

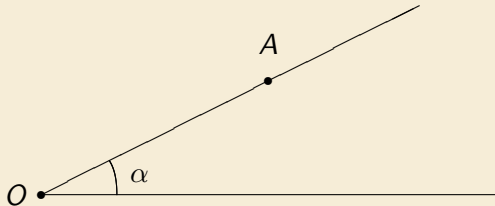
La circonferenza goniometrica

Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore

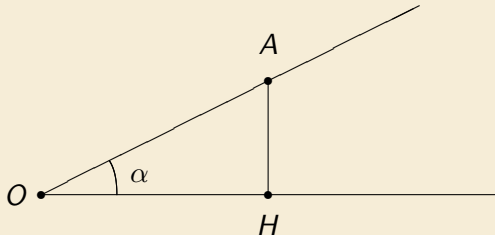
Le funzioni **sen** e **cos**

Consideriamo un angolo di ampiezza $\alpha < 90^\circ$ e vertice O e un punto A su una delle due semirette generatrici dell'angolo (diverso da O).



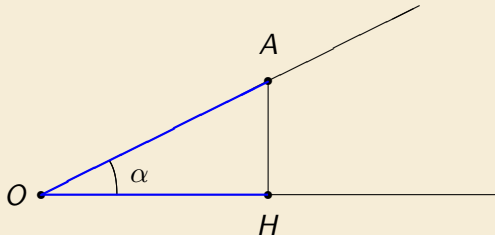
Le funzioni **sen** e **cos**

Consideriamo un angolo di ampiezza $\alpha < 90^\circ$ e vertice O e un punto A su una delle due semirette generatrici dell'angolo (diverso da O). Proiettiamo ortogonalmente il punto A sull'altra semiretta, ottenendo il punto H .



Le funzioni **sen** e **cos**

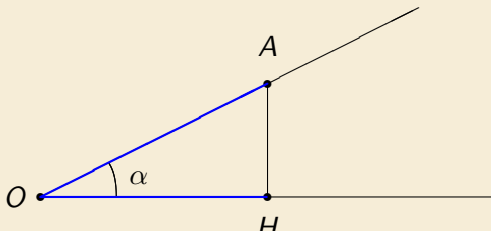
Consideriamo un angolo di ampiezza $\alpha < 90^\circ$ e vertice O e un punto A su una delle due semirette generatrici dell'angolo (diverso da O). Proiettiamo ortogonalmente il punto A sull'altra semiretta, ottenendo il punto H . Si può dimostrare facilmente che il rapporto tra la lunghezza di OH e quella di OA non dipende dalla posizione di A , ma soltanto dall'ampiezza α dell'angolo: $\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \text{costante}$.



Le funzioni **sen** e **cos**

Il rapporto tra $\overline{OH}$ e $\overline{OA}$, che è un numero compreso tra 0 e 1, si chiama *coseno* dell'angolo α e si scrive

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \cos \alpha$$



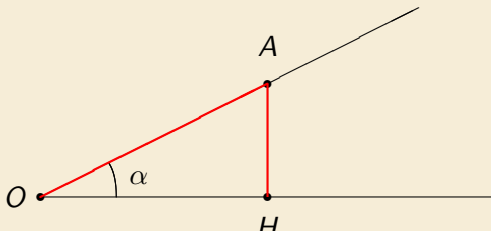
Le funzioni **sen** e **cos**

Il rapporto tra $\overline{OH}$ e $\overline{OA}$, che è un numero compreso tra 0 e 1, si chiama *coseno* dell'angolo α e si scrive

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \text{cos } \alpha$$

Allo stesso modo, anche il *seno* dell'angolo α viene definito come il rapporto (indipendente da A) tra $\overline{HA}$ e $\overline{OA}$, ovvero

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{OA}} = \text{sen } \alpha$$



La relazione fondamentale

Dal teorema di Pitagora risulta poi che

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{\overline{OH}^2 + \overline{AH}^2}{\overline{OA}^2} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OA}^2} = 1.$$

La relazione fondamentale

Dal teorema di Pitagora risulta poi che

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{\overline{OH}^2 + \overline{AH}^2}{\overline{OA}^2} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OA}^2} = 1.$$

Inoltre si verifica che

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha,$$

ovvero le funzioni si scambiano sugli archi complementari.

