$

cioé la successione che alterna 1 e -1.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Facciamo ora un esempio di successione indeterminata. Sia x_h la successione reale data da

$$x_h = (-1)^h$$

quindi, per esteso

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad \ldots$$

cioé la successione che alterna 1 e -1. Allora, x_h non ha limite.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Facciamo ora un esempio di successione indeterminata. Sia x_h la successione reale data da

$$x_h = (-1)^h$$

quindi, per esteso

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad \ldots$$

cioé la successione che alterna 1 e -1. Allora, x_h non ha limite. Infatti, prima di tutto è immediato vedere che x_h non può ammettere limite $+\infty$ o $-\infty$.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Facciamo ora un esempio di successione indeterminata. Sia x_h la successione reale data da

$$x_h = (-1)^h$$

quindi, per esteso

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad \ldots$$

cioé la successione che alterna 1 e -1. Allora, x_h non ha limite. Infatti, prima di tutto è immediato vedere che x_h non può ammettere limite $+\infty$ o $-\infty$. Invero, se così fosse si avrebbe

$$\lim_{h \to +\infty} |x_h| = +\infty$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Facciamo ora un esempio di successione indeterminata. Sia x_h la successione reale data da

$$x_h = (-1)^h$$

quindi, per esteso

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad \ldots$$

cioé la successione che alterna 1 e -1. Allora, x_h non ha limite. Infatti, prima di tutto è immediato vedere che x_h non può ammettere limite $+\infty$ o $-\infty$. Invero, se così fosse si avrebbe

$$\lim_{h \to +\infty} |x_h| = +\infty$$

mentre risulta

$$\lim_{h \to +\infty} |x_h| = 1.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Facciamo ora vedere che non può neanche essere

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = \ell \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Facciamo ora vedere che non può neanche essere

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = \ell \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ragioniamo per assurdo supponendo vera la (1):

Facciamo ora vedere che non può neanche essere

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = \ell \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ragioniamo per assurdo supponendo vera la (1): per ogni $\varepsilon \in (0, 1)$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha

$$|x_h - \ell| < \varepsilon.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Facciamo ora vedere che non può neanche essere

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = \ell \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ragioniamo per assurdo supponendo vera la (1): per ogni $\varepsilon \in (0, 1)$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha

$$|x_h - \ell| < \varepsilon.$$

Ma allora per ogni $h > \nu$ si ha anche

$$2 = |(-1)^{h+1} - (-1)^h| = |x_{h+1} - x_h| \leq |x_{h+1} - \ell| + |x_h - \ell| < 2\varepsilon$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Facciamo ora vedere che non può neanche essere

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = \ell \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ragioniamo per assurdo supponendo vera la (1): per ogni $\varepsilon \in (0, 1)$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha

$$|x_h - \ell| < \varepsilon.$$

Ma allora per ogni $h > \nu$ si ha anche

$$2 = |(-1)^{h+1} - (-1)^h| = |x_{h+1} - x_h| \leq |x_{h+1} - \ell| + |x_h - \ell| < 2\varepsilon$$

che contraddice il fatto che $0 < \varepsilon < 1$.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Dalle successioni reali alle funzioni di variabile reale

Adattiamo ora la definizione di limite alle funzioni di variabile reale;

Dalle successioni reali alle funzioni di variabile reale

Adattiamo ora la definizione di limite alle funzioni di variabile reale; ci serve prima un po' di topologia di $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Dalle successioni reali alle funzioni di variabile reale

Adattiamo ora la definizione di limite alle funzioni di variabile reale; ci serve prima un po' di topologia di $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}$;

Dalle successioni reali alle funzioni di variabile reale

Adattiamo ora la definizione di limite alle funzioni di variabile reale; ci serve prima un po' di topologia di $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}$; diciamo che:

- U è un intorno di $x \in \mathbb{R}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $(x - \delta, x + \delta) \subset U$;

