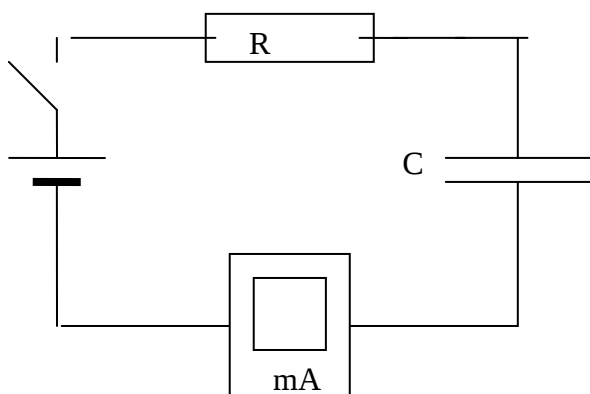


UN'INTRODUZIONE AI CONDENSATORI

Ledo Stefanini

1. CARICA DEL CONDENSATORE

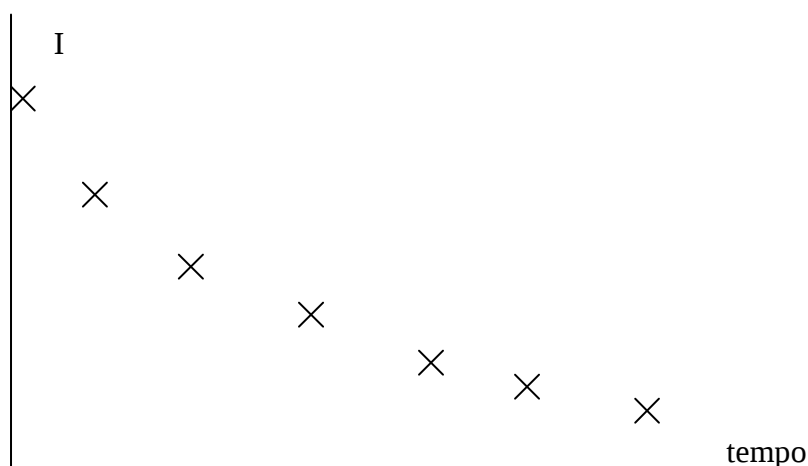
Realizziamo il seguente circuito



Occorre un condensatore di grande capacità) diciamo qualche millifarad, 16 V), un resistore (10 k Ω), un milliamperometro, una batteria da 9 – 12 V.

Quando si chiude l'interruttore si osserva che il milliamperometro segna una corrente che va progressivamente diminuendo.

I dati possono essere raccolti leggendo il milliamperometro ad es. ogni 15 -20 secondi.



Le cose da osservare sono:

1. il valore iniziale della corrente è quello previsto dalla legge di Ohm:

$$I_0 = \frac{V_0}{R};$$

2. Esiste un tempo di dimezzamento dell'intensità di corrente; cioè il tempo richiesto perché la corrente si riduca alla metà è lo stesso, qualunque sia il valore assunto come iniziale:

I_0	=>	0
$I_0/2$	=>	T
$I_0/4$	=>	2T
$I_0/8$	=>	3T
$I_0/16$	=>	4T

Le stesse osservazioni si possono esprimere con una funzione:

$$\frac{I}{I_0} = 2^{-\frac{t}{T}} \quad 2$$

Naturalmente, la scelta della base della potenza è del tutto arbitraria. In luogo del tempo di dimezzamento, avremmo potuto prendere un tempo di riduzione a un terzo, o a un quarto, o qualsiasi altro numero. La scelta più elegante è quella della base dei logaritmi (il numero e di Nepero), cioè scrivere la (2) come

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\frac{t}{T} \ln 2} \quad 3$$

Converrà allora non fare più riferimento al tempo di dimezzamento T , ma ad un'altra *costante di tempo*

