

PROBLEMI DI CINEMATICA

Ledo Stefanini

PROBLEMA 1. RELATIVITÀ PRE-GALILEIANA

Nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, che esamina le ragioni a favore e contrarie al moto della Terra, Galileo fa dire a Salviati:

«Per la più gagliarda ragione (contro il moto di rotazione della Terra) si produce da tutti quella de i corpi gravi, che cadendo da alto a basso vengono per una linea retta e perpendicolare alla superficie della Terra; argomento stimato irrefragabile, che la Terra stia immobile: perché, quando ella avesse conversion (rotazione) diurna, una torre dalla sommità della quale si lasciasse cadere un sasso, venendo portata dalla vertigine della Terra, nel tempo che il sasso consuma nel suo cadere, scorrerebbe molte centinaia di braccia verso oriente, e per tanto spazio dovrebbe il sasso percuotere in terra lontano dalla radice della torre...»

Dovreste formulare questo passo in linguaggio moderno e precisarlo: pensiamo di lasciar cadere un sasso dalla Torre degli Asinelli (altezza 97 m) che si trova a Bologna (latitudine 45°). Quanto tempo impiega a cadere? Di quanto si sposta nel frattempo il terreno verso est? Come ribattere a questa obiezione?

SOLUZIONE

La velocità con cui si sposta la Terra alle nostre latitudini è

$$V = \Omega R \cos \lambda$$

dove Ω è la velocità angolare della Terra, R il suo raggio e λ la latitudine del luogo.

Poiché

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \times 3,6 \times 10^3} = 7,3 \times 10^{-5} \frac{rad}{s},$$

si ottiene, per la nostra latitudine

$$V = 7,3 \times 10^{-5} \times 6,4 \times 10^6 \cos 45^\circ \cong 330 \frac{m}{s}$$

Un sasso, a cadere dalla Torre degli Asinelli impiega un tempo

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 97}{9,8}} \cong 4,5s$$

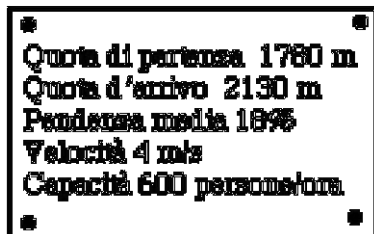
In questo tempo il piede della torre si sposta verso Est di

$$\Delta s = Vt \cong 1500m$$

Il sasso toccherebbe terra spostato di 1500 m verso ovest, rispetto al piede della torre. Questa era l'argomentazione degli avversari di Galileo.

PROBLEMA 2 SULLO SKILIFT

Davanti ad un impianto a fune per il trasporto di sciatori È posto un cartello che dice:



Vi chiediamo di calcolare:

- lunghezza del tragitto
- durata del trasporto
- distanza tra uno sciatore e l'altro

SOLUZIONE

Ad una pendenza del 18% corrisponde un angolo di 10° . Se la differenza di quota è di 350 m, la lunghezza del percorso (che pensiamo rettilineo) è

$$\frac{350}{\sin 10^\circ} = 2015 \text{ m.}$$

A percorrere questo tratto, alla velocità di 4 m/s, uno sciatore impiega

$$\frac{2015}{4} \text{ s} = 503 \text{ s} = 8 \text{ min } 24 \text{ s}$$

Se l'impianto trasporta 600 persone all'ora, in 503 s, trasporta

$$600 \frac{0,503 \times 10^3}{3,6 \times 10^3} = 84$$

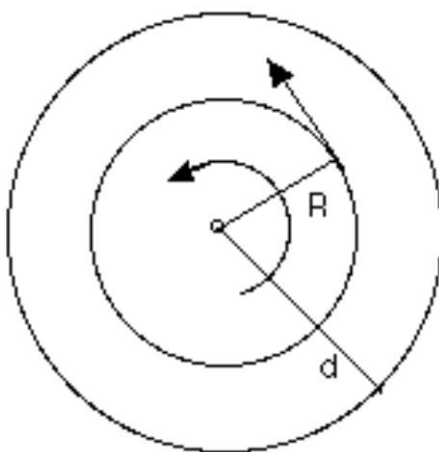
persone, distribuite su 2015 m, significa che gli sciatori sono separati da un intervallo di 24 m.

PROBLEMA 3 SATELLITI ARTIFICIALI

Perché quasi tutti i satelliti artificiali, visti da Terra, sorgono a ovest e tramontano a est? Al contrario, la Luna e il Sole sorgono a est e tramontano a ovest. Non sarebbe possibile mettere in orbita un satellite che si comporti come i corpi celesti naturali?

SOLUZIONE

Quasi tutti i satelliti vengono lanciati da basi collocate in prossimità dell'equatore e in direzione est, allo scopo di utilizzare come velocità di partenza quella di rotazione della Terra (circa 1700 km/h).



Il periodo di un satellite, per la terza legge di Keplero, è proporzionale alla radice del cubo della distanza: $T = K\sqrt{d^3}$.

Affinché il satellite si veda dalla Terra spostarsi da est verso ovest, il suo periodo dovrebbe essere maggiore di 1 giorno, cioè

$$K\sqrt{d^3} > 1$$

da cui

$$d > \sqrt[3]{\frac{1}{K^2}}.$$

Il fattore di proporzionalità K si può ricavare dai dati che conosciamo sulla Luna:

$T=30$ giorni; distanza = $60 R$ (Raggi terrestri).

Ne deriva che

$$K^2 = \frac{T^2}{d^3} = \frac{900}{60^3} \frac{\text{giorni}^2}{\text{raggi}^{3/2}} \cong 4,2 \times 10^{-3} \frac{\text{giorni}^2}{\text{raggi}^3}.$$

Sostituendo nella precedente

$$d > \sqrt[3]{\frac{1}{K^2}} = \sqrt[3]{238} \cong 6,2 R.$$

Un satellite lanciato dalla Terra in direzione est si vede spostarsi in direzione opposta solo se la sua distanza è superiore a circa 6 raggi terrestri.

PROBLEMA 4

Un automobilista in viaggio legge sul tachimetro una velocità di 130 km/h e sul frequenzimetro (detto anche *contagiri*) una frequenza di 2400 giri/min. Se il diametro delle ruote è 90 cm, qual è il rapporto di riduzione dell'auto?

SOLUZIONE

$$130 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$2400 \frac{\text{giri}}{\text{min}} = 40 \frac{\text{giri}}{\text{s}}$$

Ad ogni giro della ruota, la macchina si sposta di $2\pi R = 2,8\text{m}$. La frequenza dei giri della ruota è quindi

$$\frac{36 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,8\text{m}} = 13 \text{ s}^{-1}.$$

Il rapporto delle frequenze è allora

$$\frac{40 \text{ s}^{-1}}{13 \text{ s}^{-1}} = 3.$$

ATTIVITÀ 1

Accelerazione di un ciclista

Uno studente mette a disposizione la propria bicicletta dotata di cambio. Si bandisce una gara di accelerazione nel campo scuola sulla pista dei cento metri o in una strada poco frequentata. Posti due traguardi ad una distanza di 30 m circa, ogni concorrente deve percorrere - con partenza da fermo, tale distanza nel tempo minimo. Al tempo minimo corrisponde l'accelerazione massima. Infatti, se pensiamo che il moto sia uniformemente accelerato, la relazione tra velocità media (cioè rapporto tra lo spazio percorso e tempo impiegato) e tempo è

$$V_m = \frac{s}{t} = \frac{1}{2}at$$

da cui

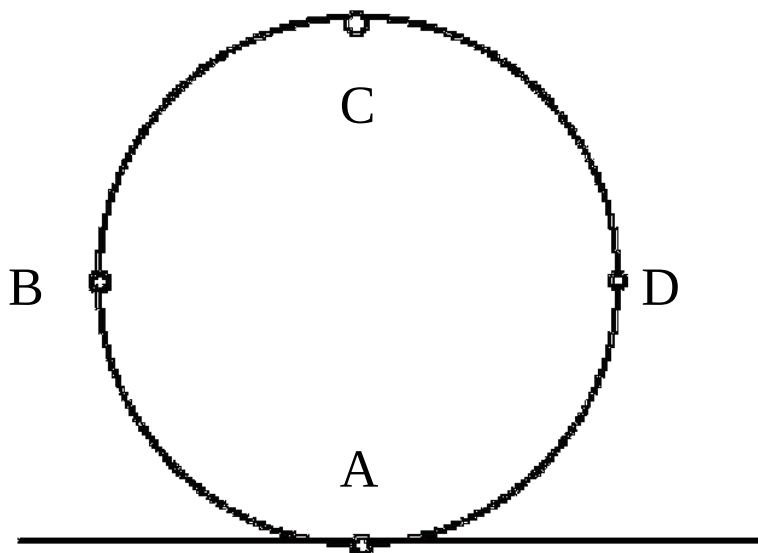
$$a = \frac{2V_m}{t} = \frac{2s}{t^2}.$$

Ogni concorrente dispone di due *manches*: una con un cambio basso e una con un cambio alto. Sarà maggiore l'accelerazione con il cambio basso o quella con il cambio alto?

È legittimo aspettarsi che il rapporto delle accelerazioni sia l'inverso del rapporto dei cambi. Sapresti motivare questa aspettativa?

PROBLEMA 5

Un ciclista corre alla velocità di 24 km/h. Le ruote hanno un raggio di 40 cm. Calcolare intensità, direzione e verso della velocità della valvola della camera d'aria nelle quattro posizioni indicate in figura:



SOLUZIONE

Nella posizione A la velocità è nulla.

Nella posizione C la velocità è diretta orizzontalmente e vale il doppio della velocità della bicicletta.

Nella posizione B la velocità inclinata a 45° verso l'alto ed ha il valore $V\sqrt{2}$.

Nella posizione D la velocità inclinata a 45° verso il basso ed ha il valore $V\sqrt{2}$.

PROBLEMA 6

Un buon automobilista sa che la RIPRESA (cioè la capacità di accelerazione) È un titolo di qualità di un'auto.

Un tale si reca da un concessionario per vedere delle auto e si interessa in particolare di due a proposito delle quali il venditore dice:

Della prima: Raggiunge i 144 km/h in 200 m

Della seconda: Raggiunge i 216 km/h in 20 s

Quale delle due auto ha la migliore ripresa?

SOLUZIONE

La prima collega la velocità raggiunta allo spazio percorso; la seconda al tempo impiegato. Nel primo caso

$$V^2 = 2as,$$

nel secondo

$$V = at$$

Le velocità raggiunte nei due casi sono

$$V_1 = 144 \frac{km}{h} = 40 \frac{m}{s} \quad V_2 = 216 \frac{km}{h} = 60 \frac{m}{s}.$$

Le due accelerazioni sono quindi

$$a_1 = \frac{V_1^2}{2s} = 4 \frac{m}{s^2} \quad a_2 = \frac{V_2}{t} = 3 \frac{m}{s^2}.$$

La macchina che ha la migliore ripresa è la prima.

PROBLEMA 7

Due amici, Mario e Luigi, camminano alla velocità di 280 m di dislivello all'ora, su un sentiero di montagna per il quale prevedono una durata di 3 ore.

Dopo un'ora di cammino Mario chiede di fermarsi a riposare presso una malga; ma Luigi sceglie di proseguire con lo stesso passo: «Tanto, tu mi raggiungi senz'altro». E così, dopo un quarto d'ora, Mario riparte con una velocità un po' superiore: 320 m di dislivello all'ora. Vogliamo sapere se Mario raggiungerà l'amico prima dell'arrivo alla meta.

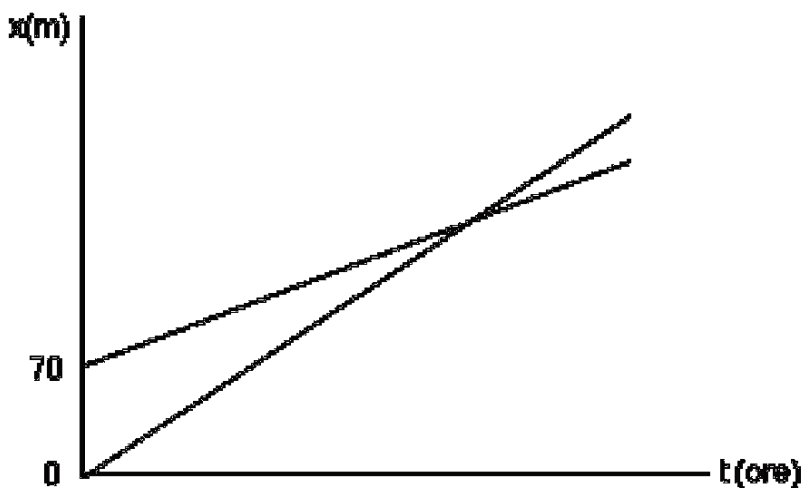
• SOLUZIONE 1

Prendiamo come origine del sistema di riferimento la posizione di partenza e come origine dei tempi il momento della (ri)partenza di Mario. Le equazioni dei moti sono

$$y_M = 320t$$

$$y_L = 280\left(t + \frac{1}{4}\right)$$

e le loro rappresentazioni grafiche



Mario raggiunge l'amico nel momento in cui $y_M = y_L$, cioè per

$$280\left(t + \frac{1}{4}\right) = 320t \Rightarrow t = \frac{7}{4} = 1h + \frac{3}{4}h.$$

Pertanto, Mario raggiunge Luigi un quarto d'ora prima che raggiunga la meta.

• SOLUZIONE 2

Nel sistema di riferimento di Luigi, Mario si avvicina alla velocità di

$$(320 - 280)\frac{m}{h} = 40\frac{m}{h}$$

pertanto, nel sistema di riferimento di Luigi, il moto di Mario è descritto dall'equazione

$$y = \frac{280}{4} - 40t.$$

La distanza si annulla per $t = \frac{280}{4 \times 40} = \frac{7}{4}h$

ATTIVITÀ 2

Prendete la vostra bicicletta e contate il numero dei denti sulla corona e sul pignone. Misurate quindi quanti giri fa la ruota posteriore per ogni giro del pedale. Sapreste trovare quale relazione vi è tra i valori che avete trovato?

Misurate anche il raggio della ruota e calcolate il PASSO, cioè di quanto si sposta la bicicletta per ogni giro del pedale.

Sapreste calcolare quanti colpi di pedale bisogna dare al minuto per andare alla velocità (ad esempio) di 20 km/h?

PROBLEMA 8

Un automobilista sta viaggiando sull'autostrada e il tachimetro indica 120 km/h. Il contakilometri segna 32640 km. Mette la macchina in folle e, quando è fermo, legge sul contakilometri 32644 km. Qual è stata la decelerazione? Quanto è durata la frenata?

SOLUZIONE

La decelerazione dura per un tratto

$$s = (32644 - 32640) \text{ km} = 4 \text{ km}.$$

Amnesso che il moto sia uniformemente decelerato, vale la relazione

$$V^2 = 2as$$

da cui

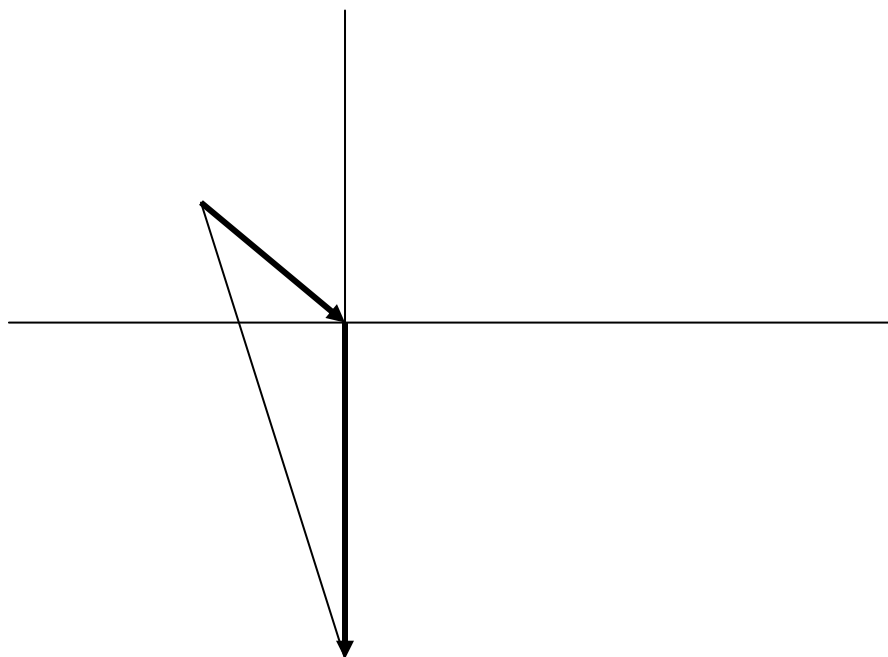
$$a = \frac{V^2}{2s} = \frac{33,3^2}{2 \times 4000} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,14 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

PROBLEMA 9

BANDIERE AL VENTO

La bandiera issata sul più alto pennone di una barca garrisce sotto un maestrale (vento da nord-ovest) che ha una velocità di 2 m/s. La barca affronta il mare facendo rotta verso sud alla velocità di 12 nodi (un nodo equivale a 1,8 km/h). In che direzione si disporrà la bandiera?

SOLUZIONE

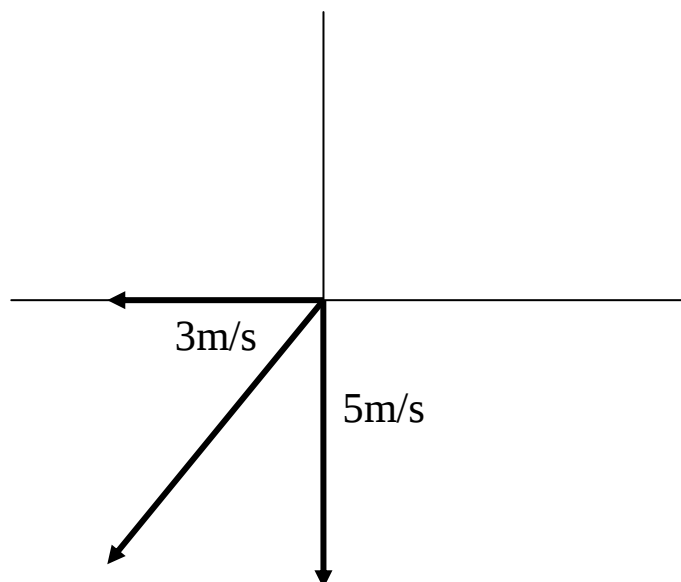


Si fa un disegno in scala e si trova per la velocità risultante $V=7,55$ m/s con un'inclinazione, rispetto alla direzione est-ovest di 79° .

PROBLEMA 10

Un tedoforo corre con la fiaccola in mano alla velocità di 5 m/s in direzione nord. Si alza un vento da est che ha una velocità di 3 m/s. Quale sarà la direzione del fumo? Gli converrà portare la fiaccola con la destra o la sinistra?

SOLUZIONE



Basta fare un disegno in scala. La velocità risultante è di 5,8 m/s e forma un angolo di 59° con la direzione est-ovest.

PROBLEMA 11

Si assume come potere di risoluzione dell'occhio umano l'angolo di ampiezza $1'$. Prendiamo un disco di quelli che una volta si chiamavano "microsolco" o "LP". Il suo raggio interno è 7 cm; l'esterno 15 cm e dura 35 minuti. Si sa che la frequenza di rotazione è 33,3 giri/minuto. Vogliamo sapere se i solchi sono distinguibili a occhio nudo.

SOLUZIONE

In 35 minuti il disco compie $35 \times 33,3 \cong 1200$ giri. Pertanto, in uno spessore di $15 - 7 = 8$ cm trovano posto 1200 solchi. La distanza tra due di questi è $d = \frac{8}{1,2 \times 10^3} \text{ cm} \cong 7 \times 10^{-3} \text{ cm}$. La distanza della visione distinta è circa 25 cm e a questa distanza l'angolo che separa i due solchi adiacenti è

$$\vartheta = \frac{7 \times 10^{-3}}{25} \cong 0,4 \times 10^{-3} \text{ (in radianti)}.$$

Volendo la misura in gradi

$$\vartheta \cong 4 \times 10^{-4} \times \frac{180^\circ}{\pi} \cong (2 \times 10^{-2})^\circ = 1,2'$$

che è leggermente superiore alla soglia di risolubilità.

PROBLEMA 12

Un CD ha un raggio interno di 2,8 cm ed uno esterno che misura il doppio. La sua durata è di un'ora e un quarto. Il raggio laser lo percorre alla velocità costante di 1,3 m/s. Vogliamo calcolare il numero dei giri che compie il disco e la distanza tra due tracce adiacenti.

SOLUZIONE

A percorrere la prima traccia il raggio impiega un tempo

$$t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times 2,8}{1,3} \frac{\text{cm}}{\text{m/s}} \cong 12,5 \times 10^{-2} \text{ s}$$

che corrisponde ad una frequenza

$$F = \frac{1}{t} = \frac{1}{0,125} \text{ s}^{-1} \cong 8 \text{ s}^{-1}.$$

Man mano che il raggio passa dall'interno verso l'esterno, la frequenza diminuisce fino a ridursi alla metà (raggio doppio). La frequenza media è quindi 6 s^{-1} . In un'ora e un quarto ci sono $1,25 \times 3,6 \times 10^3 \text{ s} \cong 4,5 \times 10^3 \text{ s}$.

Se il disco fa 6 giri al secondo, in questo tempo compie

$$6 \times 4,5 \times 10^3 = 27 \times 10^3 = 2,7 \times 10^4 \text{ giri};$$

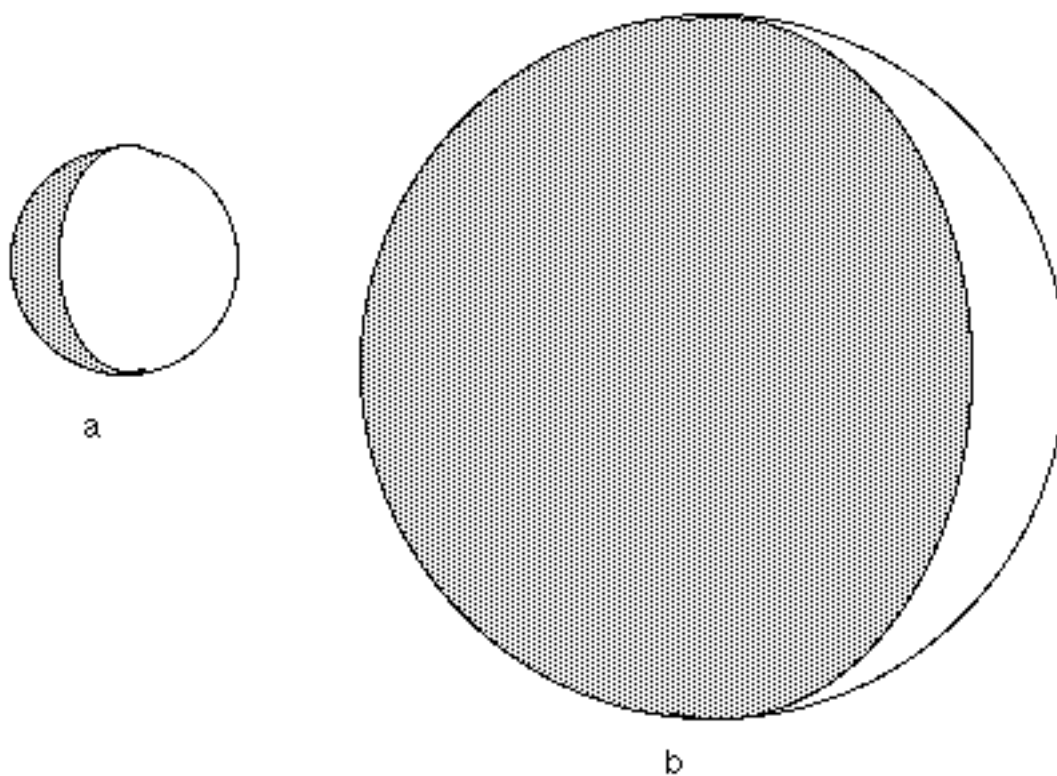
e questo è il numero dei solchi. La loro distanza è pertanto

$$s = \frac{2,8}{2,7 \times 10^4} \text{ cm} \cong 10^{-4} \text{ cm}.$$

Rispetto alla distanza che separa due solchi di un LP (problema precedente) è

$$\frac{7 \times 10^{-3} \text{ cm}}{10^{-4} \text{ cm}} = 70 \text{ volte più piccola. Pertanto, è inferiore all'acuità visiva.}$$

PROBLEMA 13
FASI DI VENERE



L'11 Dicembre 1610 Galileo inviò a Giuliano de' Medici, ambasciatore di Firenze a Praga, un misterioso messaggio: «**Haec immatura a me iam frustra leguntur o y**».

Su questo messaggio in codice - poiché si trattava di un anagramma - Keplero si sforzò inutilmente per due mesi; fino a che arrivò dallo stesso Galileo la soluzione:

«...**Cynthiae figuras aemulatur mater amorum**», cioè che «Venere imita le figure della luna.». Era l'annuncio della scoperta che il pianeta Venere ha le fasi - primo quarto, Venere piena, ecc. - come la Luna.

Venere è grande circa come la Terra (6000 km di raggio) e percorre un'orbita di raggio 0,72 unità astronomiche (Un'unità astronomica è la distanza della Terra dal Sole = $1,5 \times 10^8$ km). Qual è la minima distanza di Venere dalla Terra? Perché, anche alla minima distanza, le fasi di Venere non sono visibili ad occhio nudo?

SOLUZIONE

La minima distanza tra la Terra e Venere è

$$(1 - 0,72)UA = 0,28 \times 1,5 \times 10^{11} m = 4,2 \times 10^{10} m$$

A questa distanza la larghezza angolare è

$$\theta = \frac{6 \times 10^6}{4,2 \times 10^{10}} rad = 1,43 \times 10^{-4} rad$$

che corrispondono a

$$\theta = \left(1,43 \times 10^{-4} \times \frac{180}{\pi} \right)^{\circ} = 0,49 \text{ min} .$$

Poiché l'acutezza visiva per una persona normale è appena inferiore ad un minuto d'angolo, si vede che le dimensioni angolari di Venere sono al limite. D'altra parte, quando Venere è al minimo della distanza, volge alla Terra la faccia in ombra e quindi è difficilmente visibile.

PROBLEMA 14 VECCHI DISCHI

Un vecchio disco microsolco girava alla frequenza di 33,3 giri/minuto. Il raggio interno era di 6 cm e quello esterno di 15 cm. Se la durata del pezzo era di 30 minuti, qual era la lunghezza totale del solco e quale la distanza tra due solchi adiacenti?

SOLUZIONE

33,3 giri/minuto equivalgono a 0,555 giri/s. In 30 minuti il disco faceva 1000 giri; il primo di raggio 15 cm, l'ultimo di raggio 6 cm. Il raggio medio è quindi $21/2 \text{ cm} = 10,5 \text{ cm}$. La lunghezza della traccia è quindi

$$L = 1000 \times 2\pi \times 10,5 \text{ cm} = 6,6 \times 10^4 \text{ cm} = 264 \text{ m}$$

La distanza tra i solchi era

$$d = \frac{15 - 6}{1000} \text{ cm} = 0,09 \text{ mm} .$$

PROBLEMA 15

La fotografia qui riportata rappresenta una ruota da bicicletta che gira intorno ad un asse fermo. Si osservi che le immagini dei raggi sono settori circolari, proprio a motivo del fatto che sono stati ripresi in movimento. Ammesso che il tempo di apertura del diaframma sia di 10 ms , qual è la velocità angolare della ruota?



SOLUZIONE

Se con un goniometro si misura l'angolo spazzato dal raggio durante il tempo di ripresa, si trova che è circa 4° . Ora 4° in 10 ms corrispondono ad una velocità angolare

$$\omega = \frac{4^\circ}{10^{-2}} \times \frac{\pi}{180^\circ} \cong 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

ovvero, ad un periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \cong 1 \text{ s}.$$

PROBLEMA 16

La fotografia qui riportata rappresenta una ruota da bicicletta ripresa mentre rotola normalmente sulla strada. Si osservi che le immagini dei raggi sono settori circolari, proprio a motivo del fatto che sono stati ripresi in movimento. Ammesso che il tempo di apertura del diaframma sia di 10 ms , qual è la velocità angolare della ruota?



SOLUZIONE

In questo caso il centro istantaneo di rotazione è il punto di contatto della gomma con il pavimento. L'ampiezza dell'angolo per il raggio verticale risulta essere circa $2,9^\circ$, a cui corrisponde una velocità angolare

$$\omega = \frac{2,9^\circ}{10^{-2}} \times \frac{\pi}{180^\circ} \cong 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Significa che il mozzo si sposta con una velocità lineare

$$V = \omega R = 5 \times 0,35 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

PROBLEMA 17

Una bicicletta (ruote da 70 cm di diametro) viaggia alla velocità di 18 km/h. Determinare

a) la velocità angolare delle ruote, b) l'accelerazione del bordo della ruota.

SOLUZIONE

Tra la velocità dei mozzi e la velocità angolare delle ruote sussiste la relazione

$$V = \omega R$$

pertanto

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{5}{0,35} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 14,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

L'accelerazione dei punti del bordo della ruota è solo centripeta, ovvero, diretta verso il mozzo. Pertanto

$$a = \frac{V^2}{R} = \frac{5^2}{0,35} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 71,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

PROBLEMA 18

Un abitante dell'equatore osserva tutte le sere un satellite artificiale che viaggia da est verso ovest, con un periodo di 6 ore esatte. Sulla base di questo solo dato, è possibile calcolare il raggio dell'orbita, posto che sia circolare ed equatoriale?

SOLUZIONE

Nel sistema terrestre la velocità angolare del satellite è

$$\omega_S = \frac{2\pi}{T_S} = \frac{2\pi}{4 \times 3,6 \times 10^3} = 4,36 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Ma la Terra possiede una velocità angolare

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T_T} = \frac{2\pi}{24 \times 3,6 \times 10^3} = 7,27 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

In un sistema di riferimento che ha l'origine nel centro della Terra, ma sia ancorato alle stelle, la velocità angolare del satellite è

$$\omega = \omega_S - \omega_T = 3,63 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Questa è la velocità angolare assoluta del satellite. Ma, per la terza legge di Keplero, la velocità angolare dipende dalla distanza dal centro della Terra:

$$\omega^2 d^3 = g R^2$$

dove d è il raggio dell'orbita del satellite, g l'accelerazione di gravità ed R il raggio della Terra. Pertanto,

$$\frac{d}{R} = \sqrt[3]{\frac{g}{R\omega^2}} = 4,2.$$

Il raggio dell'orbita è 4,2 raggi terrestri.

PROBLEMA 19

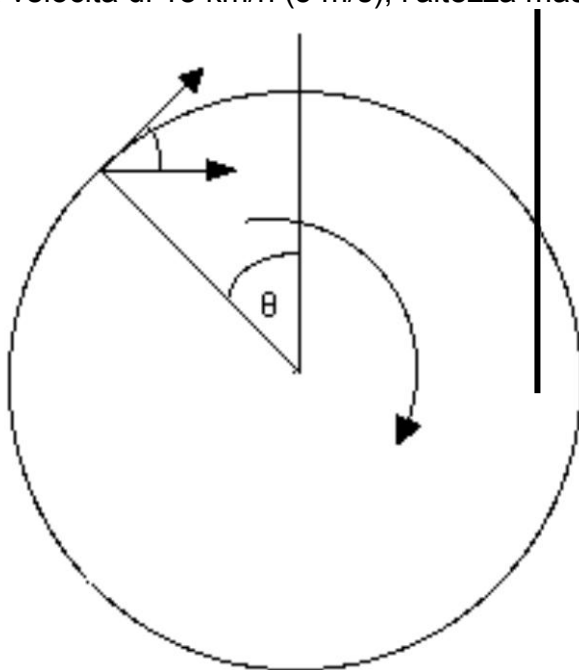
IN BICICLETTA CON LA PIOGGIA

Avrete notato che percorrendo una strada fangosa con una bicicletta priva di parafanghi ci si inzacchera la schiena. Significa che le gocce di fango si staccano dalla ruota nella parte posteriore e vengono lanciate verso l'alto con una velocità orizzontale superiore a quella del ciclista. Spiegate come mai questo sia possibile.

SOLUZIONE

Nel sistema di riferimento del ciclista, il perno è fermo e la goccia di fango viene lanciata in direzione tangenziale con la velocità del bordo ωR . Nel quadrante alto e posteriore, tale velocità è diretta verso la schiena del ciclista che viene raggiunto dal fango.

Per una velocità di 18 km/h (5 m/s), l'altezza massima è 1,2 m al di sopra del mozzo.



La componente orizzontale della velocità è

$$V_o = V \cos \theta$$

che è positiva solo per $-90^\circ < \theta < +90^\circ$.

La componente verticale è

$$V_v = V \sin \theta$$

che è positiva solo per $0^\circ < \theta < +180^\circ$.

Mettiamo che la goccia si stacchi in una certa posizione θ . Se mettiamo che la schiena del ciclista sia la verticale condotta per il mozzo, la goccia dovrà raggiungere l'ascissa zero ad una quota maggiore di R . Le equazioni del moto sono

$$x = -R \sin \theta + V \cos \theta t$$

$$y = R \cos \theta + V \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

Sarà $x=0$ per $t = \frac{R}{V} \tan \theta$, e in tale istante dovrà essere

$$R \cos \theta + V \sin \theta \frac{R}{V} \tan \theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{R}{V} \tan \theta \right)^2 > R$$

e da questa

$$\left(1 - \frac{1}{2} g \frac{R}{V^2} \right) \cos^2 \theta - \cos \theta + \frac{1}{2} g \frac{R}{V^2} < 0.$$

Risolvendo si ricava

$$\frac{\frac{1}{2} g \frac{R}{V^2}}{1 - \frac{1}{2} g \frac{R}{V^2}} < \cos \theta < 1$$

e infine

$$0 < \theta < \arccos \left[\frac{\frac{1}{2} g \frac{R}{V^2}}{1 - \frac{1}{2} g \frac{R}{V^2}} \right]$$

Per es. per una velocità di 5 m/s e con un raggio di 35 cm, l'intervallo angolare è $0^\circ < \theta < 85^\circ$.

Il massimo della quota si ha per

$$\cos \theta = \frac{gR}{V^2}$$

a cui corrisponde

$$y_{Max} = \frac{1}{2} \frac{V^2}{g} \left[1 + \left(\frac{gR}{V^2} \right)^2 \right].$$

Il termine

$\left(\frac{gR}{V^2} \right)^2$ è molto minore di 1, per cui si può trascurare.

Il risultato è che l'altezza massima raggiunta dalle gocce è indipendente dal raggio:

$$y_{Max} = \frac{1}{2} \frac{V^2}{g}.$$

Per esempio, per una velocità di 5 m/s è circa 1,25 m.

PROBLEMA 20

(Tratto dal manuale di Ganot, 1861)

Lasciata cadere una pietra in un pozzo, il suono che la pietra produce incontrando l'acqua si ode 3 secondi dopo che fu abbandonata. Si domanda a quale profondità trovasi l'acqua, sapendo che il suono percorre 337 metri per secondo.

SOLUZIONE INGENUA

Ai 3 secondi contribuiscono il tempo di caduta della pietra e quello di risalita del suono:

$$t_c + t_s = 3.$$

Ovvero

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{H}{c} = 3$$

avendo ipotizzato un moto accelerato per la caduta (c è la velocità del suono, 340 m/s). Inserendo i valori,

$$\sqrt{\frac{2H}{9,8}} + \frac{H}{340} = 3$$

ovvero

$$0,451\sqrt{H} + \frac{H}{340} = 3 \Rightarrow H + 153,6\sqrt{H} - 1020 = 0.$$

Questa si risolve con la nota formula:

$$\sqrt{H} = 6,376 \text{ (in quali unità di misura?)}$$

e infine

$$H = 40,65 \text{ m.}$$

Il tempo di caduta vero e proprio è

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} = 2,88 \text{ s}$$

e il ritardo dovuto alla velocità del suono

$$\frac{H}{c} = 0,12 \text{ s.}$$

SOLUZIONE DA FISICO

Il ritardo comportato dal suono diventa paragonabile al tempo di caduta solo quando

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx \frac{H}{c}$$

cioè per

$$H \approx \frac{2c^2}{g} \approx 12 \text{ km}$$

ma, in tal caso il tempo sarebbe molto maggiore.