Dalle successioni reali alle funzioni di variabile reale

Adattiamo ora la definizione di limite alle funzioni di variabile reale; ci serve prima un po' di topologia di $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}$; diciamo che:

- U è un intorno di $x \in \mathbb{R}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $(x - \delta, x + \delta) \subset U$;
- U è un intorno di $+\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(M, +\infty) \subset U$;

Dalle successioni reali alle funzioni di variabile reale

Adattiamo ora la definizione di limite alle funzioni di variabile reale; ci serve prima un po' di topologia di $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}$; diciamo che:

- U è un intorno di $x \in \mathbb{R}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $(x - \delta, x + \delta) \subset U$;
- U è un intorno di $+\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(M, +\infty) \subset U$;
- U è un intorno di $-\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(-\infty, M) \subset U$.

Dalle successioni reali alle funzioni di variabile reale

Adattiamo ora la definizione di limite alle funzioni di variabile reale; ci serve prima un po' di topologia di $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}$; diciamo che:

- U è un intorno di $x \in \mathbb{R}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $(x - \delta, x + \delta) \subset U$;
- U è un intorno di $+\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(M, +\infty) \subset U$;
- U è un intorno di $-\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(-\infty, M) \subset U$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$;

Dalle successioni reali alle funzioni di variabile reale

Adattiamo ora la definizione di limite alle funzioni di variabile reale; ci serve prima un po' di topologia di $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}$; diciamo che:

- U è un intorno di $x \in \mathbb{R}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $(x - \delta, x + \delta) \subset U$;
- U è un intorno di $+\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(M, +\infty) \subset U$;
- U è un intorno di $-\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(-\infty, M) \subset U$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$; diciamo che x è punto di accumulazione per E se per ogni U intorno di x si ha

$$U \cap (E \setminus \{x\}) \neq \varnothing.$$

Dalle successioni reali alle funzioni di variabile reale

Adattiamo ora la definizione di limite alle funzioni di variabile reale; ci serve prima un po' di topologia di $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}$; diciamo che:

- U è un intorno di $x \in \mathbb{R}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $(x - \delta, x + \delta) \subset U$;
- U è un intorno di $+\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(M, +\infty) \subset U$;
- U è un intorno di $-\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(-\infty, M) \subset U$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$; diciamo che x è punto di accumulazione per E se per ogni U intorno di x si ha

$$U \cap (E \setminus \{x\}) \neq \varnothing.$$

Ad esempio, se $E = (0, 1)$,

Dalle successioni reali alle funzioni di variabile reale

Adattiamo ora la definizione di limite alle funzioni di variabile reale; ci serve prima un po' di topologia di $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}$; diciamo che:

- U è un intorno di $x \in \mathbb{R}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $(x - \delta, x + \delta) \subset U$;
- U è un intorno di $+\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(M, +\infty) \subset U$;
- U è un intorno di $-\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(-\infty, M) \subset U$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$; diciamo che x è punto di accumulazione per E se per ogni U intorno di x si ha

$$U \cap (E \setminus \{x\}) \neq \varnothing.$$

Ad esempio, se $E = (0, 1)$, allora $[0, 1]$ è l'insieme dei punti di accumulazione per E;

Dalle successioni reali alle funzioni di variabile reale

Adattiamo ora la definizione di limite alle funzioni di variabile reale; ci serve prima un po' di topologia di $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}$; diciamo che:

- U è un intorno di $x \in \mathbb{R}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $(x - \delta, x + \delta) \subset U$;
- U è un intorno di $+\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(M, +\infty) \subset U$;
- U è un intorno di $-\infty$ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $(-\infty, M) \subset U$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$; diciamo che x è punto di accumulazione per E se per ogni U intorno di x si ha

$$U \cap (E \setminus \{x\}) \neq \varnothing.$$

Ad esempio, se $E = (0, 1)$, allora $[0, 1]$ è l'insieme dei punti di accumulazione per E; se invece fosse $E = (0, 1) \cup \{2\}$ allora $x = 2$ non sarebbe punto di accumulazione per E.