La relazione fondamentale

Dal teorema di Pitagora risulta poi che

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{\overline{OH}^2 + \overline{AH}^2}{\overline{OA}^2} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OA}^2} = 1.$$

Inoltre si verifica che

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha,$$

ovvero le funzioni si scambiano sugli archi complementari.

Infine, nel caso particolare $\alpha = 45^\circ$ si ha $\overline{OH} = \overline{HA}$ e $\overline{OA} = \overline{OH}\sqrt{2}$, quindi

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La circonferenza goniometrica

È possibile introdurre le funzioni goniometriche usando il piano cartesiano: consideriamo la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, che viene chiamata *circonferenza goniometrica*. Tale circonferenza ha equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

La circonferenza goniometrica

È possibile introdurre le funzioni goniometriche usando il piano cartesiano: consideriamo la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, che viene chiamata *circonferenza goniometrica*. Tale circonferenza ha equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Prendiamo un punto A sulla circonferenza in modo che stia nel primo quadrante e chiamiamo α l'ampiezza dell'angolo formato dall'asse x e dal raggio OA : allora l'ascissa di A sarà proprio $\cos \alpha$ e l'ordinata di A sarà $\sin \alpha$, ovvero

$$A = (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

La circonferenza goniometrica

È possibile introdurre le funzioni goniometriche usando il piano cartesiano: consideriamo la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, che viene chiamata *circonferenza goniometrica*. Tale circonferenza ha equazione

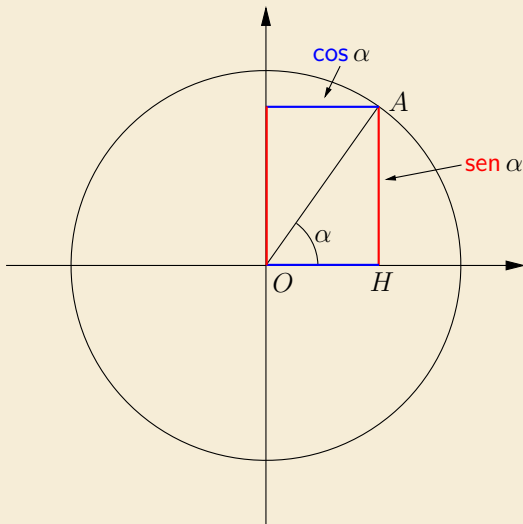
$$x^2 + y^2 = 1.$$

Prendiamo un punto A sulla circonferenza in modo che stia nel primo quadrante e chiamiamo α l'ampiezza dell'angolo formato dall'asse x e dal raggio OA : allora l'ascissa di A sarà proprio $\cos \alpha$ e l'ordinata di A sarà $\sin \alpha$, ovvero

$$A = (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

La relazione fondamentale $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ da questo punto di vista esprime semplicemente l'appartenenza di A alla circonferenza goniometrica.

La circonferenza goniometrica



La circonferenza goniometrica

Tramite la circonferenza goniometrica è facile estendere le funzioni *seno* e *coseno* anche ad angoli più grandi di 90° : in generale si definisce

$$\cos \alpha = x_A, \quad \sin \alpha = y_A$$

dove A è il punto della circonferenza goniometrica per cui l'angolo tra l'asse x e OA , misurato in senso antiorario, sia proprio α .

La circonferenza goniometrica

Tramite la circonferenza goniometrica è facile estendere le funzioni *seno* e *coseno* anche ad angoli più grandi di 90° : in generale si definisce

$$\cos \alpha = x_A, \quad \sin \alpha = y_A$$

dove A è il punto della circonferenza goniometrica per cui l'angolo tra l'asse x e OA , misurato in senso antiorario, sia proprio α .
Si capisce subito che

$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos \alpha, \quad \sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha$$

quindi le funzioni $\cos$ e $\sin$ sono **periodiche** di periodo 360° .

