

CINEMATICA SOLARE

Ledo Stefanini

Una delle tante contraddizioni dell'istruzione scolastica è rappresentata dal fatto che i ragazzi che escono dal liceo sanno ripetere le leggi di Keplero; ma hanno idee molto vaghe su come vadano le cose del cielo così come lo si vede. In particolare:

a che ora è mezzogiorno?

Quale sia l'altezza del sole a mezzogiorno?

Quale sia l'altezza del sole durante il giorno?

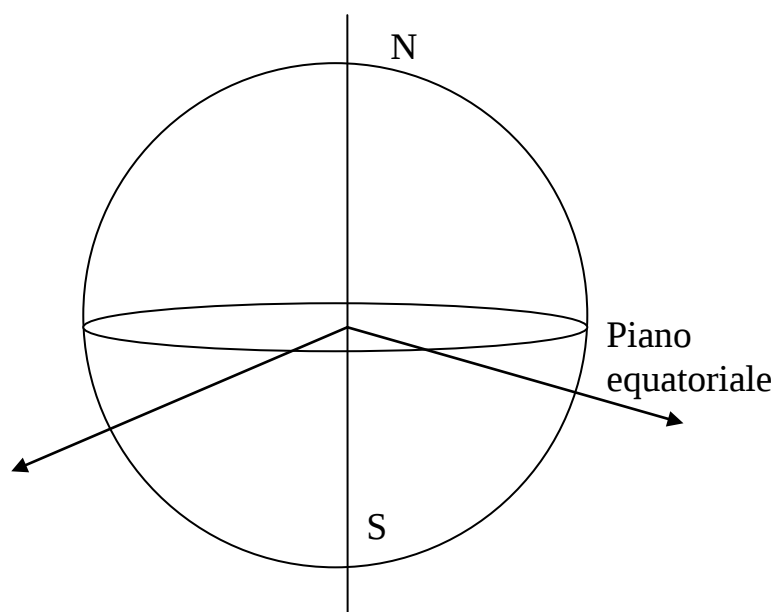
A che ora sorge e tramonta il sole?

Dove sorge e tramonta?

Alla luce di queste considerazioni, non saranno perse alcune lezioni in cui confluiscono la geografia astronomica e la trigonometria.

1. SISTEMI DI RIFERIMENTO

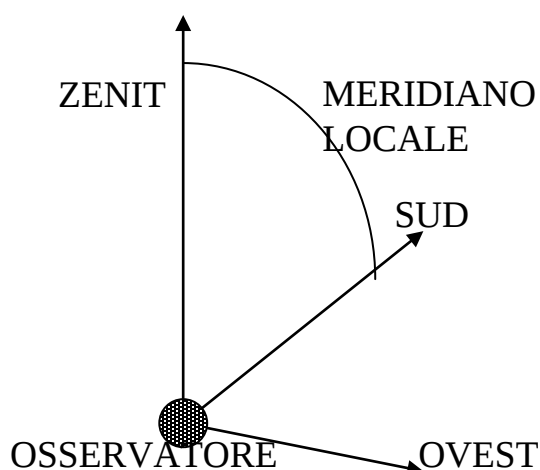
In tutto il discorso, i sistemi di riferimento adottati saranno due, ambedue terrestri: quello ancorato al piano equatoriale e quello locale, ancorato al piano orizzontale che sostiene i nostri piedi.



Riferimento equatoriale

Il riferimento equatoriale è quello dei meridiani e dei paralleli, nel quale la latitudine dell'equatore è zero e quella dei poli 90° , dove la longitudine di Greenwich è zero e la nostra (quella del meridiano dell'Europa Centrale è $15^\circ E$). Non sarà inutile ricordare che per Torino (ad esempio)