Vediamo quindi come trasportare la nozione di limite su una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$, con $E \subseteq \mathbb{R}$.

Vediamo quindi come trasportare la nozione di limite su una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$, con $E \subseteq \mathbb{R}$. Anzitutto, l'impostazione classica prevede che si considerino i punti di accumulazione per E,

Vediamo quindi come trasportare la nozione di limite su una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$, con $E \subseteq \mathbb{R}$. Anzitutto, l'impostazione classica prevede che si considerino i punti di accumulazione per E, dunque fissiamo $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ punto di accumulazione per E.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Vediamo quindi come trasportare la nozione di limite su una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$, con $E \subseteq \mathbb{R}$. Anzitutto, l'impostazione classica prevede che si considerino i punti di accumulazione per E, dunque fissiamo $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ punto di accumulazione per E. Diciamo che $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è limite per f quando x tende a x_0 se

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Vediamo quindi come trasportare la nozione di limite su una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$, con $E \subseteq \mathbb{R}$. Anzitutto, l'impostazione classica prevede che si considerino i punti di accumulazione per E, dunque fissiamo $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ punto di accumulazione per E. Diciamo che $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è limite per f quando x tende a x_0 se

$$\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \ell$$

per ogni successione reale x_h che assume valori in $E \setminus \{x_0\}$ e tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Vediamo quindi come trasportare la nozione di limite su una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$, con $E \subseteq \mathbb{R}$. Anzitutto, l'impostazione classica prevede che si considerino i punti di accumulazione per E, dunque fissiamo $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ punto di accumulazione per E. Diciamo che $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è limite per f quando x tende a x_0 se

$$\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \ell$$

per ogni successione reale x_h che assume valori in $E \setminus \{x_0\}$ e tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0.$$

Notiamo che la richiesta che x_0 sia di accumulazione serve per garantire che esiste almeno una successione reale x_h a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

L'unicità del limite di successione si trasporta quindi anche sulle funzioni,

L'unicità del limite di successione si trasporta quindi anche sulle funzioni, per cui se f ha limite ℓ per x che tende a x_0 scriviamo anche

L'unicità del limite di successione si trasporta quindi anche sulle funzioni, per cui se f ha limite ℓ per x che tende a x_0 scriviamo anche

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

essendo ℓ unico.

L'unicità del limite di successione si trasporta quindi anche sulle funzioni, per cui se f ha limite ℓ per x che tende a x_0 scriviamo anche

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

essendo ℓ unico. Ad esempio, la funzione $f\colon (0, +\infty)$ data da $f(x) = \log x$ ha limite $+\infty$ quando x tende a $+\infty$ siccome si ha

$$\lim_{h \to +\infty} \log(x_h) = +\infty$$

per ogni successione reale x_h positiva tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = +\infty,$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

L'unicità del limite di successione si trasporta quindi anche sulle funzioni, per cui se f ha limite ℓ per x che tende a x_0 scriviamo anche

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

essendo ℓ unico. Ad esempio, la funzione $f\colon (0, +\infty)$ data da $f(x) = \log x$ ha limite $+\infty$ quando x tende a $+\infty$ siccome si ha

$$\lim_{h \to +\infty} \log(x_h) = +\infty$$

per ogni successione reale x_h positiva tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = +\infty,$$

o ancora ha limite $-\infty$ quando x tende a 0 siccome si ha

$$\lim_{h \to +\infty} \log(x_h) = -\infty$$

per ogni successione reale x_h positiva tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = 0.$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Mostriamo per concludere la caratterizzazione del limite di funzioni in termini di intorni:

Mostriamo per concludere la caratterizzazione del limite di funzioni in termini di intorni: tale risultato permette di definire il limite di funzione senza introdurre prima il limite di successioni.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Mostriamo per concludere la caratterizzazione del limite di funzioni in termini di intorni: tale risultato permette di definire il limite di funzione senza introdurre prima il limite di successioni.