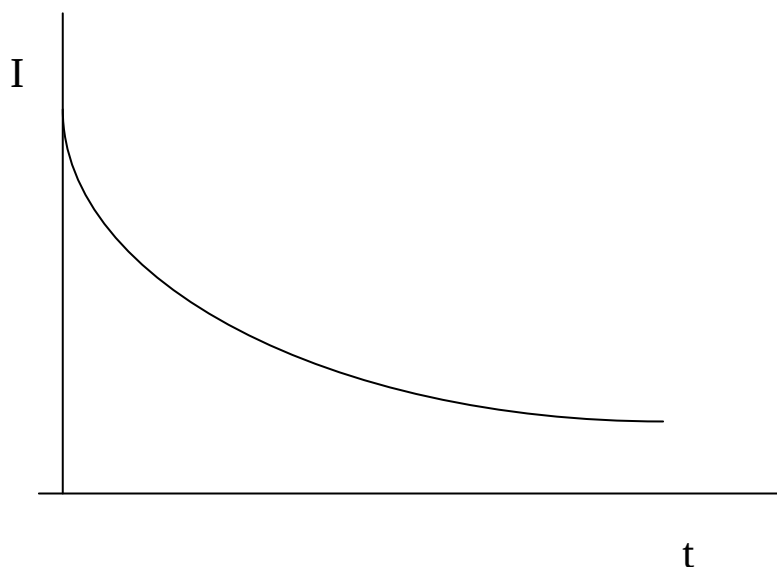
$$\tau = \frac{T}{\ln 2} \quad 4$$

per cui il processo di carica viene descritto da

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad 5 .$$

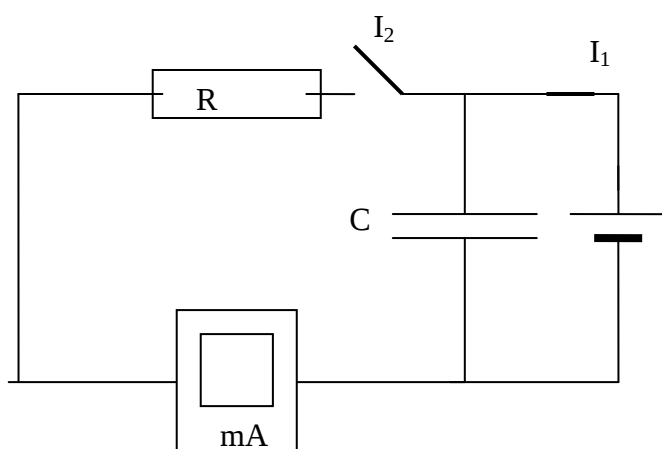
Naturalmente, il parametro τ si può definire come il tempo richiesto perché la corrente si riduca ad un e -esimo ($1/2,72$) del valore iniziale

Passare dalla tabella in cui abbiamo raccolto le letture, alla (5), rappresenta un passo logico notevole: significa formulare l'ipotesi che il processo di carica sia rappresentato da una curva esponenziale, cioè passare dai numeri interi che abbiamo raccolto dal cronometro e dal milliamperometro, ai numeri reali nel cui campo si ambientano le funzioni continue:



2. SCARICA DEL CONDENSATORE

Possiamo ora studiare la scarica del condensatore:



Occorrono gli stessi componenti di prima, con la differenza che ora ci sono due interruttori. Chiuso I_1 e aperto I_2 , si carica il condensatore.

Aperto I_1 e chiuso I_2 , il condensatore si scarica sul resistore R . L'andamento dell'intensità di corrente è esattamente lo stesso che nel processo di carica. È determinato dallo stesso fattore di tempo τ ; ma quali sono le grandezze fisiche da cui dipende la costante di tempo del circuito?

3. PARAMETRI CHE DETERMINANO LA COSTANTE DI TEMPO

È facile controllare sperimentalmente che il fattore di tempo è direttamente proporzionale alla resistenza posta in serie al condensatore, cioè che

$$\tau \propto R \quad 6.$$

Basta far scaricare il condensatore attraverso resistenze diverse, misurando, ogni volta, il tempo di dimezzamento. Si osserva che, raddoppiando, triplicando, ecc. la resistenza, anche il tempo di dimezzamento raddoppia, triplica, ecc. Accertata che si sia una proporzionalità diretta tra costante di tempo e resistenza di scarica, risulta definito un parametro che caratterizza il condensatore. In altre parole, il rapporto tra la resistenza (su cui è chiuso il condensatore) e la costante di tempo definisce una caratteristica del condensatore. Si pone quindi

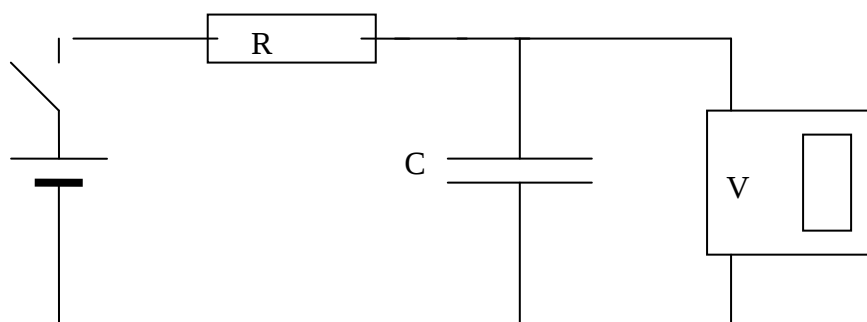
$$\frac{R}{\tau} \equiv \frac{1}{C} \quad 7$$

dove la costante C prende il nome di *capacità* del condensatore.

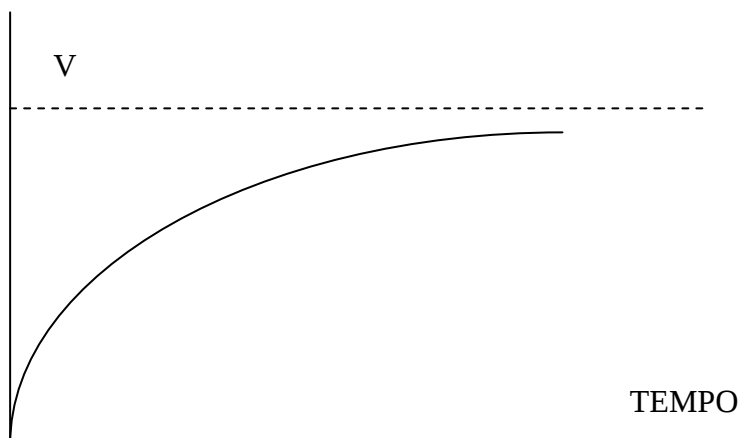
L'inverso della capacità ha quindi le dimensioni di una resistenza divisa per l'unità di tempo.

Infatti, abbiamo visto che nel processo di carica, il condensatore si comporta come una resistenza che, all'inizio è nulla, ma poi va aumentando fino a diventare infinita. L'inverso della capacità misura la rapidità con cui questa (pseudo) resistenza aumenta nel tempo.

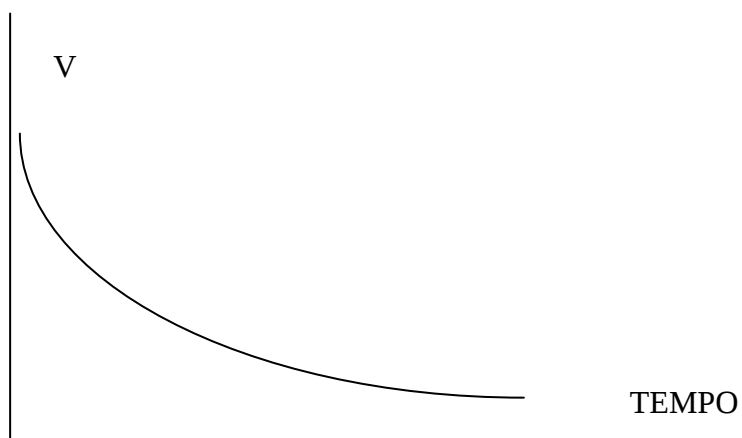
Possiamo costruire circuiti analoghi per studiare come varia la tensione ai capi del condensatore.



Quando si chiude l'interruttore la tensione sale progressivamente.



Nella scarica del condensatore la tensione cala progressivamente



E sempre con lo stesso fattore di tempo.

4. SINTESI

Nel processo di carica , la corrente nel resistore e la tensione ai capi del condensatore variano nel tempo secondo le funzioni

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \frac{V}{V_0} = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad 8$$

Nel processo di scarica , la corrente nel resistore e la tensione ai capi del condensatore variano nel tempo secondo le funzioni

$$\frac{I}{I_0} = -\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \frac{V}{V_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad 9$$

dove il segno negativo vuole ricordare il fatto che nella scarica il verso della corrente è opposto rispetto a quello di carica.