$$\varphi = 45^\circ 4' N \quad \lambda = 7^\circ 40' E.$$



Riferimento locale

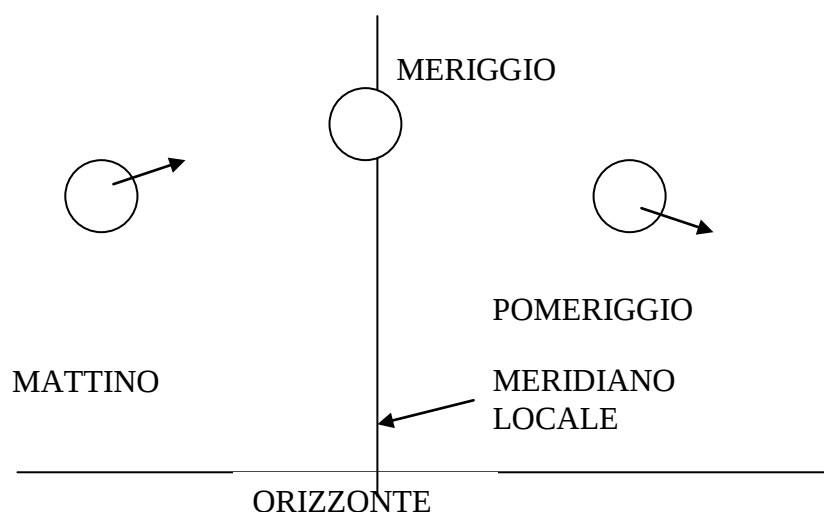
Per fissare il riferimento locale bisogna individuare la direzione del sud. La verticale passante per il sud è il *meridiano locale*. Come insegnano a scuola, se uno guarda a sud, la mano sinistra indica l'est e la destra l'ovest.

Tutti sanno che il sole sorge ad est e tramonta ad ovest.

E invece non è vero! O, meglio, è vero solo per due giorni all'anno.

2. A CHE ORA É MEZZOGIORNO?

Chiamiamo *mezzogiorno locale* il momento in cui il sole passa per il meridiano locale.



GUARDANDO VERSO SUD

Il sole descrive intorno alla Terra un giro completo in 24 ore. Significa che si sposta, su un cerchio parallelo all'equatore, di

$$\frac{360^\circ}{24\text{ore}} = \frac{15^\circ}{\text{ora}} = \frac{15'}{\text{min}} = \frac{15''}{\text{sec}}$$

Si definisce *mezzogiorno convenzionale* l'istante in cui il sole passa per il meridiano dell'Europa Centrale, ovvero il meridiano caratterizzato dalla longitudine 15° Est, cioè che si trova a 15° (ovvero ad un'ora) dal meridiano fondamentale che passa per Greenwich. L'unica città italiana importante attraversata dal meridiano dell'Europa Centrale è Catania.



Nelle località che hanno longitudine maggiore di quella di Catania – per esempio a Lecce - il mezzogiorno locale arriva prima di quello convenzionale, in quelle che hanno longitudine minore – per esempio Milano - il mezzogiorno locale arriva dopo. Per esempio, la longitudine di Torino è $\lambda = 7^{\circ}40'$

Quindi la differenza di longitudine rispetto al meridiano di riferimento è

$$\Delta\lambda = 15^{\circ} - 7^{\circ}40' = 7^{\circ}20'$$

Ora, 7°20' equivalgono a

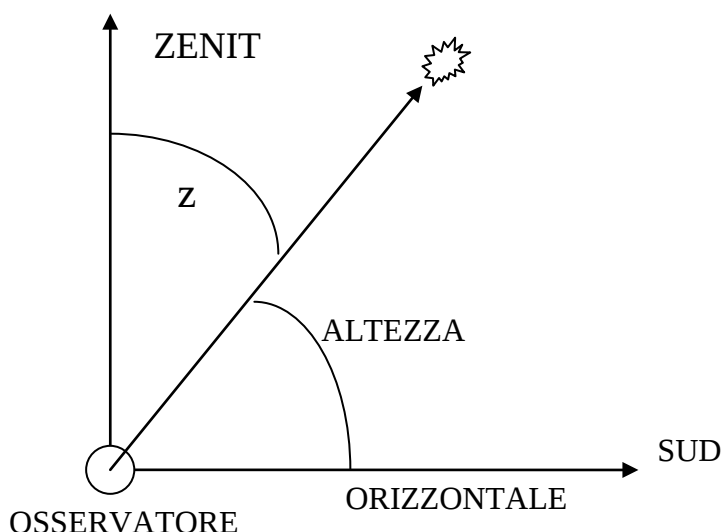
$$\frac{440'}{15'} \text{ min} = 29,3 \text{ min}$$

Il mezzogiorno a Torino arriva mezz'ora dopo quello convenzionale.

ALTEZZA DEL SOLE A MEZZOGIORNO

Per *altezza del sole* a mezzogiorno, intendiamo l'angolo che la direzione del sole al mezzogiorno locale forma rispetto all'orizzonte.

Per *distanza zenitale* a mezzogiorno si intende l'angolo che la direzione del sole forma con la verticale del luogo.



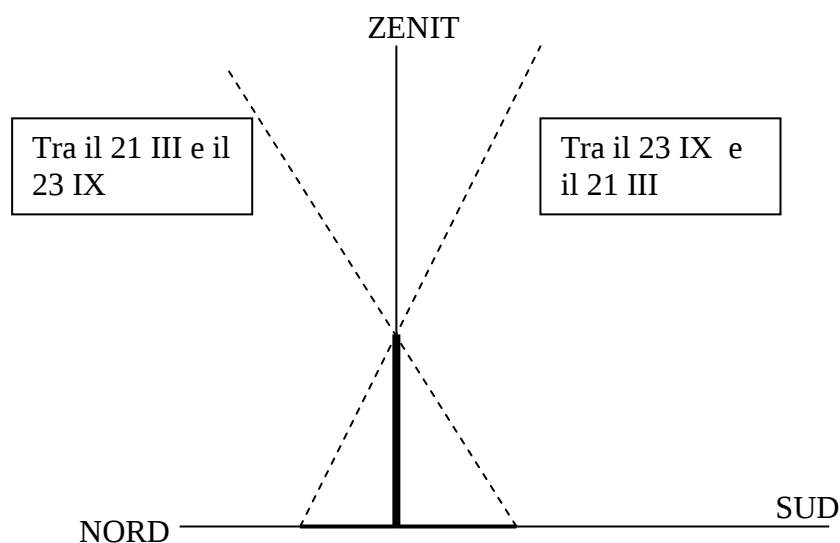
ALTEZZA A E DISTANZA ZENITALE z

La distanza zenitale e l'altezza del sole sono angoli complementari:

$$A + z = 90^\circ$$

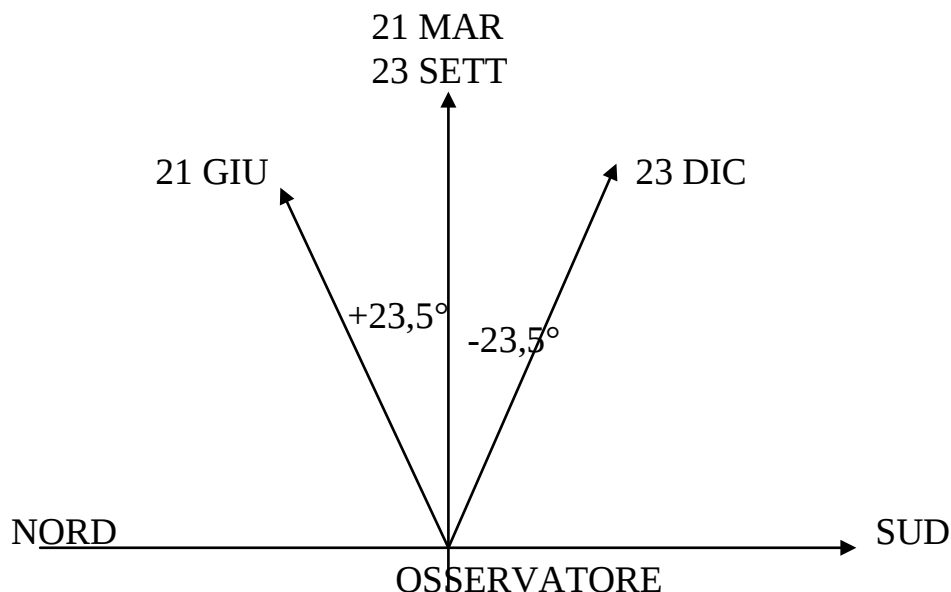
In questo caso occorre una latitudine di riferimento e questa è quella dell'equatore (0°).