TEOREMA: *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}$, *sia* $f : E \to \mathbb{R}$, *sia* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *di accumulazione per* E *e sia* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. *Allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se e solo se per ogni intorno U *di* ℓ *esiste un intorno* V *di* x_0 *tale che per ogni* $x \in V \setminus \{x_0\}$ *si ha* $f(x) \subset U$.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Dimostrazione: Trattiamo, per semplicità, solo il caso $\ell \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione: Trattiamo, per semplicità, solo il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Dimostrazione: Trattiamo, per semplicità, solo il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Senza perdere di generalità possiamo supporre $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione: Trattiamo, per semplicità, solo il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Senza perdere di generalità possiamo supporre $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Supponiamo per assurdo che per ogni intorno V di x_0 esiste $\bar{x} \in V \setminus \{x_0\}$ tale che $f(\bar{x}) \notin U$.

Dimostrazione: Trattiamo, per semplicità, solo il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Senza perdere di generalità possiamo supporre $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Supponiamo per assurdo che per ogni intorno V di x_0 esiste $\bar{x} \in V \setminus \{x_0\}$ tale che $f(\bar{x}) \notin U$. Prendiamo la famiglia di intorni

$$V_h = \left(x_0 - \frac{1}{h}, x_0 + \frac{1}{h} \right).$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Dimostrazione: Trattiamo, per semplicità, solo il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Senza perdere di generalità possiamo supporre $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Supponiamo per assurdo che per ogni intorno V di x_0 esiste $\bar{x} \in V \setminus \{x_0\}$ tale che $f(\bar{x}) \notin U$. Prendiamo la famiglia di intorni

$$V_h = \left(x_0 - \frac{1}{h}, x_0 + \frac{1}{h} \right).$$

Allora per ogni $h > 0$ esiste x_h a valori in $E \cap (V_h \setminus \{x_0\})$ tale che $f(x_h) \notin U$,

Dimostrazione: Trattiamo, per semplicità, solo il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Senza perdere di generalità possiamo supporre $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Supponiamo per assurdo che per ogni intorno V di x_0 esiste $\bar{x} \in V \setminus \{x_0\}$ tale che $f(\bar{x}) \notin U$. Prendiamo la famiglia di intorni

$$V_h = \left(x_0 - \frac{1}{h}, x_0 + \frac{1}{h} \right).$$

Allora per ogni $h > 0$ esiste x_h a valori in $E \cap (V_h \setminus \{x_0\})$ tale che $f(x_h) \notin U$, che vuol dire $|f(x_h) - \ell| > \varepsilon$.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Dimostrazione: Trattiamo, per semplicità, solo il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Senza perdere di generalità possiamo supporre $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Supponiamo per assurdo che per ogni intorno V di x_0 esiste $\bar{x} \in V \setminus \{x_0\}$ tale che $f(\bar{x}) \notin U$. Prendiamo la famiglia di intorni

$$V_h = \left(x_0 - \frac{1}{h}, x_0 + \frac{1}{h} \right).$$

Allora per ogni $h > 0$ esiste x_h a valori in $E \cap (V_h \setminus \{x_0\})$ tale che $f(x_h) \notin U$, che vuol dire $|f(x_h) - \ell| > \varepsilon$. Ne segue che, per costruzione

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Dimostrazione: Trattiamo, per semplicità, solo il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Senza perdere di generalità possiamo supporre $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Supponiamo per assurdo che per ogni intorno V di x_0 esiste $\bar{x} \in V \setminus \{x_0\}$ tale che $f(\bar{x}) \notin U$. Prendiamo la famiglia di intorni

$$V_h = \left(x_0 - \frac{1}{h}, x_0 + \frac{1}{h} \right).$$

Allora per ogni $h > 0$ esiste x_h a valori in $E \cap (V_h \setminus \{x_0\})$ tale che $f(x_h) \notin U$, che vuol dire $|f(x_h) - \ell| > \varepsilon$. Ne segue che, per costruzione