La circonferenza goniometrica

Tramite la circonferenza goniometrica è facile estendere le funzioni *seno* e *coseno* anche ad angoli più grandi di 90° : in generale si definisce

$$\cos \alpha = x_A, \quad \sin \alpha = y_A$$

dove A è il punto della circonferenza goniometrica per cui l'angolo tra l'asse x e OA , misurato in senso antiorario, sia proprio α .
Si capisce subito che

$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos \alpha, \quad \sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha$$

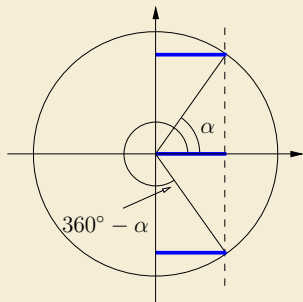
quindi le funzioni $\cos$ e $\sin$ sono **periodiche** di periodo 360° .
Inoltre è evidente che $\cos$ è positiva per angoli nel primo e nel quarto quadrante, mentre $\sin$ è positiva per angoli nel primo e nel secondo quadrante.

Coseno di archi esplementari

Se consideriamo angoli compresi tra 0° e 360° , mediante la circonferenza goniometrica vediamo che in generale esistono due angoli distinti che danno lo stesso valore del coseno, perché sulla circonferenza esistono due punti distinti che hanno la stessa ascissa:

Coseno di archi esplementari

Se consideriamo angoli compresi tra 0° e 360° , mediante la circonferenza goniometrica vediamo che in generale esistono due angoli distinti che danno lo stesso valore del coseno, perché sulla circonferenza esistono due punti distinti che hanno la stessa ascissa:

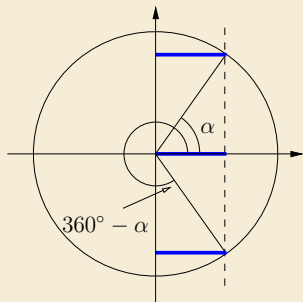


i due archi sono *esplementari* (ovvero la loro somma è un angolo giro), quindi si ha l'identità

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

Coseno di archi esplementari

Se consideriamo angoli compresi tra 0° e 360° , mediante la circonferenza goniometrica vediamo che in generale esistono due angoli distinti che danno lo stesso valore del coseno, perché sulla circonferenza esistono due punti distinti che hanno la stessa ascissa:



i due archi sono *esplementari* (ovvero la loro somma è un angolo giro), quindi si ha l'identità

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

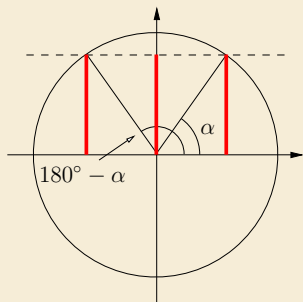
Ovviamente nel caso $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$ l'angolo è unico.

Seno di archi supplementari

Allo stesso modo, mediante la circonferenza goniometrica vediamo che ci sono due angoli che danno lo stesso valore del seno:

Seno di archi supplementari

Allo stesso modo, mediante la circonferenza goniometrica vediamo che ci sono due angoli che danno lo stesso valore del seno:

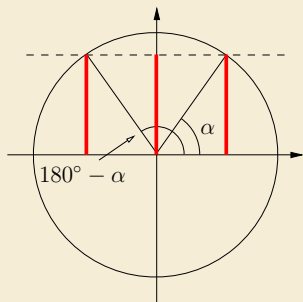


i due archi sono *supplementari* (ovvero la loro somma è un angolo piatto), quindi si ha l'identità

$$\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$$

Seno di archi supplementari

Allo stesso modo, mediante la circonferenza goniometrica vediamo che ci sono due angoli che danno lo stesso valore del seno:



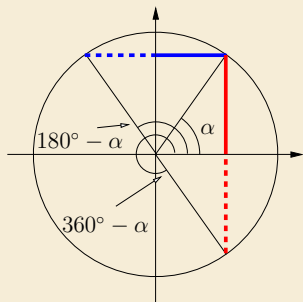
i due archi sono *supplementari* (ovvero la loro somma è un angolo piatto), quindi si ha l'identità

$$\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$$

Nel caso $\alpha = 90^\circ$ e $\alpha = 270^\circ$ l'angolo è unico.

Seno di archi esplementari

Inoltre, per evidenti ragioni di simmetria, dalla circonferenza goniometrica si deduce che il coseno cambia segno su archi supplementari, mentre il seno cambia segno su archi esplementari, ovvero



$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$$

Tabella degli archi associati

Raccogliendo le formule appena trovate, si ottiene la seguente **tabella degli archi associati**:

	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
cos	sen α	-sen α	-cos α	-cos α	-sen α	sen α	cos α
sen	cos α	cos α	sen α	-sen α	-cos α	-cos α	-sen α

dove si è considerato che:

$(90^\circ + \alpha)$ è l'arco supplementare di $(90^\circ - \alpha)$,

$(180^\circ + \alpha)$ è l'arco esplementare di $(180^\circ - \alpha)$

$(270^\circ - \alpha)$ è l'arco esplementare di $(90^\circ + \alpha)$

$(270^\circ + \alpha)$ è l'arco esplementare di $(90^\circ - \alpha)$.

Archi notevoli

Di quali angoli è possibile conoscere il **sen** e il **cos**? Dalla circonferenza goniometrica possiamo calcolarli immediatamente per 0° , 90° , 180° e 360° . Inoltre abbiamo già notato che

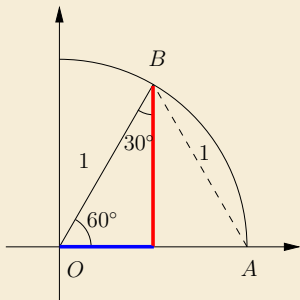
$$\text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Archi notevoli

Di quali angoli è possibile conoscere il **sen** e il **cos**? Dalla circonferenza goniometrica possiamo calcolarli immediatamente per 0° , 90° , 180° e 360° . Inoltre abbiamo già notato che

$$\text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

È anche abbastanza facile calcolare seno e coseno dell'angolo di 30° , usando le proprietà del triangolo emiequilatero:



Il triangolo OAB è equilatero di lato 1, quindi

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tabella degli archi notevoli

Combinando le formule sugli archi supplementari e complementari con quelle degli angoli di 45° e 60° , possiamo costruire la seguente **tabella degli archi notevoli**:

Tabella degli archi notevoli

Combinando le formule sugli archi supplementari e complementari con quelle degli angoli di 45° e 60° , possiamo costruire la seguente **tabella degli archi notevoli**:

	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabella degli archi notevoli

Combinando le formule sugli archi supplementari e complementari con quelle degli angoli di 45° e 60° , possiamo costruire la seguente **tabella degli archi notevoli**:

	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

	210°	240°	270°	300°	330°
cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
sen	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Le altre funzioni trigonometriche

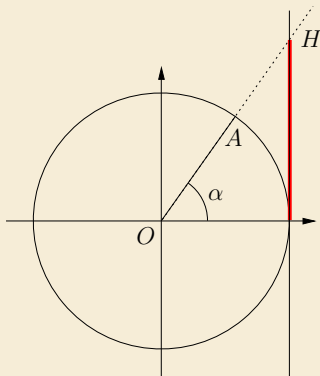
Esistono altre funzioni trigonometriche importanti di un angolo α : esse sono

- ▶ la tangente: $\operatorname{tg} \alpha$,
- ▶ la cotangente: $\operatorname{cotg} \alpha$,
- ▶ la secante: $\operatorname{sec} \alpha$,
- ▶ la cosecante: $\operatorname{cosec} \alpha$.

Vedremo che tali funzioni sono però sempre riconducibili a combinazioni di $\operatorname{sen} \alpha$ e $\operatorname{cos} \alpha$.

Tangente e cotangente

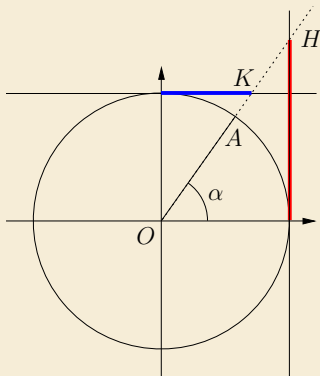
Preso un angolo α sulla circonferenza goniometrica, prolunghiamo il corrispondente raggio OA fino a intersecarlo con la retta verticale $x = 1$ nel punto H , e poniamo $\boxed{\text{tg } \alpha = y_H}$.



Tangente e cotangente

Preso un angolo α sulla circonferenza goniometrica, prolunghiamo il corrispondente raggio OA fino a intersecarlo con la retta verticale $x = 1$ nel punto H , e poniamo $\boxed{\text{tg } \alpha = y_H}$.

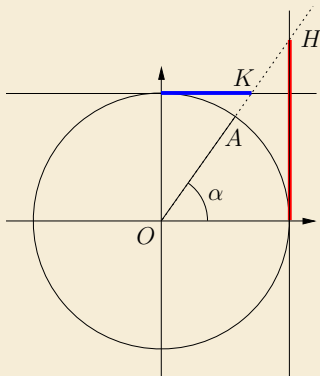
Allo stesso modo, prolunghiamo OA fino a intersecarlo con la retta orizzontale $y = 1$ nel punto K , e poniamo $\boxed{\text{cotg } \alpha = x_K}$.



Tangente e cotangente

Preso un angolo α sulla circonferenza goniometrica, prolunghiamo il corrispondente raggio OA fino a intersecarlo con la retta verticale $x = 1$ nel punto H , e poniamo $\text{tg } \alpha = y_H$.

Allo stesso modo, prolunghiamo OA fino a intersecarlo con la retta orizzontale $y = 1$ nel punto K , e poniamo $\text{cotg } \alpha = x_K$.

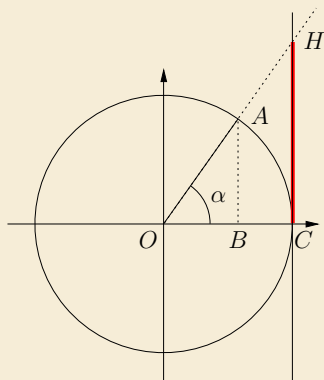


Si può verificare che

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

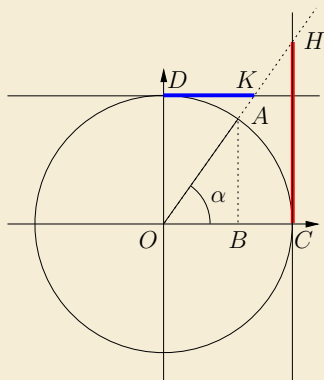
Tangente e cotangente



Infatti, il triangolo $O\widehat{C}H$ è simile al triangolo $O\widehat{B}A$, e dunque in particolare

$$\text{tg } \alpha = HC = \frac{HC}{OC} = \frac{AB}{OB} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Tangente e cotangente



Infatti, il triangolo $\widehat{OCH}$ è simile al triangolo $\widehat{OBA}$, e dunque in particolare

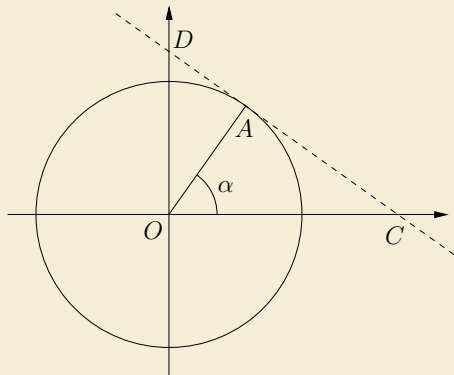
$$\text{tg } \alpha = HC = \frac{HC}{OC} = \frac{AB}{OB} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Allo stesso modo, $\widehat{ODK}$ è simile a $\widehat{OBA}$, quindi

$$\text{cotg } \alpha = DK = \frac{DK}{OD} = \frac{OB}{AB} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Secante e cosecante

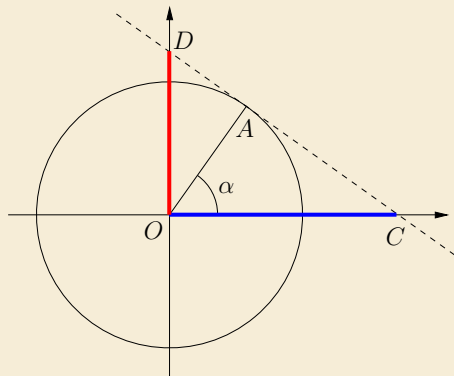
Preso un angolo α sulla circonferenza goniometrica, tracciamo la tangente alla circonferenza nel punto A , che incontri gli assi nei punti C e D .



Secante e cosecante

Preso un angolo α sulla circonferenza goniometrica, tracciamo la tangente alla circonferenza nel punto A , che incontri gli assi nei punti C e D .

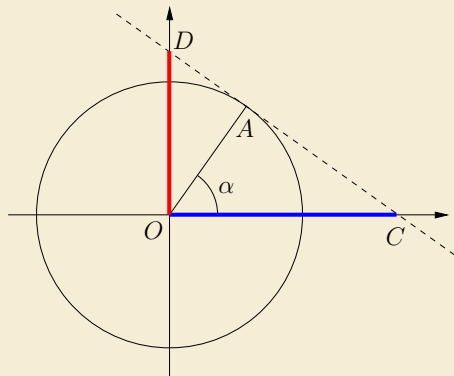
Poniamo $\sec \alpha = x_C$ e $\operatorname{cosec} \alpha = y_D$.



Secante e cosecante

Preso un angolo α sulla circonferenza goniometrica, tracciamo la tangente alla circonferenza nel punto A , che incontri gli assi nei punti C e D .

Poniamo $\sec \alpha = x_C$ e $\operatorname{cosec} \alpha = y_D$.



Si può verificare che

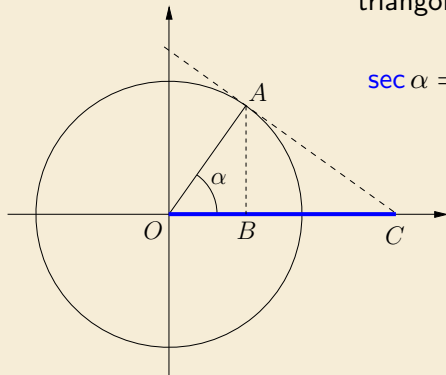
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Secante e cosecante

Infatti, il triangolo $O\hat{A}C$ è simile al triangolo $O\hat{B}A$, dunque

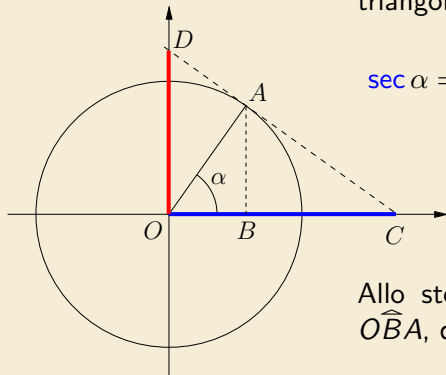
$$\sec \alpha = OC = \frac{OC}{OA} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$



Secante e cosecante

Infatti, il triangolo $O\hat{A}C$ è simile al triangolo $O\hat{B}A$, dunque

$$\sec \alpha = OC = \frac{OC}{OA} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$



Allo stesso modo, $D\hat{A}O$ è simile a $O\hat{B}A$, quindi

$$\operatorname{cosec} \alpha = OD = \frac{OD}{OA} = \frac{OA}{AB} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$