Mettiamoci dunque all'equatore. All'equatore (a mezzogiorno) può accadere che un palo infisso verticalmente (gnomone) non faccia ombra; cioè che il sole sia esattamente allo zenit. Questa straordinaria situazione si verifica, però, solo due volte all'anno: il 21 marzo e il 23 settembre (equinozi). Per l'osservatore equatoriale, il palo fa ombra in tutti gli altri giorni dell'anno, per sei mesi a Sud e per sei mesi a Nord. Precisamente, tra il 21 marzo e il 23 settembre l'ombra è proiettata a sud, per gli altri sei mesi verso nord. Si tratta di una cosa strana per noi: la nostra ombra (a mezzogiorno) è sempre diretta verso nord.



3. LE OMBRE PER UN EQUATORIANO

La distanza zenitale del sole a mezzogiorno per un osservatore equatoriale si chiama *declinazione* e, nel corso dell'anno, varia tra $-23,5^\circ$ e $+23,5^\circ$.



Oscillazione della posizione del sole all'equatore (a mezzogiorno)

Il Sole (a mezzogiorno) si sposta da una distanza all'altra con un vero proprio moto armonico che possiamo descrivere con un'equazione del tipo

$$\delta = 23,5^\circ \sin\left(2\pi \frac{\Delta t}{T}\right) \quad (1)$$

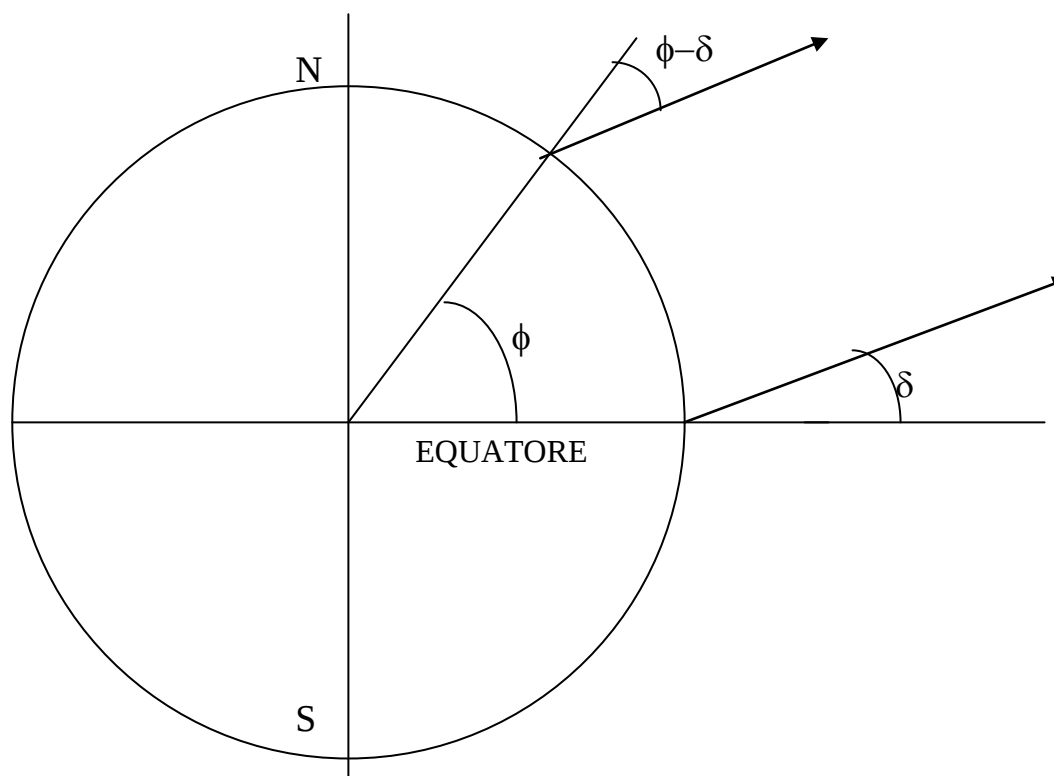
dove δ indica la declinazione solare, T la durata dell'anno e Δt il tempo che separa la data scelta dall'equinozio di primavera. Per esempio, il 1° maggio, che dista 40 giorni dal 21 marzo, la declinazione del sole è

$$\delta = 23,5^\circ \sin\left(2\pi \frac{40}{365}\right)$$

dove è necessario tener presente che l'argomento del seno è espresso in radianti. Si ottiene

$$\delta(1^\circ \text{maggio}) = 16,18^\circ$$

Per ottenere la distanza zenitale al mezzogiorno di un luogo di latitudine ϕ basta sottrarre la declinazione, come risulta dalla figura:



La distanza zenitale a mezzogiorno è la differenza tra la latitudine del luogo e la declinazione solare alla data scelta.

Pertanto

$$z(\Delta t) = \phi(\text{luogo}) - \delta(\Delta t) \quad (2)$$

Per esempio, la distanza zenitale del sole a mezzogiorno a Torino (latitudine $45^{\circ}4'$) il 1° maggio sarà

$$z(40) = 45^{\circ}4' - 16^{\circ}11' = 28^{\circ}53'$$

L'altezza del sole nello stesso luogo, a mezzogiorno della stessa data, sarà

$$A = 90^{\circ} - z(40) = 61^{\circ}7'$$

Per conoscere l'altezza del sole a mezzogiorno occorre conoscere la data e la latitudine del luogo.

4. ALTEZZA DEL SOLE AD ORE DIVERSE

Vogliamo calcolare l'altezza del sole sull'orizzonte in una data località, ad un'ora qualsiasi, posto di conoscere la sua altezza a mezzogiorno. L'altezza dipende dall'ora e, poiché sappiamo che ogni ora corrisponde a 15° , possiamo associare all'orario un angolo. Si chiama *azimut* (H) quello che separa la posizione del sole dal meridiano del luogo. Per esempio, alle nove (locali) del mattino mancano tre ore a mezzogiorno e tre ore corrispondono ad un azimut di $3 \times 15^{\circ} = 45^{\circ}$. Lo stesso azimut caratterizza le tre del pomeriggio.

E' una questione di trigonometria elementare ricavare la relazione che ci occorre:

$$\sin A = \sin A_0 - \cos \phi \cos \delta (1 - \cos H) \quad (3)$$

In questa A rappresenta l'altezza del sole all' ora a cui corrisponde l'azimut H , A_0 l'altezza del sole a mezzogiorno, ϕ la latitudine del luogo e δ la declinazione.

Non cercheremo di ricavare questa formula, ma impareremo semplicemente ad usarla. Possiamo osservare che l'altezza del sole raggiunge il massimo per $H=0$ (mezzogiorno). Infatti, a quell'ora, $\cos H=1$ e il secondo termine a destra si annulla.

Poniamo di voler determinare l'altezza del sole a Torino alle 9 del mattino del 1° maggio. Queste informazioni ci danno

$$\phi = 45^{\circ}4'$$

$$\delta = 16^{\circ}18'$$

$$H = 45^{\circ}$$

Inserendo questi nella (3) si ottiene

$$A = 43^{\circ}$$

nel giorno in cui l'altezza del Sole a mezzogiorno è 62° .

Possiamo anche chiederci per quale valore di H l'altezza del sole si annulla. Si verifica quando

$$\cos \phi \cos \delta (1 - \cos H) = \sin A_0$$

cioè per

$$1 - \cos H = \frac{\cos(\phi - \delta)}{\cos \phi \cos \delta}$$

da cui, con un po' di trigonometria,

$$\cos H = -\tan \phi \tan \delta \quad (4)$$

Questa fornisce l'azimut del sole all'alba e al tramonto; quindi l'ora dell'alba e del tramonto.