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0$$

ma non è vero che

$$\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \ell$$

dal momento che $|f(x_h) - \ell| > \varepsilon$.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Viceversa, supponiamo che per ogni intorno U di ℓ esiste un intorno V di x_0 tale che per ogni $x \in V \setminus \{x_0\}$ si abbia $f(x) \subset U$,

Viceversa, supponiamo che per ogni intorno U di ℓ esiste un intorno V di x_0 tale che per ogni $x \in V \setminus \{x_0\}$ si abbia $f(x) \subset U$, e sia x_h una successione reale a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0.$$

Viceversa, supponiamo che per ogni intorno U di ℓ esiste un intorno V di x_0 tale che per ogni $x \in V \setminus \{x_0\}$ si abbia $f(x) \subset U$, e sia x_h una successione reale a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0.$$

Scegliamo $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Viceversa, supponiamo che per ogni intorno U di ℓ esiste un intorno V di x_0 tale che per ogni $x \in V \setminus \{x_0\}$ si abbia $f(x) \subset U$, e sia x_h una successione reale a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0.$$

Scegliamo $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Dal momento che V è intorno di x_0

Viceversa, supponiamo che per ogni intorno U di ℓ esiste un intorno V di x_0 tale che per ogni $x \in V \setminus \{x_0\}$ si abbia $f(x) \subset U$, e sia x_h una successione reale a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0.$$

Scegliamo $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Dal momento che V è intorno di x_0 e dal momento che x_h è a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0$$

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Viceversa, supponiamo che per ogni intorno U di ℓ esiste un intorno V di x_0 tale che per ogni $x \in V \setminus \{x_0\}$ si abbia $f(x) \subset U$, e sia x_h una successione reale a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0.$$

Scegliamo $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Dal momento che V è intorno di x_0 e dal momento che x_h è a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0$$

esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha $x_h \in V \setminus \{x_0\}$,

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Viceversa, supponiamo che per ogni intorno U di ℓ esiste un intorno V di x_0 tale che per ogni $x \in V \setminus \{x_0\}$ si abbia $f(x) \subset U$, e sia x_h una successione reale a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0.$$

Scegliamo $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Dal momento che V è intorno di x_0 e dal momento che x_h è a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0$$

esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha $x_h \in V \setminus \{x_0\}$, e dunque si ha $f(x_h) \subset U$,

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Viceversa, supponiamo che per ogni intorno U di ℓ esiste un intorno V di x_0 tale che per ogni $x \in V \setminus \{x_0\}$ si abbia $f(x) \subset U$, e sia x_h una successione reale a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0.$$

Scegliamo $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Dal momento che V è intorno di x_0 e dal momento che x_h è a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0$$

esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha $x_h \in V \setminus \{x_0\}$, e dunque si ha $f(x_h) \subset U$, che vuol dire $|f(x_h) - \ell| < \varepsilon$.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Viceversa, supponiamo che per ogni intorno U di ℓ esiste un intorno V di x_0 tale che per ogni $x \in V \setminus \{x_0\}$ si abbia $f(x) \subset U$, e sia x_h una successione reale a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e tale che

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0.$$

Scegliamo $U = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Dal momento che V è intorno di x_0 e dal momento che x_h è a valori in $E \setminus \{x_0\}$ e

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_0$$

esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $h > \nu$ si ha $x_h \in V \setminus \{x_0\}$, e dunque si ha $f(x_h) \subset U$, che vuol dire $|f(x_h) - \ell| < \varepsilon$. Ciò significa che

$$\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \ell$$

che è la tesi.

Luca Lussardi - ©2012–2013 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA