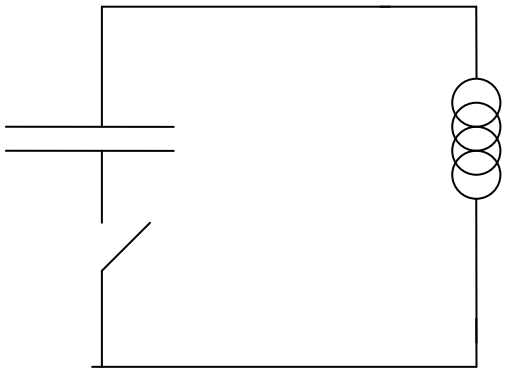
CIRCUITO OSCILLANTE

Ledo Stefanini

È un argomento classico. Consideriamo il circuito



costituito da un condensatore e un induttore. Non vi è resistenza, per cui l'energia rimane confinata nel circuito. Per introdurvela, carichiamo il condensatore e chiudiamo l'interruttore. La conservazione dell'energia richiede che

$$V_c + V_L = 0 \qquad 1$$

ovvero che

$$\frac{dV_c}{dt} + \frac{dV_L}{dt} = 0 \qquad 2$$

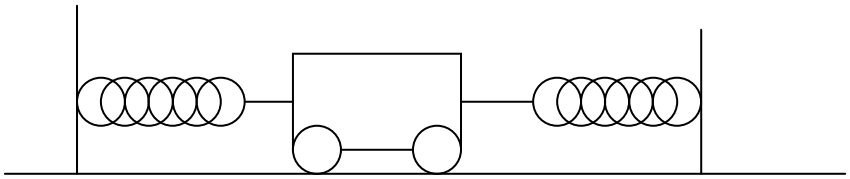
che, per le equazioni caratteristiche del condensatore e dell'induttore

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} I \qquad V_L = L\frac{dI}{dt} \qquad 3$$

diventa

$$\frac{1}{C} I + L\frac{d^2 I}{dt^2} = 0 \qquad 4 \ .$$

Questa è formalmente simile all'equazione del moto di una massa sotto l'azione di una molla:



La molla è caratterizzata dalla costante elastica; il carrello dalla sua massa. La legge del moto di Newton prescrive infatti che

$$F = -kx \quad \Rightarrow \quad ma = -kx \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \qquad 5$$

© 2010-2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Sappiamo che tipo di moto si produce, ovvero qual è la soluzione dell'equazione. Si tratta di un moto armonico di frequenza angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 6 \ .$$

Pertanto, la soluzione della (4) sarà del tipo

$$I = I_0 \sin \omega t \qquad 7$$

con

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad 8 \ .$$

Caricato il condensatore, quando si chiude l'interruttore, il circuito diventa sede di una corrente alternata la cui frequenza è data dalla(8). Occorre tuttavia osservare che la tensione ai capi del condensatore è data da

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} I \qquad 9$$

per cui sarà

$$V_C = \frac{1}{C} \int I dt = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad 10$$

che mostra come la tensione sia in anticipo rispetto alla corrente di un quarto di periodo.
D'altra parte, la tensione ai capi dell'induttore è legata alla corrente dalla (3) per cui

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = LI_0\omega \cos \omega t = LI_0\omega \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad 11$$

che mostra come la tensione sia in ritardo di un quarto di periodo rispetto alla corrente.
Nell'oscillazione del carrello le energie in gioco sono di due tipi: elastica e cinetica. Quando il carrello si trova all'estremità dell'oscillazione, l'energia è solo elastica e vale

$$E_{el} = \frac{1}{2} kA^2 \qquad 12$$

dove A indica l'ampiezza dell'oscillazione. Un quarto di periodo dopo il carrello si trova al centro dell'oscillazione. La sua energia è solo cinetica e vale:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} mV^2 \qquad 13$$

