

Assiomi, definizioni, teoremi

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

Parte I

percorso semplificato

- 1 Assiomi
- 2 Definizioni
- 3 Teoremi
- 4 Dimostrazioni

In questa lezione introduciamo alcuni costituenti fondamentali della Matematica.

In questa lezione introduciamo alcuni costituenti fondamentali della Matematica.

Iniziamo dagli *assiomi*.

Assiomi

Che cos'è un assioma?

Un *assioma* è un enunciato che si assume vero, per evidenza o per convenzione.

Assiomi

Che cos'è un assioma?

Un *assioma* è un enunciato che si assume vero, per evidenza o per convenzione.

Gli assiomi sono enunciati non dimostrabili; essi vanno accettati o rifiutati.

Assiomi

Che cos'è un assioma?

Un *assioma* è un enunciato che si assume vero, per evidenza o per convenzione.

Gli assiomi sono enunciati non dimostrabili; essi vanno accettati o rifiutati.

Gli assiomi sono in generale enunciati molto semplici, evidenti di per sé.

Assiomi

Che cos'è un assioma?

Un *assioma* è un enunciato che si assume vero, per evidenza o per convenzione.

Gli assiomi sono enunciati non dimostrabili; essi vanno accettati o rifiutati.

Gli assiomi sono in generale enunciati molto semplici, evidenti di per sé. Vedremo fra poco alcuni esempi di assiomi della Matematica.

Non solo in Matematica vi sono degli assiomi.

Non solo in Matematica vi sono degli assiomi.

COSTITUZIONE ITALIANA

PRINCIPI FONDAMENTALI

Art. 1

L'Italia è una Repubblica democratica, fondata sul lavoro.

La sovranità appartiene al popolo, che la esercita nelle forme e nei limiti della Costituzione.

Non solo in Matematica vi sono degli assiomi.

COSTITUZIONE ITALIANA

PRINCIPI FONDAMENTALI

Art. 1

L'Italia è una Repubblica democratica, fondata sul lavoro.

La sovranità appartiene al popolo, che la esercita nelle forme e nei limiti della Costituzione.

La Costituzione è un elenco di assiomi che chi fa le *leggi* deve rispettare.

Non solo in Matematica vi sono degli assiomi.

COSTITUZIONE ITALIANA

PRINCIPI FONDAMENTALI

Art. 1

L'Italia è una Repubblica democratica, fondata sul lavoro.

La sovranità appartiene al popolo, che la esercita nelle forme e nei limiti della Costituzione.

La Costituzione è un elenco di assiomi che chi fa le *leggi* deve rispettare. Una legge che affermasse, per esempio “In Italia c'è il Re” sarebbe in contrasto con l'articolo 1 e quindi incostituzionale.

In molti *giochi* vi sono degli assiomi “nascosti”:

In molti *giochi* vi sono degli assiomi “nascosti”:



In molti *giochi* vi sono degli assiomi “nascosti”:



Il fatto che il cavallo degli scacchi si muova “ad L” è un assioma: se non lo si accetta si gioca un altro gioco.

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in Geometria) Per due punti passa una e una sola retta;

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in Geometria) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in Algebra) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in Geometria) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in Algebra) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;
- (in teoria degli insiemi) Esiste un insieme che non contiene alcun elemento (l'insieme vuoto);

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in **Geometria**) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in **Algebra**) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;
- (in **teoria degli insiemi**) Esiste un insieme che non contiene alcun elemento (l'insieme vuoto);
- (in **Informatica**) Un bit può assumere solo due stati, indicati convenzionalmente con 0 e 1;

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in **Geometria**) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in **Algebra**) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;
- (in **teoria degli insiemi**) Esiste un insieme che non contiene alcun elemento (l'insieme vuoto);
- (in **Informatica**) Un bit può assumere solo due stati, indicati convenzionalmente con 0 e 1;
- (in **Logica**) Due cose uguali sono indistinguibili;

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in **Geometria**) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in **Algebra**) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;
- (in **teoria degli insiemi**) Esiste un insieme che non contiene alcun elemento (l'insieme vuoto);
- (in **Informatica**) Un bit può assumere solo due stati, indicati convenzionalmente con 0 e 1;
- (in **Logica**) Due cose uguali sono indistinguibili;
- (in **Probabilità**) La probabilità di un evento non è mai negativa;

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

Tutti gli enunciati della matematica devono essere dedotti, con l'uso della logica, *solo e soltanto* a partire dagli assiomi.

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

Tutti gli enunciati della matematica devono essere dedotti, con l'uso della logica, *solo e soltanto* a partire dagli assiomi.

La difficoltà risiede spesso nel fatto che, a volte, nel dedurre un enunciato, si usano *inconsapevolmente* degli assiomi.

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

Tutti gli enunciati della matematica devono essere dedotti, con l'uso della logica, *solo e soltanto* a partire dagli assiomi.

La difficoltà risiede spesso nel fatto che, a volte, nel dedurre un enunciato, si usano *inconsapevolmente* degli assiomi.
In questo caso, se essi sono necessari, si devono aggiungere.

Definizioni

Il concetto di *definizione* è, per certi versi, più subdolo di quello di assioma.

Definizioni

Il concetto di *definizione* è, per certi versi, più subdolo di quello di assioma.

Che cos'è una definizione?

Una definizione non è altro che un'abbreviazione di concetti più difficili, o un nuovo nome che si dà a cose importanti.

Definizioni

Il concetto di *definizione* è, per certi versi, più subdolo di quello di assioma.

Che cos'è una definizione?

Una definizione non è altro che un'abbreviazione di concetti più difficili, o un nuovo nome che si dà a cose importanti.

Guardiamo questo esempio:

Il codice della strada

Art. 2. Definizione e classificazione delle strade

1. Ai fini dell'applicazione delle norme del presente codice si definisce "strada" l'area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali.

(dal Decreto Legislativo 30 aprile 1992, n.285)

Il codice della strada

Art. 2. Definizione e classificazione delle strade

1. Ai fini dell'applicazione delle norme del presente codice si definisce "strada" l'area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali.

(dal Decreto Legislativo 30 aprile 1992, n.285)

Anche se tutti crediamo di sapere cosa sia una "strada", scopriamo che le "strade private" non sono strade per il Codice stradale.

Il codice della strada

Art. 2. Definizione e classificazione delle strade

1. Ai fini dell'applicazione delle norme del presente codice si definisce "strada" l'area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali.

(dal Decreto Legislativo 30 aprile 1992, n.285)

Anche se tutti crediamo di sapere cosa sia una "strada", scopriamo che le "strade private" non sono strade per il Codice stradale.

Il Legislatore, chiaramente, non può stare a scrivere ogni volta "area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali", e quindi ha coniato il termine "strada" per *abbreviare* questo concetto.

Il codice della strada

Art. 2. Definizione e classificazione delle strade

1. Ai fini dell'applicazione delle norme del presente codice si definisce "strada" l'area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali.

(dal Decreto Legislativo 30 aprile 1992, n.285)

Anche se tutti crediamo di sapere cosa sia una "strada", scopriamo che le "strade private" non sono strade per il Codice stradale.

Il Legislatore, chiaramente, non può stare a scrivere ogni volta "area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali", e quindi ha coniato il termine "strada" per *abbreviare* questo concetto.

Vediamo ora un esempio matematico.

Geometria

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Geometria

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Qui vogliamo sostituire l'espressione "rette con un solo punto in comune" con "rette incidenti", dato che abbiamo in mente di usare spesso questo concetto.

Geometria

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Qui vogliamo sostituire l'espressione "rette con un solo punto in comune" con "rette incidenti", dato che abbiamo in mente di usare spesso questo concetto.

Le definizioni, di per sé semplici, possono dare origine a molti fraintendimenti.

Geometria

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Qui vogliamo sostituire l'espressione "rette con un solo punto in comune" con "rette incidenti", dato che abbiamo in mente di usare spesso questo concetto.

Le definizioni, di per sé semplici, possono dare origine a molti fraintendimenti.

Vediamo quest'altro esempio:

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!” ,

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!”, e sarebbe un grave errore!!!.

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!”, e sarebbe un grave errore!!!.

Perché? Non è forse vero che due rette sono incidenti hanno un solo punto in comune?

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!”, e sarebbe un grave errore!!!.

Perché? Non è forse vero che due rette sono incidenti hanno un solo punto in comune?

La definizione è data male perché può essere letta *come un enunciato*, cosa che non è *mai*.

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!”, e sarebbe un grave errore!!!.

Perché? Non è forse vero che due rette sono incidenti hanno un solo punto in comune?

La definizione è data male perché può essere letta *come un enunciato*, cosa che non è *mai*.

In questo caso si fa appello ad una parola che forse già si conosce (incidenti), mentre si vuol dire “se due rette ecc. ecc., allora si dicono ‘incidenti’”.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (cattiva) Un numero è pari se è divisibile per due.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (cattiva) Un numero è pari se è divisibile per due.
- (buona) Un numero si dice *pari* se è divisibile per due.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (cattiva) Un numero è pari se è divisibile per due.
- (buona) Un numero si dice *pari* se è divisibile per due.

I matematici usano spesso, per le definizioni, delle parole del linguaggio, e quindi rischiano di generare confusione. A volte poi sono irresistibili:

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (cattiva) Un numero è pari se è divisibile per due.
- (buona) Un numero si dice *pari* se è divisibile per due.

I matematici usano spesso, per le definizioni, delle parole del linguaggio, e quindi rischiano di generare confusione. A volte poi sono irresistibili:

Si dice *massimo* di un insieme numerico il massimo valore dei suoi elementi.

Teoremi

Le conseguenze degli assiomi, dedotte con il ragionamento logico, sono dette *teoremi*.

Teoremi

Le conseguenze degli assiomi, dedotte con il ragionamento logico, sono dette *teoremi*.

Che cos'è un teorema?

Un *teorema* è un enunciato dedotto per via logica dagli assiomi. Se gli assiomi sono assunti veri, allora anche i teoremi da essi dedotti sono veri.

Teoremi

Le conseguenze degli assiomi, dedotte con il ragionamento logico, sono dette *teoremi*.

Che cos'è un teorema?

Un *teorema* è un enunciato dedotto per via logica dagli assiomi. Se gli assiomi sono assunti veri, allora anche i teoremi da essi dedotti sono veri.

La Matematica è piena di teoremi: anche se nei libri si vedono numerose parti discorsive, esse sono inserite solo per spiegare quanto si vuol fare. In realtà sarebbe possibile ridursi ai soli teoremi con le loro dimostrazioni (e i libri di Matematica sarebbero ancora più illeggibili).

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
- Se due rette sono incidenti, allora due loro perpendicolari sono incidenti.

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
- Se due rette sono incidenti, allora due loro perpendicolari sono incidenti.

Tutti questi enunciati hanno la forma

Se ... allora...

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
- Se due rette sono incidenti, allora due loro perpendicolari sono incidenti.

Tutti questi enunciati hanno la forma

Se ... allora...

o, se preferite

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
- Se due rette sono incidenti, allora due loro perpendicolari sono incidenti.

Tutti questi enunciati hanno la forma

Se ... allora...

o, se preferite

Se $\langle \text{qualcosa} \rangle$ allora $\langle \text{qualcos'altro} \rangle$.

Struttura di un teorema

“Qualcosa” e “qualcos'altro” hanno due nomi precisi: si chiamano *ipotesi* e *tesi*.

Struttura di un teorema

“Qualcosa” e “qualcos'altro” hanno due nomi precisi: si chiamano *ipotesi* e *tesi*.

La struttura di molti teoremi è quindi la seguente

Se $\langle \textit{ipotesi} \rangle$ allora $\langle \textit{tesi} \rangle$

Struttura di un teorema

“Qualcosa” e “qualcos’altro” hanno due nomi precisi: si chiamano *ipotesi* e *tesi*.

La struttura di molti teoremi è quindi la seguente

Se $\langle \textit{ipotesi} \rangle$ allora $\langle \textit{tesi} \rangle$

oppure, come spesso si scrive,

$$\textit{Ipotesi} \Rightarrow \textit{Tesi}$$

Struttura di un teorema

“Qualcosa” e “qualcos’altro” hanno due nomi precisi: si chiamano *ipotesi* e *tesi*.

La struttura di molti teoremi è quindi la seguente

Se $\langle \textit{ipotesi} \rangle$ allora $\langle \textit{tesi} \rangle$

oppure, come spesso si scrive,

$$\textit{Ipotesi} \Rightarrow \textit{Tesi}$$

che si chiama *implicazione*.

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P .

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente* per Q ;

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;
- Se si ha $P \Longleftrightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione necessaria e sufficiente per* Q , e lo stesso scambiando P e Q .

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;
- Se si ha $P \Longleftrightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione necessaria e sufficiente per* Q , e lo stesso scambiando P e Q .

Per esempio, l'essere un rombo è condizione sufficiente affinché le diagonali siano perpendicolari;

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;
- Se si ha $P \Longleftrightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione necessaria e sufficiente per* Q , e lo stesso scambiando P e Q .

Per esempio, l'essere un rombo è condizione sufficiente affinché le diagonali siano perpendicolari; se una figura è un rettangolo, la condizione che i lati opposti siano uguali è necessaria;

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;
- Se si ha $P \Longleftrightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione necessaria e sufficiente per* Q , e lo stesso scambiando P e Q .

Per esempio, l'essere un rombo è condizione sufficiente affinché le diagonali siano perpendicolari; se una figura è un rettangolo, la condizione che i lati opposti siano uguali è necessaria; essere un triangolo isoscele è condizione necessaria e sufficiente affinché due lati siano uguali.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.
- L'insieme dei numeri relativi non ha minimo.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.
- L'insieme dei numeri relativi non ha minimo.
- La retta è illimitata.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.
- L'insieme dei numeri relativi non ha minimo.
- La retta è illimitata.

Questi enunciati, comunque, possono sempre essere convertiti in implicazioni, con qualche acrobazia:

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.
- L'insieme dei numeri relativi non ha minimo.
- La retta è illimitata.

Questi enunciati, comunque, possono sempre essere convertiti in implicazioni, con qualche acrobazia:

Esempi

- Se P è l'insieme dei numeri primi, allora P è infinito.
- Se n è un numero intero, allora esiste un numero intero inferiore a n .
- Se r è una retta, allora r è illimitata.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi. Esistono sostanzialmente due tipi di dimostrazione.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi. Esistono sostanzialmente due tipi di dimostrazione.

Tipi di dimostrazione

- 1 diretta;
- 2 per assurdo.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi. Esistono sostanzialmente due tipi di dimostrazione.

Tipi di dimostrazione

- 1 diretta;
- 2 per assurdo.

Quella diretta consiste nel partire dall'ipotesi e dedurre la tesi.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi. Esistono sostanzialmente due tipi di dimostrazione.

Tipi di dimostrazione

- 1 diretta;
- 2 per assurdo.

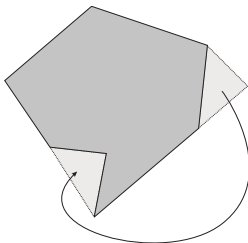
Quella diretta consiste nel partire dall'ipotesi e dedurre la tesi.

Teorema con dimostrazione diretta

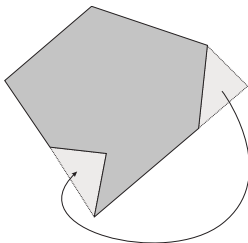
*L'area di un trapezio è data dalla formula
(base maggiore + base minore) · altezza/2.*

Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è $\text{base} \cdot \text{altezza}$.

Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è $\text{base} \cdot \text{altezza}$.

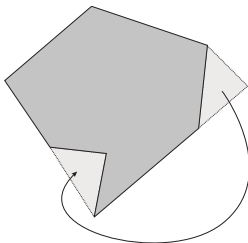


Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è $\text{base} \cdot \text{altezza}$.



Ciò premesso, iniziamo la dimostrazione.

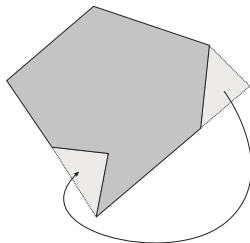
Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è $\text{base} \cdot \text{altezza}$.



Ciò premesso, iniziamo la dimostrazione.

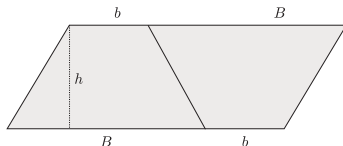
Dimostrazione. Consideriamo due copie del trapezio messe come in figura:

Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne "tagliamo" un pezzo e lo "reincolliamo" da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è base $\cdot$ altezza.

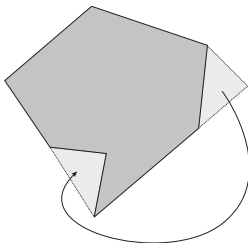


Ciò premesso, iniziamo la dimostrazione.

Dimostrazione. Consideriamo due copie del trapezio messe come in figura:

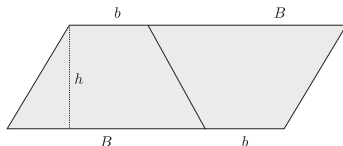


Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è base $\cdot$ altezza.



Ciò premesso, iniziamo la dimostrazione.

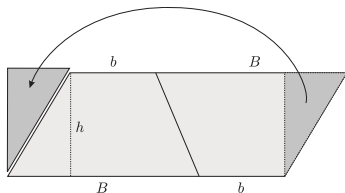
Dimostrazione. Consideriamo due copie del trapezio messe come in figura:



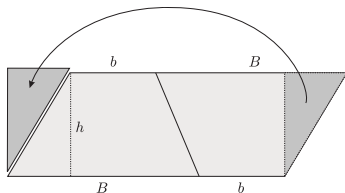
Si tratta di un parallelogramma avente per base la somma delle basi e stessa altezza.

Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:

Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:

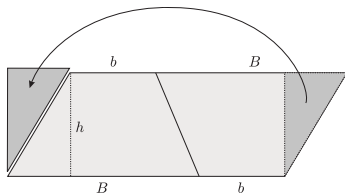


Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:

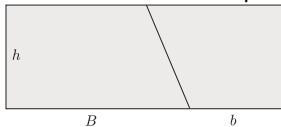


e otteniamo un rettangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza del trapezio.

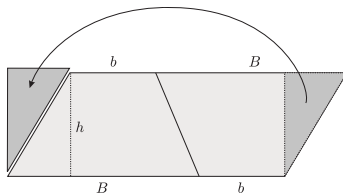
Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:



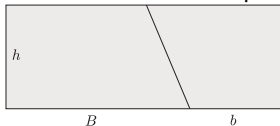
e otteniamo un rettangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza del trapezio.



Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:



e otteniamo un rettangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza del trapezio.



Questo completa la dimostrazione.

La struttura della dimostrazione è diretta:

Trapezio

La struttura della dimostrazione è diretta:

Trapezio

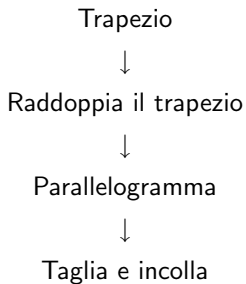


Raddoppia il trapezio

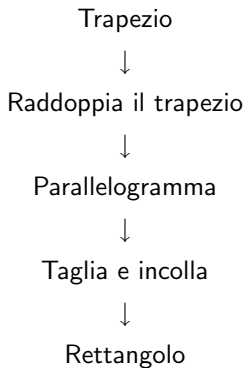
La struttura della dimostrazione è diretta:



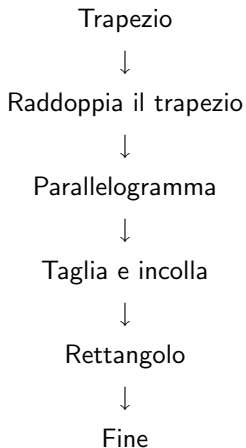
La struttura della dimostrazione è diretta:



La struttura della dimostrazione è diretta:



La struttura della dimostrazione è diretta:



La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa,

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

Il motivo di questo sta in un fatto di Logica.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

Il motivo di questo sta in un fatto di Logica.

Vediamo un esempio.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

Il motivo di questo sta in un fatto di Logica.

Vediamo un esempio.

Sappiamo già cosa sono due rette incidenti. Diamo ora un'altra definizione.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

Il motivo di questo sta in un fatto di Logica.

Vediamo un esempio.

Sappiamo già cosa sono due rette incidenti. Diamo ora un'altra definizione.

Rette parallele

Due rette si dicono *parallele* se non hanno nessun punto in comune.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

Il motivo di questo sta in un fatto di Logica.

Vediamo un esempio.

Sappiamo già cosa sono due rette incidenti. Diamo ora un'altra definizione.

Rette parallele

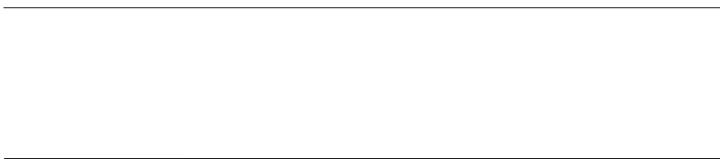
Due rette si dicono *parallele* se non hanno nessun punto in comune.

Siamo soliti disegnare due rette parallele così:

Siamo soliti disegnare due rette parallele così:



Siamo soliti disegnare due rette parallele così:



Vogliamo dimostrare il seguente

Siamo soliti disegnare due rette parallele così:



Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema con dimostrazione per assurdo

Date due rette parallele, se una terza retta è incidente alla prima, allora è incidente anche alla seconda.

Siamo soliti disegnare due rette parallele così:

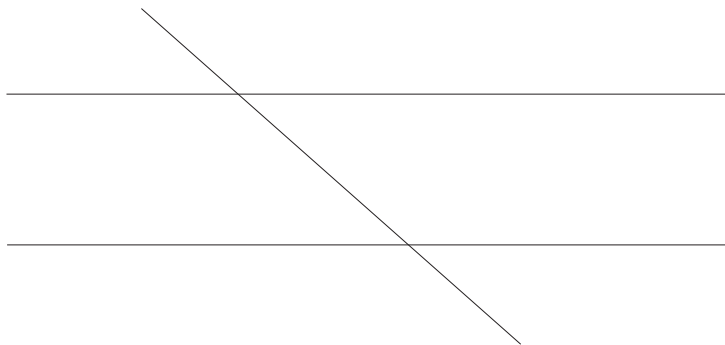


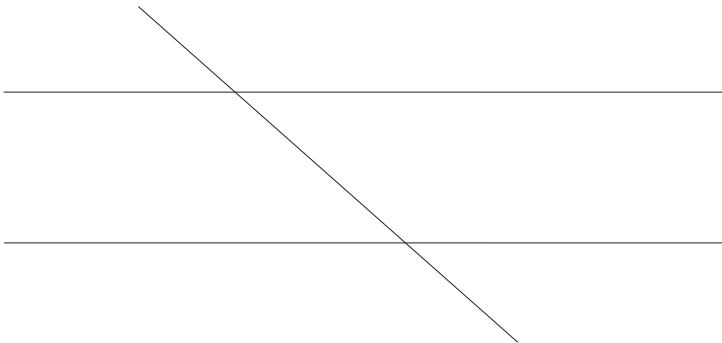
Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema con dimostrazione per assurdo

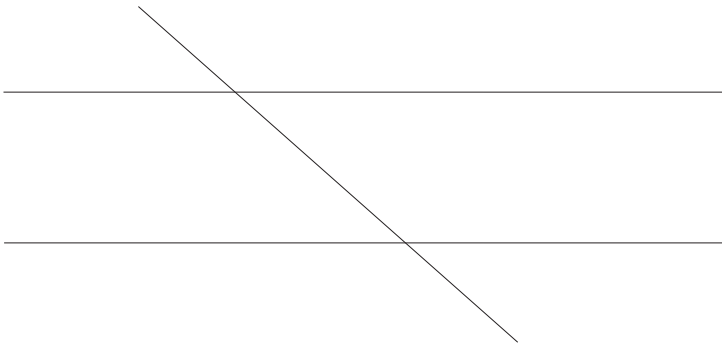
Date due rette parallele, se una terza retta è incidente alla prima, allora è incidente anche alla seconda.

Vediamo subito cosa dice la figura.



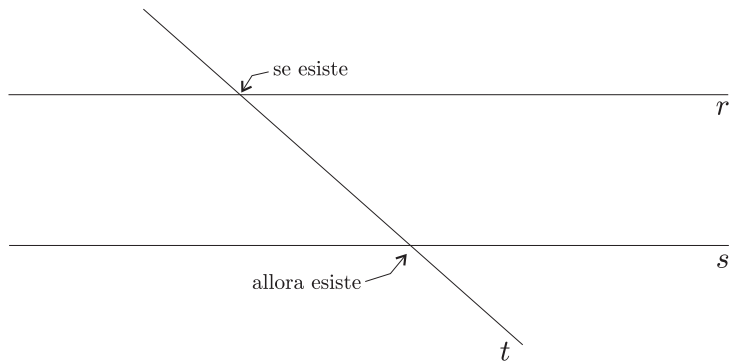


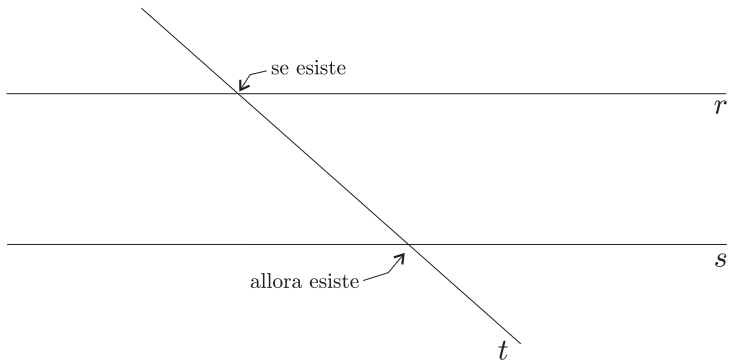
Questa figura non è il massimo: non dice quali siano le rette *che si sanno essere incidenti*, e quali quelle *che si dimostrano essere incidenti*.



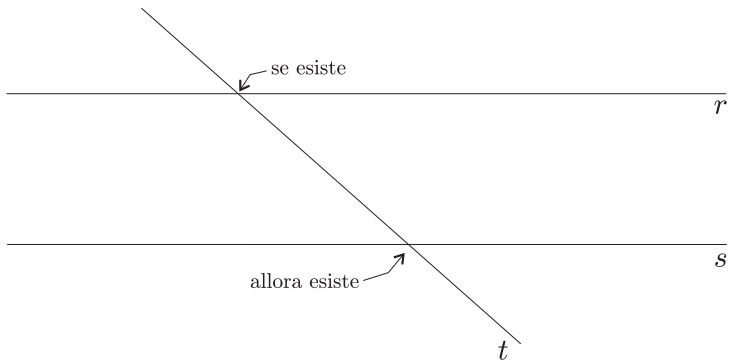
Questa figura non è il massimo: non dice quali siano le rette *che si sanno essere incidenti*, e quali quelle *che si dimostrano essere incidenti*.

La modifichiamo allora così:



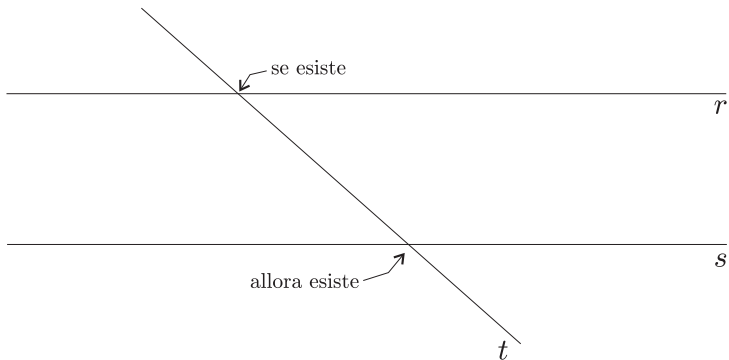


In questo modo affermiamo che, delle due rette parallele, la retta *superiore* (indicata con r) è quella che si suppone incidente alla terza (indicata con t), mentre quella inferiore (indicata con s) è quella che si dimostra essere incidente.



In questo modo affermiamo che, delle due rette parallele, la retta *superiore* (indicata con r) è quella che si suppone incidente alla terza (indicata con t), mentre quella inferiore (indicata con s) è quella che si dimostra essere incidente.

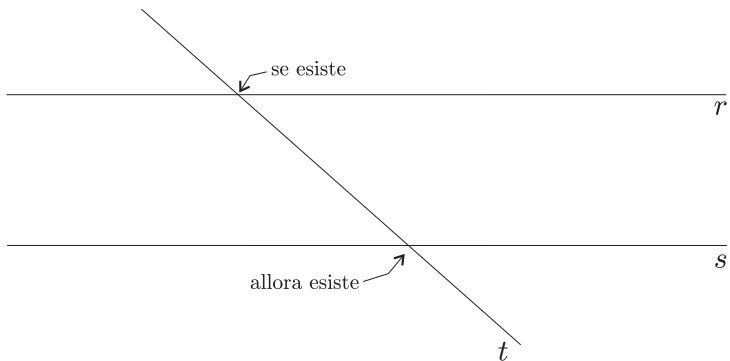
Da quali assiomi o teoremi dobbiamo partire?



In questo modo affermiamo che, delle due rette parallele, la retta *superiore* (indicata con r) è quella che si suppone incidente alla terza (indicata con t), mentre quella inferiore (indicata con s) è quella che si dimostra essere incidente.

Da quali assiomi o teoremi dobbiamo partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:



In questo modo affermiamo che, delle due rette parallele, la retta *superiore* (indicata con r) è quella che si suppone incidente alla terza (indicata con t), mentre quella inferiore (indicata con s) è quella che si dimostra essere incidente.

Da quali assiomi o teoremi dobbiamo partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Siccome t interseca r in un punto esterno ad s , essa è parallela ad s e passante per un punto fuori di essa.

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Siccome t interseca r in un punto esterno ad s , essa è parallela ad s e passante per un punto fuori di essa.

Per il quinto postulato di Euclide, t è l'*unica* parallela a s , dunque coincide con r .

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Siccome t interseca r in un punto esterno ad s , essa è parallela ad s e passante per un punto fuori di essa.

Per il quinto postulato di Euclide, t è l'*unica* parallela a s , dunque coincide con r .

E questa è una contraddizione, perché r ed s , per definizione, hanno *un solo* punto in comune.

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Siccome t interseca r in un punto esterno ad s , essa è parallela ad s e passante per un punto fuori di essa.

Per il quinto postulato di Euclide, t è l'*unica* parallela a s , dunque coincide con r .

E questa è una contraddizione, perché r ed s , per definizione, hanno *un solo* punto in comune.

FINE

Parte II

percorso normale

- 5 Assiomi
- 6 Definizioni
- 7 Teoremi
- 8 Dimostrazioni
- 9 Un altro esempio
- 10 Assiomi e verità

In questa lezione introduciamo alcuni costituenti fondamentali della Matematica.

In questa lezione introduciamo alcuni costituenti fondamentali della Matematica.

Iniziamo dagli *assiomi*.

Assiomi

Che cos'è un assioma?

Un *assioma* è un enunciato che si assume vero, per evidenza o per convenzione.

Assiomi

Che cos'è un assioma?

Un *assioma* è un enunciato che si assume vero, per evidenza o per convenzione.

Gli assiomi sono enunciati non dimostrabili; essi vanno accettati o rifiutati.

Assiomi

Che cos'è un assioma?

Un *assioma* è un enunciato che si assume vero, per evidenza o per convenzione.

Gli assiomi sono enunciati non dimostrabili; essi vanno accettati o rifiutati.

Gli assiomi sono in generale enunciati molto semplici, evidenti di per sé.

Assiomi

Che cos'è un assioma?

Un *assioma* è un enunciato che si assume vero, per evidenza o per convenzione.

Gli assiomi sono enunciati non dimostrabili; essi vanno accettati o rifiutati.

Gli assiomi sono in generale enunciati molto semplici, evidenti di per sé. Vedremo fra poco alcuni esempi di assiomi della Matematica.

Non solo in Matematica vi sono degli assiomi.

Non solo in Matematica vi sono degli assiomi.

COSTITUZIONE ITALIANA

PRINCIPI FONDAMENTALI

Art. 1

L'Italia è una Repubblica democratica, fondata sul lavoro.

La sovranità appartiene al popolo, che la esercita nelle forme e nei limiti della Costituzione.

Non solo in Matematica vi sono degli assiomi.

COSTITUZIONE ITALIANA

PRINCIPI FONDAMENTALI

Art. 1

L'Italia è una Repubblica democratica, fondata sul lavoro.

La sovranità appartiene al popolo, che la esercita nelle forme e nei limiti della Costituzione.

La Costituzione è un elenco di assiomi che chi fa le *leggi* deve rispettare.

Non solo in Matematica vi sono degli assiomi.

COSTITUZIONE ITALIANA

PRINCIPI FONDAMENTALI

Art. 1

L'Italia è una Repubblica democratica, fondata sul lavoro.

La sovranità appartiene al popolo, che la esercita nelle forme e nei limiti della Costituzione.

La Costituzione è un elenco di assiomi che chi fa le *leggi* deve rispettare. Una legge che affermasse, per esempio “In Italia c'è il Re” sarebbe in contrasto con l'articolo 1 e quindi incostituzionale.

In molti *giochi* vi sono degli assiomi “nascosti”:

In molti *giochi* vi sono degli assiomi “nascosti”:



In molti *giochi* vi sono degli assiomi “nascosti”:



Il fatto che il cavallo degli scacchi si muova “ad L” è un assioma: se non lo si accetta si gioca un altro gioco.

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in Geometria) Per due punti passa una e una sola retta;

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in **Geometria**) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in **Algebra**) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in Geometria) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in Algebra) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;
- (in teoria degli insiemi) Esiste un insieme che non contiene alcun elemento (l'insieme vuoto);

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in **Geometria**) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in **Algebra**) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;
- (in **teoria degli insiemi**) Esiste un insieme che non contiene alcun elemento (l'insieme vuoto);
- (in **Informatica**) Un bit può assumere solo due stati, indicati convenzionalmente con 0 e 1;

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in Geometria) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in Algebra) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;
- (in teoria degli insiemi) Esiste un insieme che non contiene alcun elemento (l'insieme vuoto);
- (in Informatica) Un bit può assumere solo due stati, indicati convenzionalmente con 0 e 1;
- (in Logica) Due cose uguali sono indistinguibili;

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in **Geometria**) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in **Algebra**) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;
- (in **teoria degli insiemi**) Esiste un insieme che non contiene alcun elemento (l'insieme vuoto);
- (in **Informatica**) Un bit può assumere solo due stati, indicati convenzionalmente con 0 e 1;
- (in **Logica**) Due cose uguali sono indistinguibili;
- (in **Probabilità**) La probabilità di un evento non è mai negativa;

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

Tutti gli enunciati della matematica devono essere dedotti, con l'uso della logica, *solo e soltanto* a partire dagli assiomi.

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

Tutti gli enunciati della matematica devono essere dedotti, con l'uso della logica, *solo e soltanto* a partire dagli assiomi.

La difficoltà risiede spesso nel fatto che, a volte, nel dedurre un enunciato, si usano *inconsapevolmente* degli assiomi.

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

Tutti gli enunciati della matematica devono essere dedotti, con l'uso della logica, *solo e soltanto* a partire dagli assiomi.

La difficoltà risiede spesso nel fatto che, a volte, nel dedurre un enunciato, si usano *inconsapevolmente* degli assiomi.
In questo caso, se essi sono necessari, si devono aggiungere.

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

Tutti gli enunciati della matematica devono essere dedotti, con l'uso della logica, *solo e soltanto* a partire dagli assiomi.

La difficoltà risiede spesso nel fatto che, a volte, nel dedurre un enunciato, si usano *inconsapevolmente* degli assiomi.

In questo caso, se essi sono necessari, si devono aggiungere.

Più avanti torneremo su altre questioni concernenti gli assiomi.

Definizioni

Il concetto di *definizione* è, per certi versi, più subdolo di quello di assioma.

Definizioni

Il concetto di *definizione* è, per certi versi, più subdolo di quello di assioma.

Che cos'è una definizione?

Una definizione non è altro che un'abbreviazione di concetti più difficili, o un nuovo nome che si dà a cose importanti.

Definizioni

Il concetto di *definizione* è, per certi versi, più subdolo di quello di assioma.

Che cos'è una definizione?

Una definizione non è altro che un'abbreviazione di concetti più difficili, o un nuovo nome che si dà a cose importanti.

Guardiamo questo esempio:

Il codice della strada

Art. 2. Definizione e classificazione delle strade

1. Ai fini dell'applicazione delle norme del presente codice si definisce "strada" l'area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali.

(dal Decreto Legislativo 30 aprile 1992, n.285)

Il codice della strada

Art. 2. Definizione e classificazione delle strade

1. Ai fini dell'applicazione delle norme del presente codice si definisce "strada" l'area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali.

(dal Decreto Legislativo 30 aprile 1992, n.285)

Anche se tutti crediamo di sapere cosa sia una "strada", scopriamo che le "strade private" non sono strade per il Codice stradale.

Il codice della strada

Art. 2. Definizione e classificazione delle strade

1. Ai fini dell'applicazione delle norme del presente codice si definisce "strada" l'area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali.

(dal Decreto Legislativo 30 aprile 1992, n.285)

Anche se tutti crediamo di sapere cosa sia una "strada", scopriamo che le "strade private" non sono strade per il Codice stradale.

Il Legislatore, chiaramente, non può stare a scrivere ogni volta "area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali", e quindi ha coniato il termine "strada" per *abbreviare* questo concetto.

Il codice della strada

Art. 2. Definizione e classificazione delle strade

1. Ai fini dell'applicazione delle norme del presente codice si definisce "strada" l'area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali.

(dal Decreto Legislativo 30 aprile 1992, n.285)

Anche se tutti crediamo di sapere cosa sia una "strada", scopriamo che le "strade private" non sono strade per il Codice stradale.

Il Legislatore, chiaramente, non può stare a scrivere ogni volta "area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali", e quindi ha coniato il termine "strada" per *abbreviare* questo concetto.

Vediamo ora un esempio matematico.

Geometria

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Geometria

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Qui vogliamo sostituire l'espressione "rette con un solo punto in comune" con "rette incidenti", dato che abbiamo in mente di usare spesso questo concetto.

Geometria

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Qui vogliamo sostituire l'espressione "rette con un solo punto in comune" con "rette incidenti", dato che abbiamo in mente di usare spesso questo concetto.

Le definizioni, di per sé semplici, possono dare origine a molti fraintendimenti.

Geometria

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Qui vogliamo sostituire l'espressione "rette con un solo punto in comune" con "rette incidenti", dato che abbiamo in mente di usare spesso questo concetto.

Le definizioni, di per sé semplici, possono dare origine a molti fraintendimenti.

Vediamo quest'altro esempio:

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!” ,

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!”, e sarebbe un grave errore!!!.

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!”, e sarebbe un grave errore!!!.

Perché? Non è forse vero che due rette sono incidenti hanno un solo punto in comune?

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!”, e sarebbe un grave errore!!!.

Perché? Non è forse *vero* che due rette sono incidenti hanno un solo punto in comune?

La definizione è data male perché può essere letta *come un enunciato*, cosa che non è *mai*.

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!”, e sarebbe un grave errore!!!.

Perché? Non è forse vero che due rette sono incidenti hanno un solo punto in comune?

La definizione è data male perché può essere letta *come un enunciato*, cosa che non è *mai*.

In questo caso si fa appello ad una parola che forse già si conosce (incidenti), mentre si vuol dire “se due rette ecc. ecc., allora si dicono ‘incidenti’”.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (cattiva) Un numero è pari se è divisibile per due.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (cattiva) Un numero è pari se è divisibile per due.
- (buona) Un numero si dice *pari* se è divisibile per due.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (cattiva) Un numero è pari se è divisibile per due.
- (buona) Un numero si dice *pari* se è divisibile per due.

I matematici usano spesso, per le definizioni, delle parole del linguaggio, e quindi rischiano di generare confusione. A volte poi sono irresistibili:

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (cattiva) Un numero è pari se è divisibile per due.
- (buona) Un numero si dice *pari* se è divisibile per due.

I matematici usano spesso, per le definizioni, delle parole del linguaggio, e quindi rischiano di generare confusione. A volte poi sono irresistibili:

Si dice *massimo* di un insieme numerico il massimo valore dei suoi elementi.

Teoremi

Le conseguenze degli assiomi, dedotte con il ragionamento logico, sono dette *teoremi*.

Teoremi

Le conseguenze degli assiomi, dedotte con il ragionamento logico, sono dette *teoremi*.

Che cos'è un teorema?

Un *teorema* è un enunciato dedotto per via logica dagli assiomi. Se gli assiomi sono assunti veri, allora anche i teoremi da essi dedotti sono veri.

Teoremi

Le conseguenze degli assiomi, dedotte con il ragionamento logico, sono dette *teoremi*.

Che cos'è un teorema?

Un *teorema* è un enunciato dedotto per via logica dagli assiomi. Se gli assiomi sono assunti veri, allora anche i teoremi da essi dedotti sono veri.

La Matematica è piena di teoremi: anche se nei libri si vedono numerose parti discorsive, esse sono inserite solo per spiegare quanto si vuol fare. In realtà sarebbe possibile ridursi ai soli teoremi con le loro dimostrazioni (e i libri di Matematica sarebbero ancora più illeggibili).

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
- Se due rette sono incidenti, allora due loro perpendicolari sono incidenti.

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
- Se due rette sono incidenti, allora due loro perpendicolari sono incidenti.

Tutti questi enunciati hanno la forma

Se ... allora...

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
- Se due rette sono incidenti, allora due loro perpendicolari sono incidenti.

Tutti questi enunciati hanno la forma

Se ... allora...

o, se preferite

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
- Se due rette sono incidenti, allora due loro perpendicolari sono incidenti.

Tutti questi enunciati hanno la forma

Se ... allora...

o, se preferite

Se $\langle \text{qualcosa} \rangle$ allora $\langle \text{qualcos'altro} \rangle$.

Struttura di un teorema

“Qualcosa” e “qualcos'altro” hanno due nomi precisi: si chiamano *ipotesi* e *tesi*.

Struttura di un teorema

“Qualcosa” e “qualcos'altro” hanno due nomi precisi: si chiamano *ipotesi* e *tesi*.

La struttura di molti teoremi è quindi la seguente

Se $\langle \textit{ipotesi} \rangle$ allora $\langle \textit{tesi} \rangle$

Struttura di un teorema

“Qualcosa” e “qualcos’altro” hanno due nomi precisi: si chiamano *ipotesi* e *tesi*.

La struttura di molti teoremi è quindi la seguente

Se $\langle ipotesi \rangle$ allora $\langle tesi \rangle$

oppure, come spesso si scrive,

$$Ipotesi \Rightarrow Tesi$$

Struttura di un teorema

“Qualcosa” e “qualcos’altro” hanno due nomi precisi: si chiamano *ipotesi* e *tesi*.

La struttura di molti teoremi è quindi la seguente

Se $\langle \textit{ipotesi} \rangle$ allora $\langle \textit{tesi} \rangle$

oppure, come spesso si scrive,

$$\textit{Ipotesi} \Rightarrow \textit{Tesi}$$

che si chiama *implicazione*.

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P .

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente* per Q ;

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;
- Se si ha $P \Longleftrightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione necessaria e sufficiente per* Q , e lo stesso scambiando P e Q .

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;
- Se si ha $P \Longleftrightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione necessaria e sufficiente per* Q , e lo stesso scambiando P e Q .

Per esempio, l'essere un rombo è condizione sufficiente affinché le diagonali siano perpendicolari;

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;
- Se si ha $P \Longleftrightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione necessaria e sufficiente per* Q , e lo stesso scambiando P e Q .

Per esempio, l'essere un rombo è condizione sufficiente affinché le diagonali siano perpendicolari; se una figura è un rettangolo, la condizione che i lati opposti siano uguali è necessaria;

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;
- Se si ha $P \Longleftrightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione necessaria e sufficiente per* Q , e lo stesso scambiando P e Q .

Per esempio, l'essere un rombo è condizione sufficiente affinché le diagonali siano perpendicolari; se una figura è un rettangolo, la condizione che i lati opposti siano uguali è necessaria; essere un triangolo isoscele è condizione necessaria e sufficiente affinché due lati siano uguali.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.
- L'insieme dei numeri relativi non ha minimo.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.
- L'insieme dei numeri relativi non ha minimo.
- La retta è illimitata.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.
- L'insieme dei numeri relativi non ha minimo.
- La retta è illimitata.

Questi enunciati, comunque, possono sempre essere convertiti in implicazioni, con qualche acrobazia:

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.
- L'insieme dei numeri relativi non ha minimo.
- La retta è illimitata.

Questi enunciati, comunque, possono sempre essere convertiti in implicazioni, con qualche acrobazia:

Esempi

- Se P è l'insieme dei numeri primi, allora P è infinito.
- Se n è un numero intero, allora esiste un numero intero inferiore a n .
- Se r è una retta, allora r è illimitata.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi. Esistono sostanzialmente due tipi di dimostrazione.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi. Esistono sostanzialmente due tipi di dimostrazione.

Tipi di dimostrazione

- 1 diretta;
- 2 per assurdo.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi. Esistono sostanzialmente due tipi di dimostrazione.

Tipi di dimostrazione

- 1 diretta;
- 2 per assurdo.

Quella diretta consiste nel partire dall'ipotesi e dedurre la tesi.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi. Esistono sostanzialmente due tipi di dimostrazione.

Tipi di dimostrazione

- 1 diretta;
- 2 per assurdo.

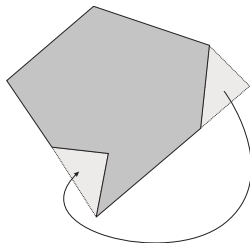
Quella diretta consiste nel partire dall'ipotesi e dedurre la tesi.

Teorema con dimostrazione diretta

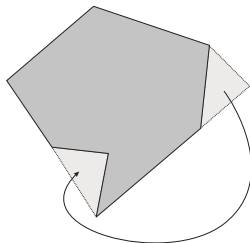
*L'area di un trapezio è data dalla formula
(base maggiore + base minore) · altezza/2.*

Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è $\text{base} \cdot \text{altezza}$.

Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è $\text{base} \cdot \text{altezza}$.

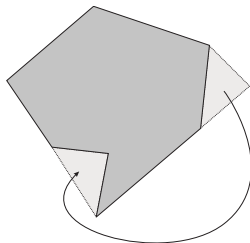


Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è $\text{base} \cdot \text{altezza}$.



Ciò premesso, iniziamo la dimostrazione.

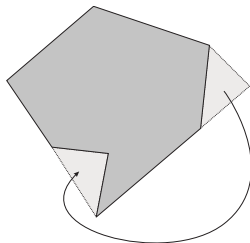
Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è $\text{base} \cdot \text{altezza}$.



Ciò premesso, iniziamo la dimostrazione.

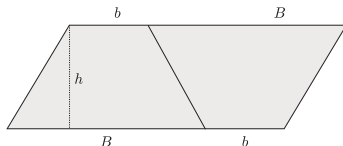
Dimostrazione. Consideriamo due copie del trapezio messe come in figura:

Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è base $\cdot$ altezza.

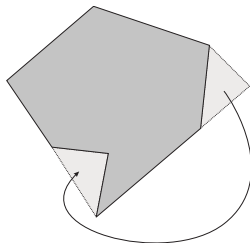


Ciò premesso, iniziamo la dimostrazione.

Dimostrazione. Consideriamo due copie del trapezio messe come in figura:

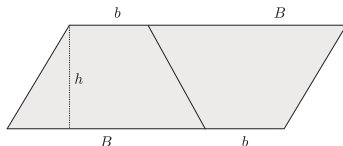


Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è base $\cdot$ altezza.



Ciò premesso, iniziamo la dimostrazione.

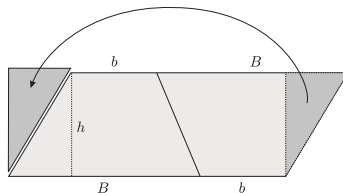
Dimostrazione. Consideriamo due copie del trapezio messe come in figura:



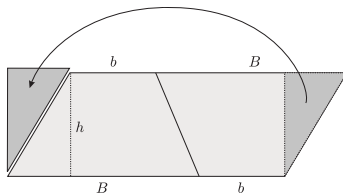
Si tratta di un parallelogramma avente per base la somma delle basi e stessa altezza.

Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:

Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:

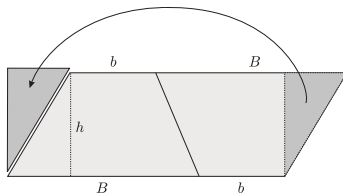


Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:

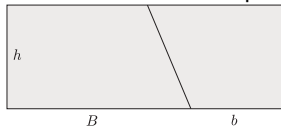


e otteniamo un rettangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza del trapezio.

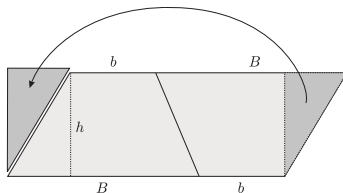
Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:



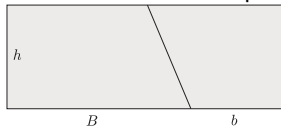
e otteniamo un rettangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza del trapezio.



Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:



e otteniamo un rettangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza del trapezio.



Questo completa la dimostrazione.

La struttura della dimostrazione è diretta:

Trapezio

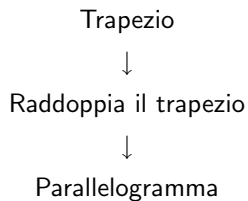
La struttura della dimostrazione è diretta:

Trapezio

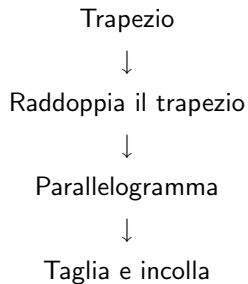


Raddoppia il trapezio

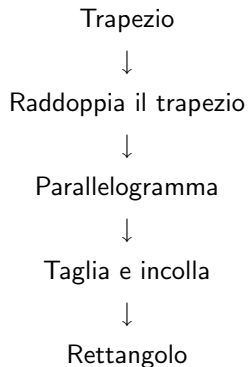
La struttura della dimostrazione è diretta:



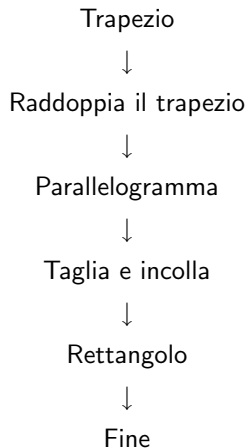
La struttura della dimostrazione è diretta:



La struttura della dimostrazione è diretta:



La struttura della dimostrazione è diretta:



La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa,

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

Il motivo di questo sta in un fatto di Logica.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

Il motivo di questo sta in un fatto di Logica.

Il punto, più o meno, è il seguente: ammessa l'ipotesi, la tesi può essere o falsa o vera. Se fosse falsa e *se da ciò si deduce una contraddizione*, la Matematica produrrebbe una contraddizione, cosa che non si vuole.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

Il motivo di questo sta in un fatto di Logica.

Il punto, più o meno, è il seguente: ammessa l'ipotesi, la tesi può essere o falsa o vera. Se fosse falsa e *se da ciò si deduce una contraddizione*, la Matematica produrrebbe una contraddizione, cosa che non si vuole.

Dunque la tesi deve essere vera.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

Il motivo di questo sta in un fatto di Logica.

Il punto, più o meno, è il seguente: ammessa l'ipotesi, la tesi può essere o falsa o vera. Se fosse falsa e *se da ciò si deduce una contraddizione*, la Matematica produrrebbe una contraddizione, cosa che non si vuole.

Dunque la tesi deve essere vera.

Vediamo un esempio.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

Il motivo di questo sta in un fatto di Logica.

Il punto, più o meno, è il seguente: ammessa l'ipotesi, la tesi può essere o falsa o vera. Se fosse falsa e *se da ciò si deduce una contraddizione*, la Matematica produrrebbe una contraddizione, cosa che non si vuole.

Dunque la tesi deve essere vera.

Vediamo un esempio.

Teorema con dimostrazione per assurdo

Esistono infiniti numeri primi.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

Il motivo di questo sta in un fatto di Logica.

Il punto, più o meno, è il seguente: ammessa l'ipotesi, la tesi può essere o falsa o vera. Se fosse falsa e *se da ciò si deduce una contraddizione*, la Matematica produrrebbe una contraddizione, cosa che non si vuole.

Dunque la tesi deve essere vera.

Vediamo un esempio.

Teorema con dimostrazione per assurdo

Esistono infiniti numeri primi.

(Ricordiamo che i numeri primi sono divisibili esattamente solo per se stessi e per 1).

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

In altre parole, M è il prodotto di tutti i numeri primi, aumentato di 1.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

In altre parole, M è il prodotto di tutti i numeri primi, aumentato di 1. Se M non avesse il “+1” in fondo, sarebbe divisibile per 2, per 3, per 5, ecc.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

In altre parole, M è il prodotto di tutti i numeri primi, aumentato di 1. Se M non avesse il “+1” in fondo, sarebbe divisibile per 2, per 3, per 5, ecc.

Ma siccome c'è il “+1”, non può essere divisibile per 2 (il successivo di un pari dista 2 dal precedente), non può essere divisibile per 3 (il successivo multiplo di 3 di un numero multiplo di 3 dista 3 dal precedente) e così via.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

In altre parole, M è il prodotto di tutti i numeri primi, aumentato di 1. Se M non avesse il “+1” in fondo, sarebbe divisibile per 2, per 3, per 5, ecc.

Ma siccome c'è il “+1”, non può essere divisibile per 2 (il successivo di un pari dista 2 dal precedente), non può essere divisibile per 3 (il successivo multiplo di 3 di un numero multiplo di 3 dista 3 dal precedente) e così via.

Dunque M non è divisibile per nessun numero primo. Ora però, sappiamo che ogni numero si scompone in fattori primi, per cui anche M lo farà: ciascuno dei suoi fattori primi sarà superiore ad N , perché fino ad N non possono essere suoi fattori.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

In altre parole, M è il prodotto di tutti i numeri primi, aumentato di 1. Se M non avesse il “+1” in fondo, sarebbe divisibile per 2, per 3, per 5, ecc.

Ma siccome c'è il “+1”, non può essere divisibile per 2 (il successivo di un pari dista 2 dal precedente), non può essere divisibile per 3 (il successivo multiplo di 3 di un numero multiplo di 3 dista 3 dal precedente) e così via.

Dunque M non è divisibile per nessun numero primo. Ora però, sappiamo che ogni numero si scompone in fattori primi, per cui anche M lo farà: ciascuno dei suoi fattori primi sarà superiore ad N , perché fino ad N non possono essere suoi fattori.

Ma allora esiste almeno un numero primo superiore ad N , e questo è assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

In altre parole, M è il prodotto di tutti i numeri primi, aumentato di 1. Se M non avesse il “+1” in fondo, sarebbe divisibile per 2, per 3, per 5, ecc.

Ma siccome c'è il “+1”, non può essere divisibile per 2 (il successivo di un pari dista 2 dal precedente), non può essere divisibile per 3 (il successivo multiplo di 3 di un numero multiplo di 3 dista 3 dal precedente) e così via.

Dunque M non è divisibile per nessun numero primo. Ora però, sappiamo che ogni numero si scompone in fattori primi, per cui anche M lo farà: ciascuno dei suoi fattori primi sarà superiore ad N , perché fino ad N non possono essere suoi fattori.

Ma allora esiste almeno un numero primo superiore ad N , e questo è assurdo.

Questo completa la dimostrazione.

Vediamo ora un esempio interessante tratto dalla Geometria.

Vediamo ora un esempio interessante tratto dalla Geometria.
Sappiamo già cosa sono due rette incidenti. Diamo ora un'altra definizione.

Vediamo ora un esempio interessante tratto dalla Geometria.
Sappiamo già cosa sono due rette incidenti. Diamo ora un'altra definizione.

Rette parallele

Due rette si dicono *parallele* se non hanno nessun punto in comune.

Vediamo ora un esempio interessante tratto dalla Geometria.
Sappiamo già cosa sono due rette incidenti. Diamo ora un'altra definizione.

Rette parallele

Due rette si dicono *parallele* se non hanno nessun punto in comune.

Siamo soliti disegnare due rette parallele così:

Vediamo ora un esempio interessante tratto dalla Geometria.
Sappiamo già cosa sono due rette incidenti. Diamo ora un'altra definizione.

Rette parallele

Due rette si dicono *parallele* se non hanno nessun punto in comune.

Siamo soliti disegnare due rette parallele così:



Vogliamo dimostrare il seguente

Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema con dimostrazione per assurdo

Date due rette parallele, se una terza retta è incidente alla prima, allora è incidente anche alla seconda.

Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema con dimostrazione per assurdo

Date due rette parallele, se una terza retta è incidente alla prima, allora è incidente anche alla seconda.

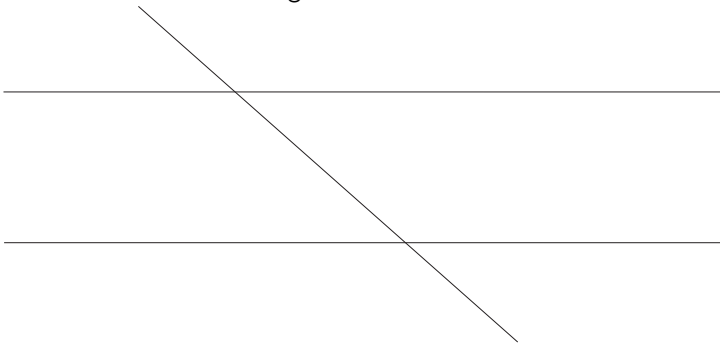
Vediamo subito cosa dice la figura.

Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema con dimostrazione per assurdo

Date due rette parallele, se una terza retta è incidente alla prima, allora è incidente anche alla seconda.

Vediamo subito cosa dice la figura.

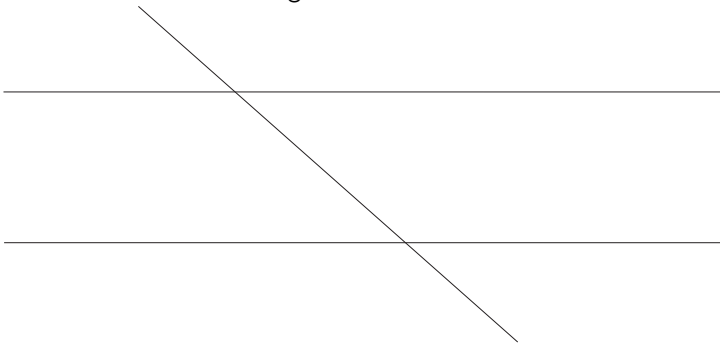


Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema con dimostrazione per assurdo

Date due rette parallele, se una terza retta è incidente alla prima, allora è incidente anche alla seconda.

Vediamo subito cosa dice la figura.



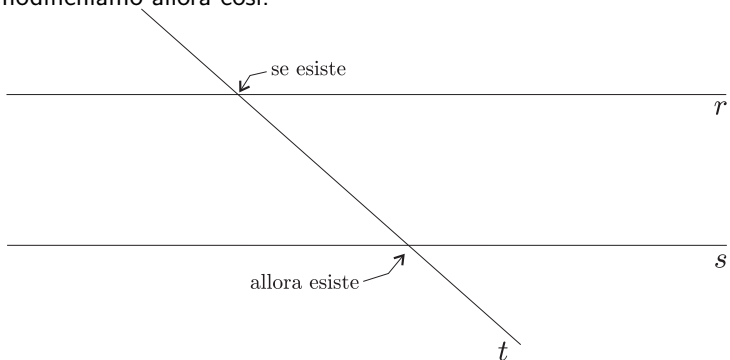
Questa figura non è il massimo: non dice quali siano le rette *che si fanno essere incidenti*, e quali quelle *che si dimostrano essere incidenti*.

Questa figura non è il massimo: non dice quali siano le rette *che si fanno essere incidenti*, e quali quelle *che si dimostrano essere incidenti*.

La modifichiamo allora così:

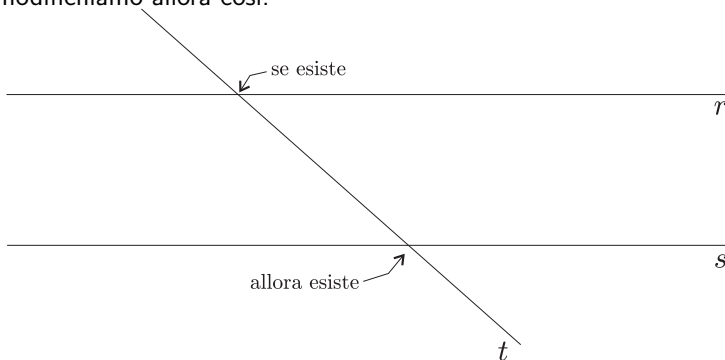
Questa figura non è il massimo: non dice quali siano le rette *che si sanno essere incidenti*, e quali quelle *che si dimostrano essere incidenti*.

La modifichiamo allora così:



Questa figura non è il massimo: non dice quali siano le rette *che si sanno essere incidenti*, e quali quelle *che si dimostrano essere incidenti*.

La modifichiamo allora così:



In questo modo affermiamo che, delle due rette parallele, la retta *superiore* (indicata con r) è quella che si suppone incidente alla terza (indicata con t), mentre quella *inferiore* (indicata con s) è quella che si dimostra essere incidente.

Da quali assiomi o teoremi partire?

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

(“postulato” è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

(“postulato” è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Siccome t interseca r in un punto esterno ad s , essa è parallela ad s e passante per un punto fuori di essa.

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Siccome t interseca r in un punto esterno ad s , essa è parallela ad s e passante per un punto fuori di essa.

Per il quinto postulato di Euclide, t è l'*unica* parallela a s , dunque coincide con r .

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Siccome t interseca r in un punto esterno ad s , essa è parallela ad s e passante per un punto fuori di essa.

Per il quinto postulato di Euclide, t è l'*unica* parallela a s , dunque coincide con r .

E questa è una contraddizione, perché r ed s , per definizione, hanno *un solo* punto in comune.

Gli assiomi sono *veri*?

Il fatto che “per due punti passa una e una sola retta” o che “due cose uguali a una terza sono uguali” sembrano così evidenti da non lasciare adito a dubbi.

Gli assiomi sono *veri*?

Il fatto che “per due punti passa una e una sola retta” o che “due cose uguali a una terza sono uguali” sembrano così evidenti da non lasciare adito a dubbi.

Eppure, oggi in Matematica si *chiede di accettare* gli assiomi. Perché?

Gli assiomi sono *veri*?

Il fatto che “per due punti passa una e una sola retta” o che “due cose uguali a una terza sono uguali” sembrano così evidenti da non lasciare adito a dubbi.

Eppure, oggi in Matematica si *chiede di accettare* gli assiomi. Perché?

Un motivo di ciò sta nell'*intuizione*: quando si parla di “retta” si ha in mente un ben preciso oggetto geometrico: non verrebbe mai in mente una circonferenza, per esempio.

Gli assiomi sono *veri*?

Il fatto che “per due punti passa una e una sola retta” o che “due cose uguali a una terza sono uguali” sembrano così evidenti da non lasciare adito a dubbi.

Eppure, oggi in Matematica si *chiede di accettare* gli assiomi. Perché?

Un motivo di ciò sta nell'*intuizione*: quando si parla di “retta” si ha in mente un ben preciso oggetto geometrico: non verrebbe mai in mente una circonferenza, per esempio.

Siccome la Matematica tende ad essere il più possibile indipendente dall'intuizione (cosa a volte fonte di difficoltà), per sicurezza di chiede di *accettare* gli assiomi.

Gli assiomi sono *veri*?

Il fatto che “per due punti passa una e una sola retta” o che “due cose uguali a una terza sono uguali” sembrano così evidenti da non lasciare adito a dubbi.

Eppure, oggi in Matematica si *chiede di accettare* gli assiomi. Perché?

Un motivo di ciò sta nell'*intuizione*: quando si parla di “retta” si ha in mente un ben preciso oggetto geometrico: non verrebbe mai in mente una circonferenza, per esempio.

Siccome la Matematica tende ad essere il più possibile indipendente dall'intuizione (cosa a volte fonte di difficoltà), per sicurezza si chiede di *accettare* gli assiomi.

Ma non è solo un fatto di indipendenza. Il quinto postulato di Euclide è un esempio molto istruttivo, che vedremo tra un attimo.

Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:

Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:



Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:



che non sembra affatto una retta!

Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:



che non sembra affatto una retta!

Chiaramente ci riferiamo a una retta “ideale”, senza spessore, che potremmo immaginare come qualcosa che “non diventa spesso per quanto lo ingrandiamo”.

Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:



che non sembra affatto una retta!

Chiaramente ci riferiamo a una retta “ideale”, senza spessore, che potremmo immaginare come qualcosa che “non diventa spesso per quanto lo ingrandiamo”.

Altre caratteristiche della retta sono però meno facili da verificare.

Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:



che non sembra affatto una retta!

Chiaramente ci riferiamo a una retta “ideale”, senza spessore, che potremmo immaginare come qualcosa che “non diventa spesso per quanto lo ingrandiamo”.

Altre caratteristiche della retta sono però meno facili da verificare. Euclide richiedeva che “la retta si potesse prolungare indefinitamente in maniera rettilinea”.

Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:



che non sembra affatto una retta!

Chiaramente ci riferiamo a una retta “ideale”, senza spessore, che potremmo immaginare come qualcosa che “non diventa spesso per quanto lo ingrandiamo”.

Altre caratteristiche della retta sono però meno facili da verificare.

Euclide richiedeva che “la retta si potesse prolungare indefinitamente in maniera rettilinea”.

Ma che vuol dire? È evidente qui che c'è una definizione circolare: se non sappiamo ancora cosa sia una retta, è difficile capire cosa voglia dire “in maniera rettilinea”.

Infine, alcune richieste, se formulate in modo subdolo, non sembrano affatto evidenti.

Infine, alcune richieste, se formulate in modo subdolo, non sembrano affatto evidenti. Torniamo al quinto postulato.

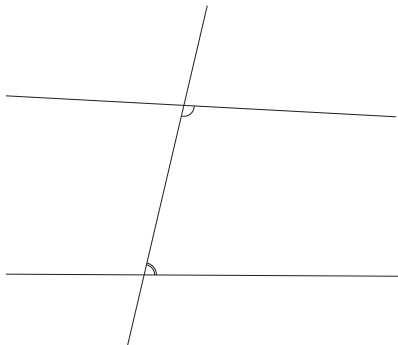
Quinto postulato, versione originale

“Se due rette tagliate da una trasversale formano con essa angoli corrispondenti interni aventi somma inferiore a due angoli retti, esse si incontrano nel semipiano determinato dalla trasversale e contenente detti angoli”

Infine, alcune richieste, se formulate in modo subdolo, non sembrano affatto evidenti. Torniamo al quinto postulato.

Quinto postulato, versione originale

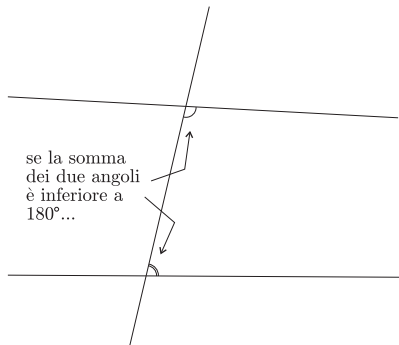
“Se due rette tagliate da una trasversale formano con essa angoli corrispondenti interni aventi somma inferiore a due angoli retti, esse si incontrano nel semipiano determinato dalla trasversale e contenente detti angoli”



Infine, alcune richieste, se formulate in modo subdolo, non sembrano affatto evidenti. Torniamo al quinto postulato.

Quinto postulato, versione originale

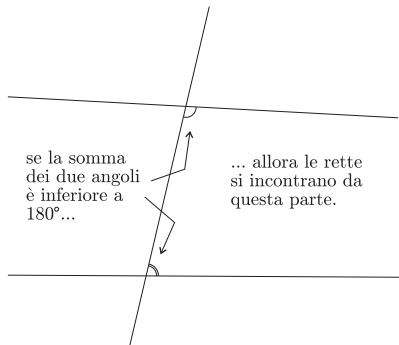
“Se due rette tagliate da una trasversale formano con essa angoli corrispondenti interni aventi somma inferiore a due angoli retti, esse si incontrano nel semipiano determinato dalla trasversale e contenente detti angoli”



Infine, alcune richieste, se formulate in modo subdolo, non sembrano affatto evidenti. Torniamo al quinto postulato.

Quinto postulato, versione originale

“Se due rette tagliate da una trasversale formano con essa angoli corrispondenti interni aventi somma inferiore a due angoli retti, esse si incontrano nel semipiano determinato dalla trasversale e contenente detti angoli”



Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontanano sempre più.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontani sempre più.

Ma non solo: manipolando opportunamente questi angoli è possibile *far allontanare il punto di intersezione quanto si vuole*.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontani sempre più.

Ma non solo: manipolando opportunamente questi angoli è possibile *far allontanare il punto di intersezione quanto si vuole*.

Dunque, l'assioma afferma che esiste un punto anche laddove non si riuscirà mai a “controllare” che il punto esista anche in realtà.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontani sempre più.

Ma non solo: manipolando opportunamente questi angoli è possibile *far allontanare il punto di intersezione quanto si vuole*.

Dunque, l'assioma afferma che esiste un punto anche laddove non si riuscirà mai a “controllare” che il punto esista anche in realtà.

Per questo motivo molti (e forse anche Euclide stesso) hanno dubitato dell'evidenza del quinto postulato, cercando di *dimostrarlo* a partire dagli altri assiomi.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontanano sempre più.

Ma non solo: manipolando opportunamente questi angoli è possibile *far allontanare il punto di intersezione quanto si vuole*.

Dunque, l'assioma afferma che esiste un punto anche laddove non si riuscirà mai a “controllare” che il punto esista anche in realtà.

Per questo motivo molti (e forse anche Euclide stesso) hanno dubitato dell'evidenza del quinto postulato, cercando di *dimostrarlo* a partire dagli altri assiomi.

La Storia ha poi dimostrato che ciò è impossibile.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontani sempre più.

Ma non solo: manipolando opportunamente questi angoli è possibile *far allontanare il punto di intersezione quanto si vuole*.

Dunque, l'assioma afferma che esiste un punto anche laddove non si riuscirà mai a “controllare” che il punto esista anche in realtà.

Per questo motivo molti (e forse anche Euclide stesso) hanno dubitato dell'evidenza del quinto postulato, cercando di *dimostrarlo* a partire dagli altri assiomi.

La Storia ha poi dimostrato che ciò è impossibile.

In altre parole, è possibile costruire una Geometria nella quale per un punto esterno a una retta data esistono *infinite* parallele, e quindi l'immagine “intuitiva” della “retta” è *diversa* da quella usuale.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontani sempre più.

Ma non solo: manipolando opportunamente questi angoli è possibile *far allontanare il punto di intersezione quanto si vuole*.

Dunque, l'assioma afferma che esiste un punto anche laddove non si riuscirà mai a “controllare” che il punto esista anche in realtà.

Per questo motivo molti (e forse anche Euclide stesso) hanno dubitato dell'evidenza del quinto postulato, cercando di *dimostrarlo* a partire dagli altri assiomi.

La Storia ha poi dimostrato che ciò è impossibile.

In altre parole, è possibile costruire una Geometria nella quale per un punto esterno a una retta data esistono *infinite* parallele, e quindi l'immagine “intuitiva” della “retta” è *diversa* da quella usuale.

In futuro avremo modo di approfondire questo aspetto: comunque fu il primo caso nella storia della Matematica nel quale un assioma venne messo in discussione.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontani sempre più.

Ma non solo: manipolando opportunamente questi angoli è possibile *far allontanare il punto di intersezione quanto si vuole*.

Dunque, l'assioma afferma che esiste un punto anche laddove non si riuscirà mai a “controllare” che il punto esista anche in realtà.

Per questo motivo molti (e forse anche Euclide stesso) hanno dubitato dell'evidenza del quinto postulato, cercando di *dimostrarlo* a partire dagli altri assiomi.

La Storia ha poi dimostrato che ciò è impossibile.

In altre parole, è possibile costruire una Geometria nella quale per un punto esterno a una retta data esistono *infinite* parallele, e quindi l'immagine “intuitiva” della “retta” è *diversa* da quella usuale.

In futuro avremo modo di approfondire questo aspetto: comunque fu il primo caso nella storia della Matematica nel quale un assioma venne messo in discussione.

FINE

Assiomi, definizioni, teoremi

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

Parte III

percorso approfondito

- 11 Assiomi
- 12 Definizioni
- 13 Teoremi
- 14 Dimostrazioni
- 15 Definizioni implicite
- 16 Assiomi e verità
- 17 Assiomi indipendenti
- 18 Non contraddittorietà
- 19 Dimostrazioni formali

In questa lezione introduciamo alcuni costituenti fondamentali della Matematica.

In questa lezione introduciamo alcuni costituenti fondamentali della Matematica.

Iniziamo dagli *assiomi*.

Assiomi

Che cos'è un assioma?

Un *assioma* è un enunciato che si assume vero, per evidenza o per convenzione.

Assiomi

Che cos'è un assioma?

Un *assioma* è un enunciato che si assume vero, per evidenza o per convenzione.

Gli assiomi sono enunciati non dimostrabili; essi vanno accettati o rifiutati.

Assiomi

Che cos'è un assioma?

Un *assioma* è un enunciato che si assume vero, per evidenza o per convenzione.

Gli assiomi sono enunciati non dimostrabili; essi vanno accettati o rifiutati.

Gli assiomi sono in generale enunciati molto semplici, evidenti di per sé.

Assiomi

Che cos'è un assioma?

Un *assioma* è un enunciato che si assume vero, per evidenza o per convenzione.

Gli assiomi sono enunciati non dimostrabili; essi vanno accettati o rifiutati.

Gli assiomi sono in generale enunciati molto semplici, evidenti di per sé. Vedremo fra poco alcuni esempi di assiomi della Matematica.

Non solo in Matematica vi sono degli assiomi.

Non solo in Matematica vi sono degli assiomi.

COSTITUZIONE ITALIANA

PRINCIPI FONDAMENTALI

Art. 1

L'Italia è una Repubblica democratica, fondata sul lavoro.

La sovranità appartiene al popolo, che la esercita nelle forme e nei limiti della Costituzione.

Non solo in Matematica vi sono degli assiomi.

COSTITUZIONE ITALIANA

PRINCIPI FONDAMENTALI

Art. 1

L'Italia è una Repubblica democratica, fondata sul lavoro.

La sovranità appartiene al popolo, che la esercita nelle forme e nei limiti della Costituzione.

La Costituzione è un elenco di assiomi che chi fa le *leggi* deve rispettare.

Non solo in Matematica vi sono degli assiomi.

COSTITUZIONE ITALIANA

PRINCIPI FONDAMENTALI

Art. 1

L'Italia è una Repubblica democratica, fondata sul lavoro.

La sovranità appartiene al popolo, che la esercita nelle forme e nei limiti della Costituzione.

La Costituzione è un elenco di assiomi che chi fa le *leggi* deve rispettare. Una legge che affermasse, per esempio "In Italia c'è il Re" sarebbe in contrasto con l'articolo 1 e quindi incostituzionale.

In molti *giochi* vi sono degli assiomi “nascosti”:

In molti *giochi* vi sono degli assiomi “nascosti”:



In molti *giochi* vi sono degli assiomi “nascosti”:



Il fatto che il cavallo degli scacchi si muova “ad L” è un assioma: se non lo si accetta si gioca un altro gioco.

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in Geometria) Per due punti passa una e una sola retta;

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in Geometria) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in Algebra) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in Geometria) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in Algebra) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;
- (in teoria degli insiemi) Esiste un insieme che non contiene alcun elemento (l'insieme vuoto);

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in **Geometria**) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in **Algebra**) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;
- (in **teoria degli insiemi**) Esiste un insieme che non contiene alcun elemento (l'insieme vuoto);
- (in **Informatica**) Un bit può assumere solo due stati, indicati convenzionalmente con 0 e 1;

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in **Geometria**) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in **Algebra**) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;
- (in **teoria degli insiemi**) Esiste un insieme che non contiene alcun elemento (l'insieme vuoto);
- (in **Informatica**) Un bit può assumere solo due stati, indicati convenzionalmente con 0 e 1;
- (in **Logica**) Due cose uguali sono indistinguibili;

Esempi di assiomi

Vediamo alcuni esempi di assiomi.

Esempi di assiomi in Matematica

- (in Geometria) Per due punti passa una e una sola retta;
- (in Algebra) Il successivo di un numero intero è ancora un numero intero;
- (in teoria degli insiemi) Esiste un insieme che non contiene alcun elemento (l'insieme vuoto);
- (in Informatica) Un bit può assumere solo due stati, indicati convenzionalmente con 0 e 1;
- (in Logica) Due cose uguali sono indistinguibili;
- (in Probabilità) La probabilità di un evento non è mai negativa;

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

Tutti gli enunciati della matematica devono essere dedotti, con l'uso della logica, *solo e soltanto* a partire dagli assiomi.

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

Tutti gli enunciati della matematica devono essere dedotti, con l'uso della logica, *solo e soltanto* a partire dagli assiomi.

La difficoltà risiede spesso nel fatto che, a volte, nel dedurre un enunciato, si usano *inconsapevolmente* degli assiomi.

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

Tutti gli enunciati della matematica devono essere dedotti, con l'uso della logica, *solo e soltanto* a partire dagli assiomi.

La difficoltà risiede spesso nel fatto che, a volte, nel dedurre un enunciato, si usano *inconsapevolmente* degli assiomi.
In questo caso, se essi sono necessari, si devono aggiungere.

A che cosa servono gli assiomi?

Gli assiomi sono il *punto di partenza* del ragionamento matematico.

Tutti gli enunciati della matematica devono essere dedotti, con l'uso della logica, *solo e soltanto* a partire dagli assiomi.

La difficoltà risiede spesso nel fatto che, a volte, nel dedurre un enunciato, si usano *inconsapevolmente* degli assiomi.

In questo caso, se essi sono necessari, si devono aggiungere.

Più avanti torneremo su altre questioni concernenti gli assiomi.

Definizioni

Il concetto di *definizione* è, per certi versi, più subdolo di quello di assioma.

Definizioni

Il concetto di *definizione* è, per certi versi, più subdolo di quello di assioma.

Che cos'è una definizione?

Una definizione non è altro che un'abbreviazione di concetti più difficili, o un nuovo nome che si dà a cose importanti.

Definizioni

Il concetto di *definizione* è, per certi versi, più subdolo di quello di assioma.

Che cos'è una definizione?

Una definizione non è altro che un'abbreviazione di concetti più difficili, o un nuovo nome che si dà a cose importanti.

Guardiamo questo esempio:

Il codice della strada

Art. 2. Definizione e classificazione delle strade

1. Ai fini dell'applicazione delle norme del presente codice si definisce "strada" l'area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali.

(dal Decreto Legislativo 30 aprile 1992, n.285)

Il codice della strada

Art. 2. Definizione e classificazione delle strade

1. Ai fini dell'applicazione delle norme del presente codice si definisce "strada" l'area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali.

(dal Decreto Legislativo 30 aprile 1992, n.285)

Anche se tutti crediamo di sapere cosa sia una "strada", scopriamo che le "strade private" non sono strade per il Codice stradale.

Il codice della strada

Art. 2. Definizione e classificazione delle strade

1. Ai fini dell'applicazione delle norme del presente codice si definisce "strada" l'area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali.

(dal Decreto Legislativo 30 aprile 1992, n.285)

Anche se tutti crediamo di sapere cosa sia una "strada", scopriamo che le "strade private" non sono strade per il Codice stradale.

Il Legislatore, chiaramente, non può stare a scrivere ogni volta "area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali", e quindi ha coniato il termine "strada" per *abbreviare* questo concetto.

Il codice della strada

Art. 2. Definizione e classificazione delle strade

1. Ai fini dell'applicazione delle norme del presente codice si definisce "strada" l'area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali.

(dal Decreto Legislativo 30 aprile 1992, n.285)

Anche se tutti crediamo di sapere cosa sia una "strada", scopriamo che le "strade private" non sono strade per il Codice stradale.

Il Legislatore, chiaramente, non può stare a scrivere ogni volta "area ad uso pubblico destinata alla circolazione dei pedoni, dei veicoli e degli animali", e quindi ha coniato il termine "strada" per *abbreviare* questo concetto.

Vediamo ora un esempio matematico.

Geometria

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Geometria

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Qui vogliamo sostituire l'espressione "rette con un solo punto in comune" con "rette incidenti", dato che abbiamo in mente di usare spesso questo concetto.

Geometria

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Qui vogliamo sostituire l'espressione "rette con un solo punto in comune" con "rette incidenti", dato che abbiamo in mente di usare spesso questo concetto.

Le definizioni, di per sé semplici, possono dare origine a molti fraintendimenti.

Geometria

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono *incidenti*.

Qui vogliamo sostituire l'espressione "rette con un solo punto in comune" con "rette incidenti", dato che abbiamo in mente di usare spesso questo concetto.

Le definizioni, di per sé semplici, possono dare origine a molti fraintendimenti.

Vediamo quest'altro esempio:

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!” ,

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!”, e sarebbe un grave errore!!!.

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!”, e sarebbe un grave errore!!!.

Perché? Non è forse vero che due rette sono incidenti hanno un solo punto in comune?

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!”, e sarebbe un grave errore!!!.

Perché? Non è forse vero che due rette sono incidenti hanno un solo punto in comune?

La definizione è data male perché può essere letta *come un enunciato*, cosa che non è *mai*.

Definizione data male

Due rette sono incidenti se hanno un solo punto in comune.

Qui verrebbe da dire “è ovvio!”, e sarebbe un grave errore!!!.

Perché? Non è forse vero che due rette sono incidenti hanno un solo punto in comune?

La definizione è data male perché può essere letta *come un enunciato*, cosa che non è *mai*.

In questo caso si fa appello ad una parola che forse già si conosce (incidenti), mentre si vuol dire “se due rette ecc. ecc., allora si dicono ‘incidenti’”.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (cattiva) Un numero è pari se è divisibile per due.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (cattiva) Un numero è pari se è divisibile per due.
- (buona) Un numero si dice *pari* se è divisibile per due.

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (cattiva) Un numero è pari se è divisibile per due.
- (buona) Un numero si dice *pari* se è divisibile per due.

I matematici usano spesso, per le definizioni, delle parole del linguaggio, e quindi rischiano di generare confusione. A volte poi sono irresistibili:

Vediamo altri esempi, con i relativi giudizi.

- (mediocre) La circonferenza è l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (buona) Si definisce *circonferenza* l'insieme dei punti equidistanti da un punto, detto centro.
- (cattiva) Un numero è pari se è divisibile per due.
- (buona) Un numero si dice *pari* se è divisibile per due.

I matematici usano spesso, per le definizioni, delle parole del linguaggio, e quindi rischiano di generare confusione. A volte poi sono irresistibili:

Si dice *massimo* di un insieme numerico il massimo valore dei suoi elementi.

Teoremi

Le conseguenze degli assiomi, dedotte con il ragionamento logico, sono dette *teoremi*.

Teoremi

Le conseguenze degli assiomi, dedotte con il ragionamento logico, sono dette *teoremi*.

Che cos'è un teorema?

Un *teorema* è un enunciato dedotto per via logica dagli assiomi. Se gli assiomi sono assunti veri, allora anche i teoremi da essi dedotti sono veri.

Teoremi

Le conseguenze degli assiomi, dedotte con il ragionamento logico, sono dette *teoremi*.

Che cos'è un teorema?

Un *teorema* è un enunciato dedotto per via logica dagli assiomi. Se gli assiomi sono assunti veri, allora anche i teoremi da essi dedotti sono veri.

La Matematica è piena di teoremi: anche se nei libri si vedono numerose parti discorsive, esse sono inserite solo per spiegare quanto si vuol fare. In realtà sarebbe possibile ridursi ai soli teoremi con le loro dimostrazioni (e i libri di Matematica sarebbero ancora più illeggibili).

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
- Se due rette sono incidenti, allora due loro perpendicolari sono incidenti.

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
- Se due rette sono incidenti, allora due loro perpendicolari sono incidenti.

Tutti questi enunciati hanno la forma

Se ... allora...

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
- Se due rette sono incidenti, allora due loro perpendicolari sono incidenti.

Tutti questi enunciati hanno la forma

Se ... allora...

o, se preferite

Struttura di un teorema

Un teorema non è, in generale, un enunciato qualunque. Quasi sempre esso ha una struttura ben precisa.

Osserviamo questi esempi.

Esempi di teoremi

- Se un numero intero è pari, allora il suo doppio è pari.
- Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
- Se due rette sono incidenti, allora due loro perpendicolari sono incidenti.

Tutti questi enunciati hanno la forma

Se ... allora...

o, se preferite

Se $\langle \text{qualcosa} \rangle$ allora $\langle \text{qualcos'altro} \rangle$.

Struttura di un teorema

“Qualcosa” e “qualcos'altro” hanno due nomi precisi: si chiamano *ipotesi* e *tesi*.

Struttura di un teorema

“Qualcosa” e “qualcos'altro” hanno due nomi precisi: si chiamano *ipotesi* e *tesi*.

La struttura di molti teoremi è quindi la seguente

Se $\langle \textit{ipotesi} \rangle$ allora $\langle \textit{tesi} \rangle$

Struttura di un teorema

“Qualcosa” e “qualcos’altro” hanno due nomi precisi: si chiamano *ipotesi* e *tesi*.

La struttura di molti teoremi è quindi la seguente

Se $\langle ipotesi \rangle$ allora $\langle tesi \rangle$

oppure, come spesso si scrive,

$$Ipotesi \Rightarrow Tesi$$

Struttura di un teorema

“Qualcosa” e “qualcos’altro” hanno due nomi precisi: si chiamano *ipotesi* e *tesi*.

La struttura di molti teoremi è quindi la seguente

Se $\langle \textit{ipotesi} \rangle$ allora $\langle \textit{tesi} \rangle$

oppure, come spesso si scrive,

$$\textit{Ipotesi} \Rightarrow \textit{Tesi}$$

che si chiama *implicazione*.

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P .

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente* per Q ;

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;
- Se si ha $P \Longleftrightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione necessaria e sufficiente per* Q , e lo stesso scambiando P e Q .

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;
- Se si ha $P \Longleftrightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione necessaria e sufficiente per* Q , e lo stesso scambiando P e Q .

Per esempio, l'essere un rombo è condizione sufficiente affinché le diagonali siano perpendicolari;

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;
- Se si ha $P \Longleftrightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione necessaria e sufficiente per* Q , e lo stesso scambiando P e Q .

Per esempio, l'essere un rombo è condizione sufficiente affinché le diagonali siano perpendicolari; se una figura è un rettangolo, la condizione che i lati opposti siano uguali è necessaria;

Riprendiamo la scrittura $P \Rightarrow Q$.

A volte si ha anche che $Q \Rightarrow P$, ossia che *anche* Q implica P . In questo caso, i due enunciati sono *equivalenti* ai fini logici, e si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Terminologia

- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione sufficiente per* Q ;
- Se si ha $P \Rightarrow Q$, allora si dice che Q è *condizione necessaria, data* P ;
- Se si ha $P \Longleftrightarrow Q$, allora si dice che P è *condizione necessaria e sufficiente per* Q , e lo stesso scambiando P e Q .

Per esempio, l'essere un rombo è condizione sufficiente affinché le diagonali siano perpendicolari; se una figura è un rettangolo, la condizione che i lati opposti siano uguali è necessaria; essere un triangolo isoscele è condizione necessaria e sufficiente affinché due lati siano uguali.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.
- L'insieme dei numeri relativi non ha minimo.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.
- L'insieme dei numeri relativi non ha minimo.
- La retta è illimitata.

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.
- L'insieme dei numeri relativi non ha minimo.
- La retta è illimitata.

Questi enunciati, comunque, possono sempre essere convertiti in implicazioni, con qualche acrobazia:

Non tutti i teoremi, comunque, sono scritti in forma di implicazione.

Esempi

- Esistono infiniti numeri primi.
- L'insieme dei numeri relativi non ha minimo.
- La retta è illimitata.

Questi enunciati, comunque, possono sempre essere convertiti in implicazioni, con qualche acrobazia:

Esempi

- Se P è l'insieme dei numeri primi, allora P è infinito.
- Se n è un numero intero, allora esiste un numero intero inferiore a n .
- Se r è una retta, allora r è illimitata.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi. Esistono sostanzialmente due tipi di dimostrazione.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi. Esistono sostanzialmente due tipi di dimostrazione.

Tipi di dimostrazione

- 1 diretta;
- 2 per assurdo.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi. Esistono sostanzialmente due tipi di dimostrazione.

Tipi di dimostrazione

- 1 diretta;
- 2 per assurdo.

Quella diretta consiste nel partire dall'ipotesi e dedurre la tesi.

Dimostrazioni

Dimostrazioni

Il ragionamento che conduce da un assioma a un teorema, o da un teorema ad un altro, si chiama *dimostrazione*.

Una dimostrazione non può basarsi sul “cercare di convincere”: deve usare solo passaggi logici e, soprattutto, solo assiomi o altri teoremi. Esistono sostanzialmente due tipi di dimostrazione.

Tipi di dimostrazione

- 1 diretta;
- 2 per assurdo.

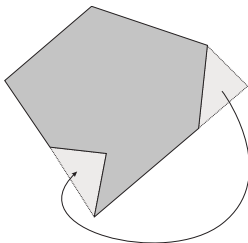
Quella diretta consiste nel partire dall'ipotesi e dedurre la tesi.

Teorema con dimostrazione diretta

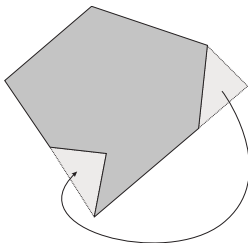
*L'area di un trapezio è data dalla formula
(base maggiore + base minore) · altezza/2.*

Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è $\text{base} \cdot \text{altezza}$.

Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è base $\cdot$ altezza.

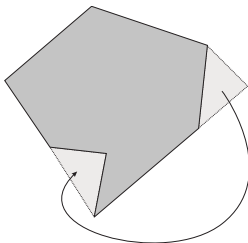


Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è $\text{base} \cdot \text{altezza}$.



Ciò premesso, iniziamo la dimostrazione.

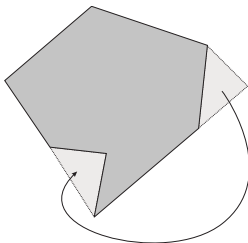
Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è base $\cdot$ altezza.



Ciò premesso, iniziamo la dimostrazione.

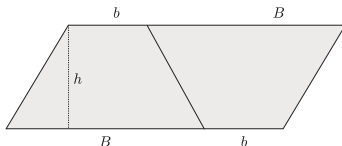
Dimostrazione. Consideriamo due copie del trapezio messe come in figura:

Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è base $\cdot$ altezza.

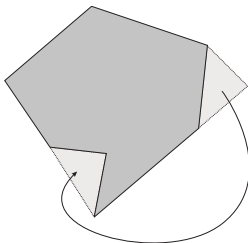


Ciò premesso, iniziamo la dimostrazione.

Dimostrazione. Consideriamo due copie del trapezio messe come in figura:

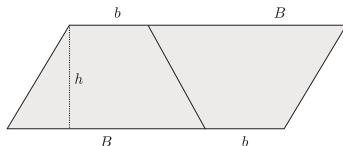


Supponiamo di sapere già che l'area di una figura non cambia se ne “tagliamo” un pezzo e lo “reincolliamo” da un'altra parte, e che l'area del rettangolo è base $\cdot$ altezza.



Ciò premesso, iniziamo la dimostrazione.

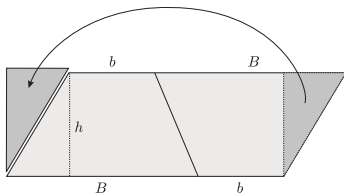
Dimostrazione. Consideriamo due copie del trapezio messe come in figura:



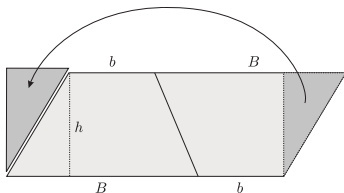
Si tratta di un parallelogramma avente per base la somma delle basi e stessa altezza.

Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:

Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:

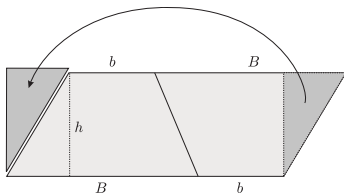


Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:

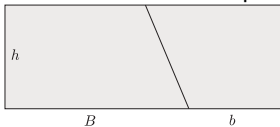


e otteniamo un rettangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza del trapezio.

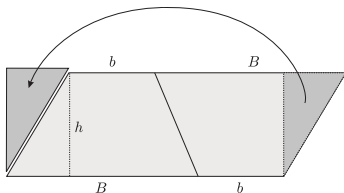
Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:



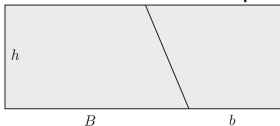
e otteniamo un rettangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza del trapezio.



Adesso ritagliamo da una delle parti del parallelogramma un triangolo, come in figura:



e otteniamo un rettangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza del trapezio.



Questo completa la dimostrazione.

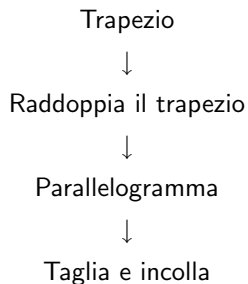
La struttura della dimostrazione è diretta:

Trapezio

La struttura della dimostrazione è diretta:



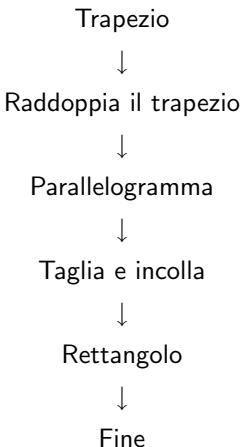
La struttura della dimostrazione è diretta:



La struttura della dimostrazione è diretta:



La struttura della dimostrazione è diretta:



La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa,

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

La dimostrazione per assurdo

La dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) procede invece diversamente.

Essa consiste nel *negare la tesi*, ossia ammettere che la tesi sia falsa, e cercare di dedurre una contraddizione.

Se ciò avviene, la tesi è provata.

Il motivo di questo sta in un fatto di Logica.

Approfondimento: dimostrazioni per assurdo

Siccome la struttura di un teorema è generalmente una implicazione, chiediamoci quando è vera.

Approfondimento: dimostrazioni per assurdo

Siccome la struttura di un teorema è generalmente una implicazione, chiediamoci quando è vera.

In Logica, una frase del tipo $P \Rightarrow Q$ segue la seguente tabella di verità, a seconda dei valori di verità di P e Q :

Approfondimento: dimostrazioni per assurdo

Siccome la struttura di un teorema è generalmente una implicazione, chiediamoci quando è vera.

In Logica, una frase del tipo $P \Rightarrow Q$ segue la seguente tabella di verità, a seconda dei valori di verità di P e Q :

P	$\Rightarrow$	Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

Approfondimento: dimostrazioni per assurdo

Siccome la struttura di un teorema è generalmente una implicazione, chiediamoci quando è vera.

In Logica, una frase del tipo $P \Rightarrow Q$ segue la seguente tabella di verità, a seconda dei valori di verità di P e Q :

P	$\Rightarrow$	Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

(di fatto, l'implicazione è falsa se dal vero segue il falso—cosa auspicabile).

Approfondimento: dimostrazioni per assurdo

Siccome la struttura di un teorema è generalmente una implicazione, chiediamoci quando è vera.

In Logica, una frase del tipo $P \Rightarrow Q$ segue la seguente tabella di verità, a seconda dei valori di verità di P e Q :

P	$\Rightarrow$	Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

(di fatto, l'implicazione è falsa se dal vero segue il falso—cosa auspicabile).

Per completezza, poi, si prescrive il valore di verità di $P \Rightarrow Q$ anche quando P è falsa, cosa che non serve mai (sempre auspicabilmente!) in Matematica, in quanto gli enunciati di partenza si ritengono veri.

Vediamo ora un particolare tipo di implicazione:

Vediamo ora un particolare tipo di implicazione:

$$(\text{non } T \Rightarrow C) \Rightarrow T$$

Vediamo ora un particolare tipo di implicazione:

$$(\text{non } T \Rightarrow C) \Rightarrow T$$

dove T indica un enunciato qualunque e C è un enunciato sempre falso (contraddizione).

Vediamo ora un particolare tipo di implicazione:

$$(\text{non } T \Rightarrow C) \Rightarrow T$$

dove T indica un enunciato qualunque e C è un enunciato sempre falso (contraddizione).