Per esempio, sempre a Torino, il 1° maggio,

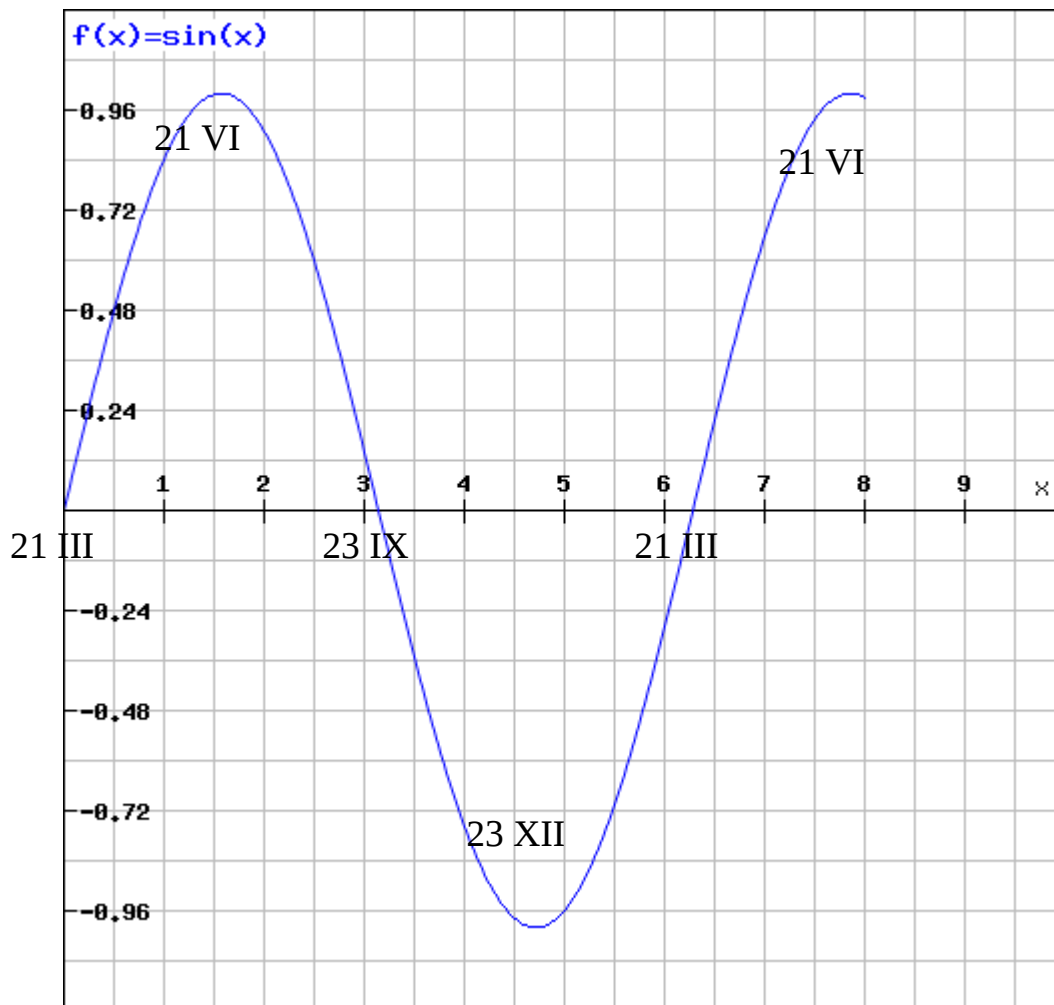
$$\cos H = -\tan(45,07) \tan(16,18) = -0,29$$

da cui

$$H = 107^{\circ}$$

che corrispondono a sette ore circa.

Pertanto a Torino, il 1° maggio il sole sorge alle cinque e tramonta alle sette di sera.



Ledo Stefanini
Università di Mantova-Pavia