Nel nostro caso

$$\sqrt{\frac{2H_0}{g}} \approx 3 \Rightarrow H_0 \approx 9 \frac{g}{2} = 44 \text{ m}$$

Su una distanza così piccola il ritardo dovuto alla velocità del suono dev'essere di un decimo di secondo circa; per cui

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 3,0 - 01 = 2,9 \text{ s.}$$

L'altezza della caduta sarà quindi

$$H \approx \left(\frac{2,9}{3}\right)^2 H_0 = 41 \text{ m.}$$

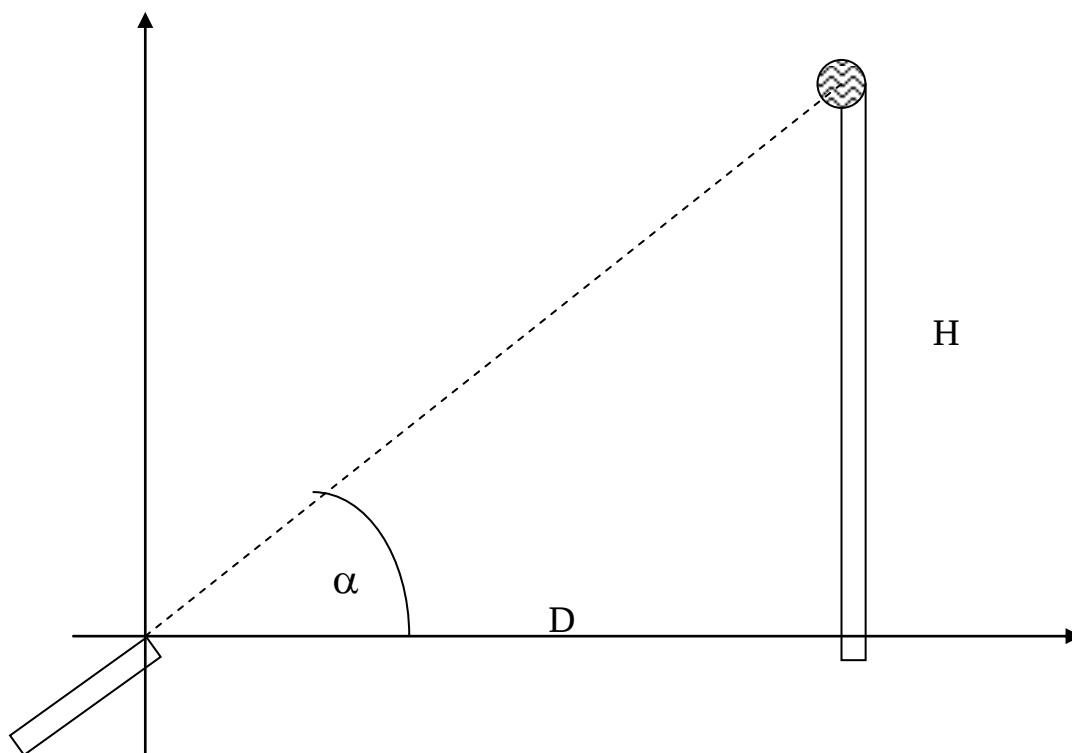
PROBLEMA 21

UN CLASSICO: LA SCIMMIA E IL CACCIATORE

Un cacciatore munito di cerbottana inquadra una scimmia sulla cima di un albero. La inquadra nel senso che, guardando attraverso il tubo, vede la scimmia e, in questa posizione blocca l'arma. Vi introduce quindi la pallottola e infine spara. Tuttavia, nell'istante in cui il proiettile esce dalla canna della cerbottana, la scimmia si lascia cadere. La domanda è: il proiettile colpirà la scimmia oppure no?

SOLUZIONE PEDANTE

Assumiamo come sistema di riferimento l'asse orizzontale che, passando per l'estremità della cerbottana, punta verso l'albero su cui si trova il bersaglio. Come asse verticale quello che passa per la bocca della canna.



Se V_0 è la velocità del proiettile all'uscita dalla canna, e

$$\tan \alpha = \frac{H}{D},$$

le equazioni del moto del proiettile sono

$$x_p = V_0 \cos \alpha t$$

$$y_p = V_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

quelle del moto della scimmia sono

$$x_S = D$$

$$y_S = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

Si tratta di dimostrare che vi è un istante in cui assumono gli stessi valori, qualunque sia la distanza D della cerbottana dall'albero.

Ora,

$$x_p = x_S \Rightarrow V_0 \cos \alpha t = D$$

e

$$y_p = y_S \Rightarrow V_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 = H - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow V_0 \sin \alpha t = H.$$

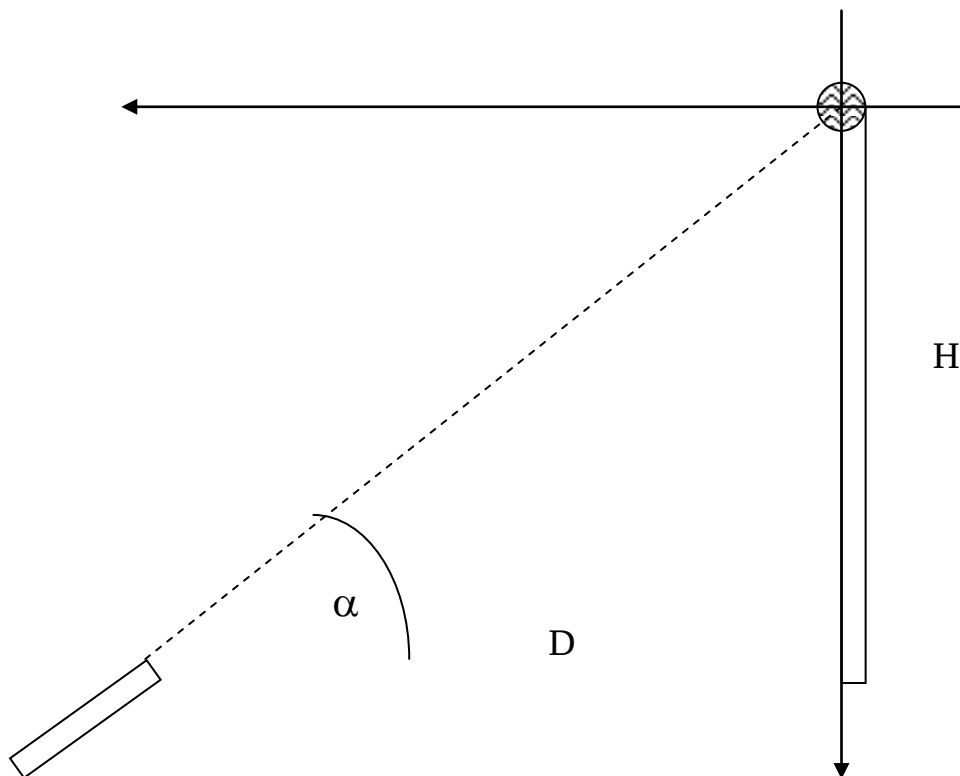
Facendo il rapporto tra le ultime due si ottiene

$$\frac{V_0 \sin \alpha t}{V_0 \cos \alpha t} = \tan \alpha = \frac{H}{D}$$

cioè la sola condizione è che la cerbottana sia puntata verso la posizione iniziale del bersaglio.

SOLUZIONE DA FISICO

Mettiamoci nel sistema di riferimento della scimmia.

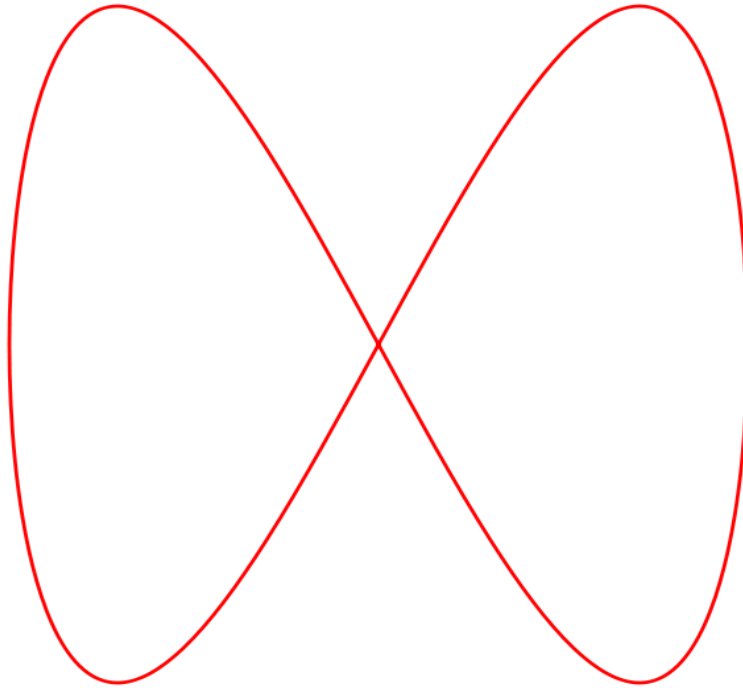


Con ciò intendiamo il sistema di riferimento che cade con la scimmia. Si tratta di un sistema inerziale (in cui è cancellata la forza di gravità). In un sistema inerziale un corpo (il proiettile) mantiene inalterata la propria velocità, in modulo e direzione. In questo sistema la cerbottana spara e comincia ad accelerare verso l'alto; ma questo non c'entra con il moto del proiettile che è rettilineo e uniforme con velocità V_0 diretta verso la posizione della scimmia, che è ferma. Quindi, è ovvio che il proiettile colpisca il bersaglio.

PROBLEMA 22

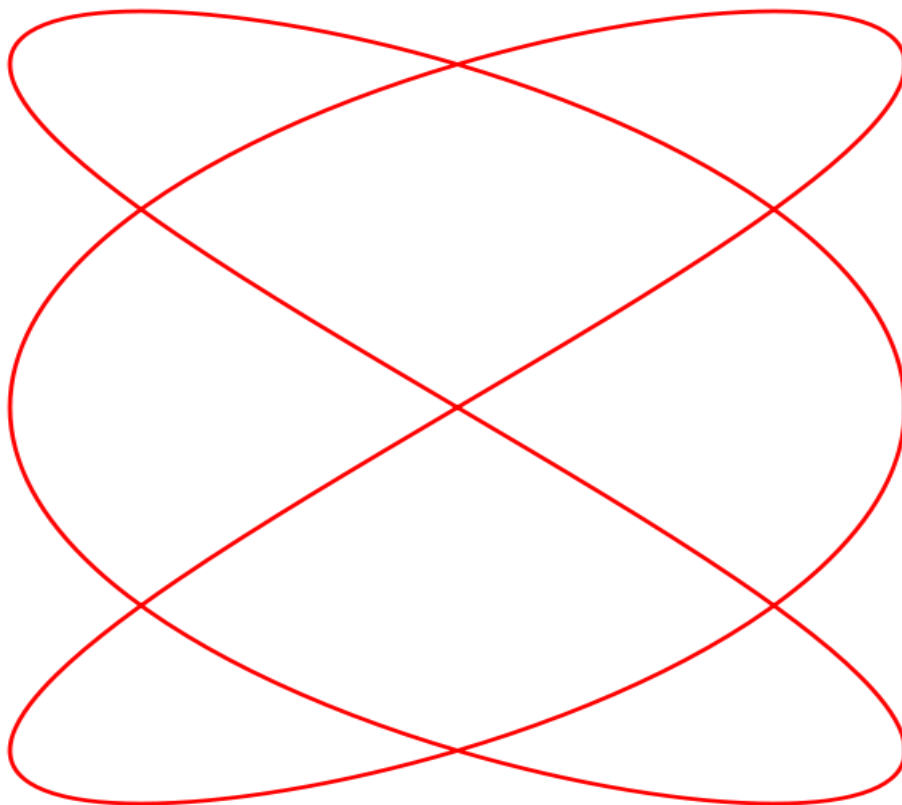
FIGURE DI LISSAJOUS

Sullo schermo di un oscilloscopio si produce la figura seguente.



Se la frequenza sull'asse orizzontale è 50 Hz, qual è la frequenza sull'asse verticale?

Rispondere alla stessa domanda nel caso della figura seguente:



Ledo Stefanini
Università di Mantova