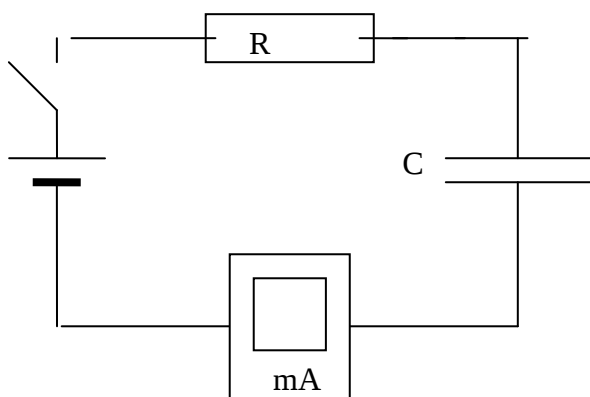
Dal confronto tra queste si ricava che la relazione tra tensione e corrente è

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} I \quad 10$$

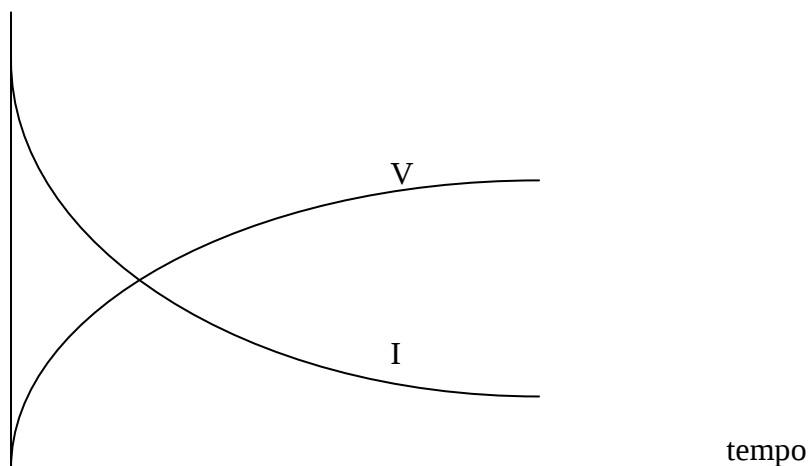
È questa relazione che caratterizza il condensatore, cioè svolge il ruolo che, per i resistori, è proprio della legge di Ohm.

5. QUESTIONI ENERGETICHE

Riprendiamo il processo di carica .



In un grafico riportiamo l'andamento della corrente e della tensione ai capi del condensatore



Il prodotto della corrente per la tensione fornisce la potenza conferita al condensatore:

$$\frac{W}{W_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad 11$$

Al tempo zero la potenza è nulla perché è nulla la tensione; al tempo lungo la potenza è nulla perché è nulla la corrente. D'altra parte

$$\int_0^{\infty} W \, dt$$

fornisce l'energia immagazzinata nel condensatore.

$$E_0 = W_0 \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right] dt = W_0 \tau \left[\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} W_0 \tau \quad 12$$

dove

$$W_0 = V_0 I_0 \quad 13$$

$$\int_0^{\infty} I \, dt$$

fornisce la carica immagazzinata nel condensatore:

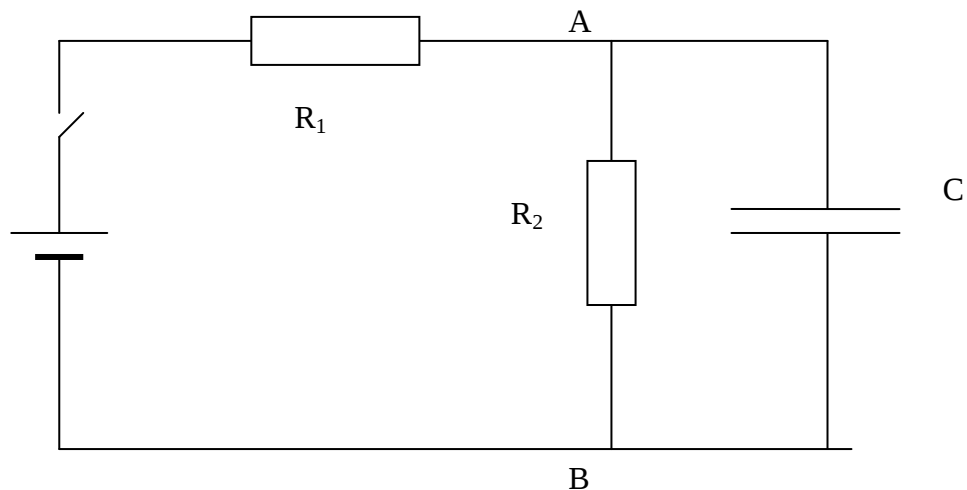
$$Q_0 = I_0 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = I_0 \tau \quad 14$$

Per cui si può anche scrivere

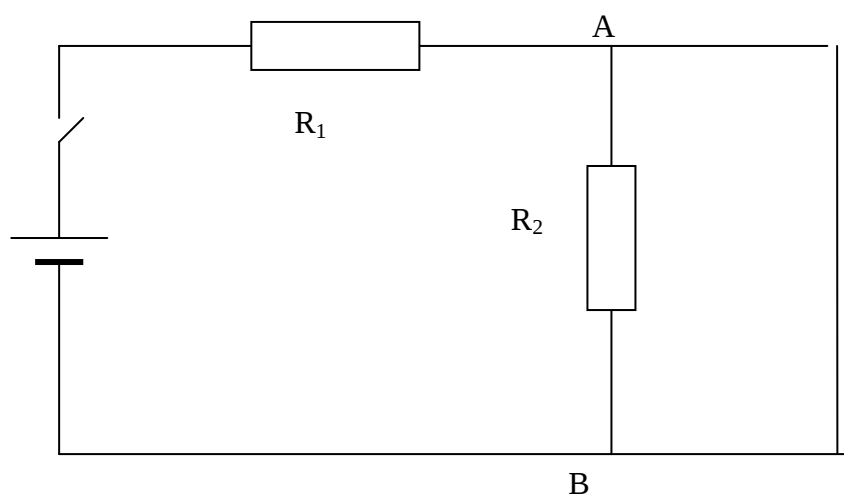
$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q_0^2 \quad 15$$

6. ANALISI DI UN CIRCUITO

Realizziamo il circuito



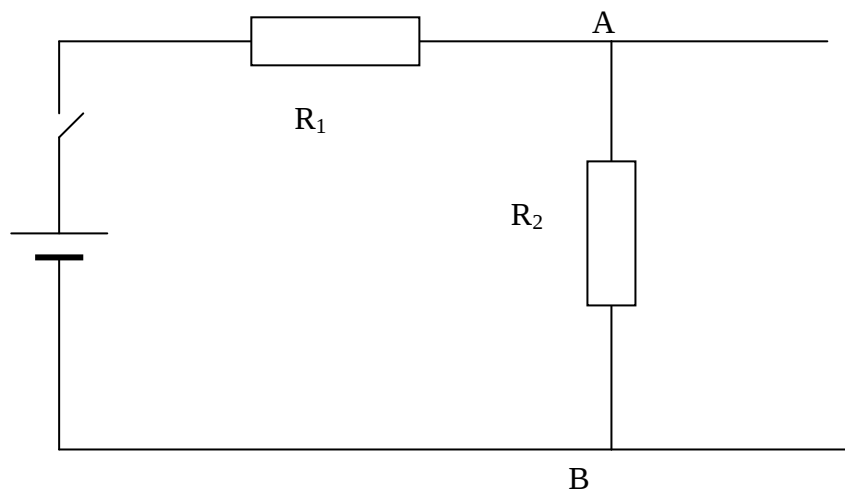
Nel momento in cui si chiude l'interruttore il circuito equivale al seguente



per cui, tra i punti A e B, la tensione è nulla e la corrente

$$I_0 = \frac{V_0}{R_1} \quad 16 \text{ .}$$

Alla fine, cioè dopo un tempo abbastanza lungo rispetto alla costante di tempo, il circuito equivale al seguente:



per cui la tensione tra i punti A e B è

$$V^* = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 \quad 17$$

e la corrente nulla.

Quindi, per il condensatore è legittimo aspettarsi un andamento come

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad V = V^* \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad 18$$

con

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} I \quad 10$$

Pertanto

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V^*}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{C} I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad 19$$

da cui si ricava

$$\tau = \frac{V^*}{I_0} C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_0}{I_0} C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \quad 20$$

La costante di tempo è uguale a quella che si avrebbe se il condensatore fosse in serie con il parallelo delle due resistenze.

Ledo Stefanini
Università di Mantova - Pavia