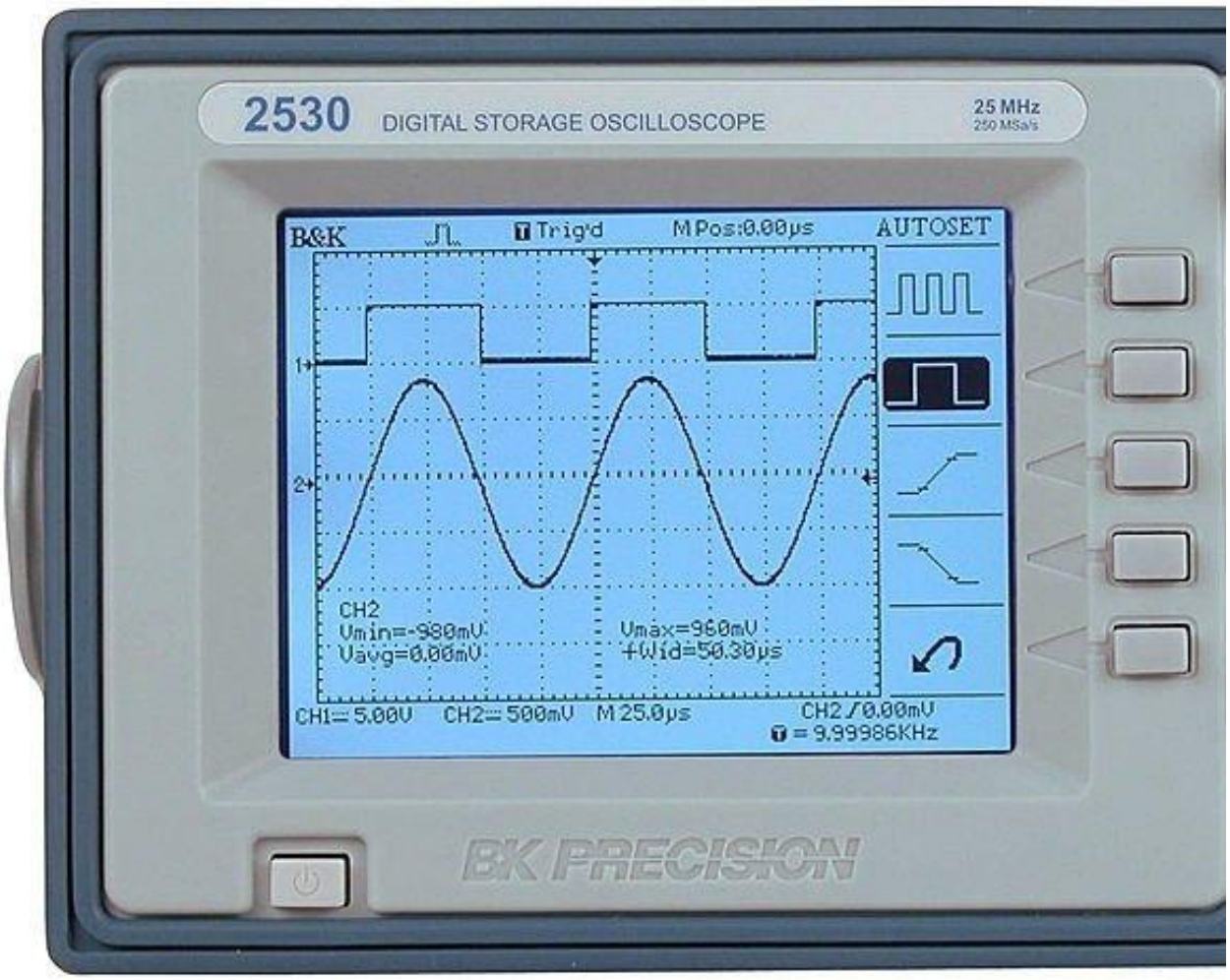
dove V è il valore massimo della velocità.
Per la conservazione dell'energia sarà

$$\frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} mV^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{V}{A} \qquad 14$$

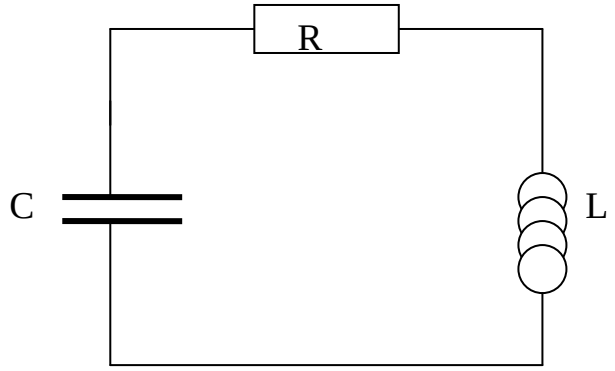
che è il valore della frequenza. L'analogo si può scrivere per il circuito:

$$E_C = E_L \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C} Q_0^2 = LI_0^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{I_0}{Q_0} \qquad 15 \ .$$

© 2010-2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

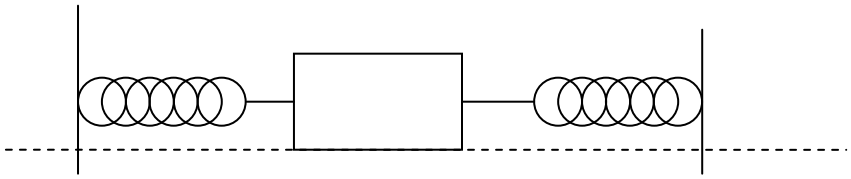


Nella realtà non può esistere un circuito privo di resistenza, cioè che non ceda energia all'ambiente. Un circuito reale è sempre dotato di resistenza:

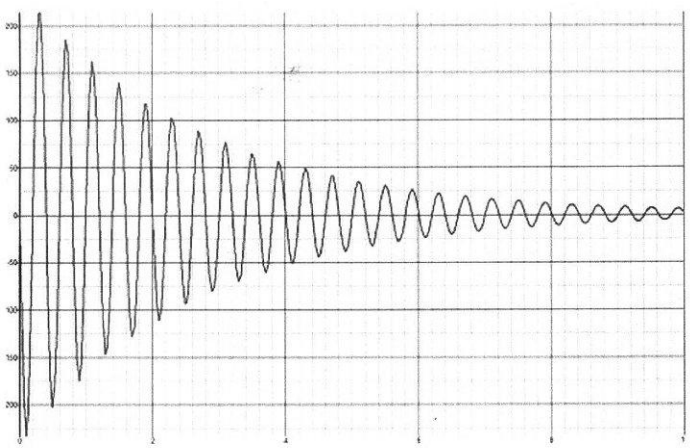


© 2010-2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA

Si può paragonare ad un sistema meccanico oscillante con attrito:



In conseguenza di ciò, l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce in modo esponenziale :



Ledo Stefanini
Università di Mantova - Pavia

© 2010-2011 Nuova Secondaria EDITRICE LA SCUOLA