Combinando i due valori di verità di T con la tabella dell'implicazione non è difficile verificare che l'implicazione “rossa” è sempre vera:

Vediamo ora un particolare tipo di implicazione:

$$(\text{non } T \Rightarrow C) \Rightarrow T$$

dove T indica un enunciato qualunque e C è un enunciato sempre falso (contraddizione).

Combinando i due valori di verità di T con la tabella dell'implicazione non è difficile verificare che l'implicazione “rossa” è sempre vera:

$(\text{non } T$	$\Rightarrow$	$C)$	$\Rightarrow$	T
F	V	F	V	V
V	F	F	V	F

Vediamo ora un particolare tipo di implicazione:

$$(\text{non } T \Rightarrow C) \Rightarrow T$$

dove T indica un enunciato qualunque e C è un enunciato sempre falso (contraddizione).

Combinando i due valori di verità di T con la tabella dell'implicazione non è difficile verificare che l'implicazione “rossa” è sempre vera:

$(\text{non } T$	$\Rightarrow$	$C)$	$\Rightarrow$	T
F	V	F	V	V
V	F	F	V	F

Vediamo ora la proposizione che ci interessa.

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

Vediamo ora un particolare tipo di implicazione:

$$(\text{non } T \Rightarrow C) \Rightarrow T$$

dove T indica un enunciato qualunque e C è un enunciato sempre falso (contraddizione).

Combinando i due valori di verità di T con la tabella dell'implicazione non è difficile verificare che l'implicazione “rossa” è sempre vera:

$(\text{non } T$	$\Rightarrow$	$C)$	$\Rightarrow$	T
F	V	F	V	V
V	F	F	V	F

Vediamo ora la proposizione che ci interessa.

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

Questa è proprio la struttura della dimostrazione per assurdo:

$$[\underbrace{(P \quad \text{e} \quad \text{non } Q)}_{\text{Se dall'ipotesi e dalla negazione della tesi}}$$

Se dall'ipotesi e dalla negazione della tesi

Vediamo ora un particolare tipo di implicazione:

$$(\text{non } T \Rightarrow C) \Rightarrow T$$

dove T indica un enunciato qualunque e C è un enunciato sempre falso (contraddizione).

Combinando i due valori di verità di T con la tabella dell'implicazione non è difficile verificare che l'implicazione “rossa” è sempre vera:

$(\text{non } T$	$\Rightarrow$	$C)$	$\Rightarrow$	T
F	V	F	V	V
V	F	F	V	F

Vediamo ora la proposizione che ci interessa.

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

Questa è proprio la struttura della dimostrazione per assurdo:

$$\left[\underbrace{(P \text{ e non } Q)}_{\text{Se dall'ipotesi e dalla negazione della tesi segue una contraddizione}} \Rightarrow C \right]$$

Se dall'ipotesi e dalla negazione della tesi segue una contraddizione

Vediamo ora un particolare tipo di implicazione:

$$(\text{non } T \Rightarrow C) \Rightarrow T$$

dove T indica un enunciato qualunque e C è un enunciato sempre falso (contraddizione).

Combinando i due valori di verità di T con la tabella dell'implicazione non è difficile verificare che l'implicazione “rossa” è sempre vera:

$(\text{non } T$	$\Rightarrow$	$C)$	$\Rightarrow$	T
F	V	F	V	V
V	F	F	V	F

Vediamo ora la proposizione che ci interessa.

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

Questa è proprio la struttura della dimostrazione per assurdo:

$$[\underbrace{(P \text{ e non } Q)}_{\text{Se dall'ipotesi e dalla negazione della tesi segue una contraddizione si dimostra}} \underbrace{\Rightarrow C}_{\text{Se dall'ipotesi e dalla negazione della tesi segue una contraddizione si dimostra}}] \Rightarrow$$

Se dall'ipotesi e dalla negazione della tesi segue una contraddizione si dimostra

Vediamo ora un particolare tipo di implicazione:

$$(\text{non } T \Rightarrow C) \Rightarrow T$$

dove T indica un enunciato qualunque e C è un enunciato sempre falso (contraddizione).

Combinando i due valori di verità di T con la tabella dell'implicazione non è difficile verificare che l'implicazione "rossa" è sempre vera:

$(\text{non } T$	$\Rightarrow$	$C)$	$\Rightarrow$	T
F	V	F	V	V
V	F	F	V	F

Vediamo ora la proposizione che ci interessa.

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

Questa è proprio la struttura della dimostrazione per assurdo:

$$[\underbrace{(P \text{ e non } Q)}_{\text{Se dall'ipotesi e dalla negazione della tesi segue una contraddizione}} \underbrace{\Rightarrow C}_{\text{si dimostra}}] \underbrace{\Rightarrow}_{\text{il teorema}} \underbrace{(P \Rightarrow Q)}_{\text{il teorema}}$$

Potremmo fare tutti i casi dei valori di verità di P e Q , ma preferiamo ragionare così:

Potremmo fare tutti i casi dei valori di verità di P e Q , ma preferiamo ragionare così:

Se chiamiamo T l'enunciato " $P \Rightarrow Q$ ", (il "teorema"), osserviamo che

Potremmo fare tutti i casi dei valori di verità di P e Q , ma preferiamo ragionare così:

Se chiamiamo T l'enunciato " $P \Rightarrow Q$ ", (il "teorema"), osserviamo che

P e non Q ha lo stesso valore di verità di non T

Potremmo fare tutti i casi dei valori di verità di P e Q , ma preferiamo ragionare così:

Se chiamiamo T l'enunciato " $P \Rightarrow Q$ ", (il "teorema"), osserviamo che

P e non Q ha lo stesso valore di verità di non T

(di fatto, è la "negazione del teorema").

Potremmo fare tutti i casi dei valori di verità di P e Q , ma preferiamo ragionare così:

Se chiamiamo T l'enunciato " $P \Rightarrow Q$ ", (il "teorema"), osserviamo che

P e non Q ha lo stesso valore di verità di non T

(di fatto, è la "negazione del teorema").

Infatti (qui ammettiamo di sapere che R e S è vera solo quando sia R che S sono vere)

Potremmo fare tutti i casi dei valori di verità di P e Q , ma preferiamo ragionare così:

Se chiamiamo T l'enunciato " $P \Rightarrow Q$ ", (il "teorema"), osserviamo che

P e non Q ha lo stesso valore di verità di non T

(di fatto, è la "negazione del teorema").

Infatti (qui ammettiamo di sapere che R e S è vera solo quando sia R che S sono vere)

P	e	non Q
V	F	F
V	V	V
F	F	F
F	F	V

$P \Rightarrow Q$	non ($P \Rightarrow Q$)
V	F
F	V
V	F
V	F

Potremmo fare tutti i casi dei valori di verità di P e Q , ma preferiamo ragionare così:

Se chiamiamo T l'enunciato " $P \Rightarrow Q$ ", (il "teorema"), osserviamo che

P e non Q ha lo stesso valore di verità di non T

(di fatto, è la "negazione del teorema").

Infatti (qui ammettiamo di sapere che R e S è vera solo quando sia R che S sono vere)

P	e	non Q
V	F	F
V	V	V
F	F	F
F	F	V

$P \Rightarrow Q$	non ($P \Rightarrow Q$)
V	F
F	V
V	F
V	F

le due colonne rosse hanno gli stessi valori di verità.

Potremmo fare tutti i casi dei valori di verità di P e Q , ma preferiamo ragionare così:

Se chiamiamo T l'enunciato " $P \Rightarrow Q$ ", (il "teorema"), osserviamo che

P e non Q ha lo stesso valore di verità di non T

(di fatto, è la "negazione del teorema").

Infatti (qui ammettiamo di sapere che R e S è vera solo quando sia R che S sono vere)

P	e	non Q
V	F	F
V	V	V
F	F	F
F	F	V

$P \Rightarrow Q$	non ($P \Rightarrow Q$)
V	F
F	V
V	F
V	F

le due colonne rosse hanno gli stessi valori di verità.

Ma allora possiamo sostituire $P \Rightarrow Q$ a T e P e non Q al posto di non T nell'enunciato (vero)

Potremmo fare tutti i casi dei valori di verità di P e Q , ma preferiamo ragionare così:

Se chiamiamo T l'enunciato " $P \Rightarrow Q$ ", (il "teorema"), osserviamo che

P e non Q ha lo stesso valore di verità di non T

(di fatto, è la "negazione del teorema").

Infatti (qui ammettiamo di sapere che R e S è vera solo quando sia R che S sono vere)

P	e	non Q
V	F	F
V	V	V
F	F	F
F	F	V

$P \Rightarrow Q$	non $(P \Rightarrow Q)$
V	F
F	V
V	F
V	F

le due colonne rosse hanno gli stessi valori di verità.

Ma allora possiamo sostituire $P \Rightarrow Q$ a T e P e non Q al posto di non T nell'enunciato (vero)

$$(\text{non } T \Rightarrow C) \Rightarrow T$$

e trovare proprio

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

e trovare proprio

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

Dunque l'enunciato

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

e trovare proprio

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

Dunque l'enunciato

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

è sempre vero, e questo giustifica la dimostrazione per assurdo.
Vediamo un esempio.

e trovare proprio

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

Dunque l'enunciato

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

è sempre vero, e questo giustifica la dimostrazione per assurdo.
Vediamo un esempio.

Teorema con dimostrazione per assurdo

Esistono infiniti numeri primi.

e trovare proprio

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

Dunque l'enunciato

$$[(P \text{ e non } Q) \Rightarrow C] \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

è sempre vero, e questo giustifica la dimostrazione per assurdo.
Vediamo un esempio.

Teorema con dimostrazione per assurdo

Esistono infiniti numeri primi.

(Ricordiamo che i numeri primi sono divisibili esattamente solo per se stessi e per 1).

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

In altre parole, M è il prodotto di tutti i numeri primi, aumentato di 1.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

In altre parole, M è il prodotto di tutti i numeri primi, aumentato di 1. Se M non avesse il “+1” in fondo, sarebbe divisibile per 2, per 3, per 5, ecc.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

In altre parole, M è il prodotto di tutti i numeri primi, aumentato di 1. Se M non avesse il “+1” in fondo, sarebbe divisibile per 2, per 3, per 5, ecc.

Ma siccome c'è il “+1”, non può essere divisibile per 2 (il successivo di un pari dista 2 dal precedente), non può essere divisibile per 3 (il successivo multiplo di 3 di un numero multiplo di 3 dista 3 dal precedente) e così via.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

In altre parole, M è il prodotto di tutti i numeri primi, aumentato di 1. Se M non avesse il “+1” in fondo, sarebbe divisibile per 2, per 3, per 5, ecc.

Ma siccome c'è il “+1”, non può essere divisibile per 2 (il successivo di un pari dista 2 dal precedente), non può essere divisibile per 3 (il successivo multiplo di 3 di un numero multiplo di 3 dista 3 dal precedente) e così via.

Dunque M non è divisibile per nessun numero primo. Ora però, sappiamo che ogni numero si scompone in fattori primi, per cui anche M lo farà: ciascuno dei suoi fattori primi sarà superiore ad N , perché fino ad N non possono essere suoi fattori.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

In altre parole, M è il prodotto di tutti i numeri primi, aumentato di 1. Se M non avesse il “+1” in fondo, sarebbe divisibile per 2, per 3, per 5, ecc.

Ma siccome c'è il “+1”, non può essere divisibile per 2 (il successivo di un pari dista 2 dal precedente), non può essere divisibile per 3 (il successivo multiplo di 3 di un numero multiplo di 3 dista 3 dal precedente) e così via.

Dunque M non è divisibile per nessun numero primo. Ora però, sappiamo che ogni numero si scompone in fattori primi, per cui anche M lo farà: ciascuno dei suoi fattori primi sarà superiore ad N , perché fino ad N non possono essere suoi fattori.

Ma allora esiste almeno un numero primo superiore ad N , e questo è assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, e sia N il più grande di essi.

Consideriamo il numero

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

In altre parole, M è il prodotto di tutti i numeri primi, aumentato di 1. Se M non avesse il “+1” in fondo, sarebbe divisibile per 2, per 3, per 5, ecc.

Ma siccome c'è il “+1”, non può essere divisibile per 2 (il successivo di un pari dista 2 dal precedente), non può essere divisibile per 3 (il successivo multiplo di 3 di un numero multiplo di 3 dista 3 dal precedente) e così via.

Dunque M non è divisibile per nessun numero primo. Ora però, sappiamo che ogni numero si scompone in fattori primi, per cui anche M lo farà: ciascuno dei suoi fattori primi sarà superiore ad N , perché fino ad N non possono essere suoi fattori.

Ma allora esiste almeno un numero primo superiore ad N , e questo è assurdo.

Questo completa la dimostrazione.

Per esemplificare ulteriormente la dimostrazione, supponiamo che esistano solo 6 numeri primi, col che il più grande è $N = 13$. Essi saranno allora

2, 3, 5, 7, 11, 13.

Per esemplificare ulteriormente la dimostrazione, supponiamo che esistano solo 6 numeri primi, col che il più grande è $N = 13$. Essi saranno allora

2, 3, 5, 7, 11, 13.

Allora il numero M è

Per esemplificare ulteriormente la dimostrazione, supponiamo che esistano solo 6 numeri primi, col che il più grande è $N = 13$. Essi saranno allora

$$2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

Allora il numero M è

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30.031$$

Per esemplificare ulteriormente la dimostrazione, supponiamo che esistano solo 6 numeri primi, col che il più grande è $N = 13$. Essi saranno allora

$$2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

Allora il numero M è

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30.031$$

Questo numero è composto, e si decompone in

Per esemplificare ulteriormente la dimostrazione, supponiamo che esistano solo 6 numeri primi, col che il più grande è $N = 13$. Essi saranno allora

$$2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

Allora il numero M è

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30.031$$

Questo numero è composto, e si decompone in

$$30.031 = 59 \cdot 509$$

Per esemplificare ulteriormente la dimostrazione, supponiamo che esistano solo 6 numeri primi, col che il più grande è $N = 13$. Essi saranno allora

$$2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

Allora il numero M è

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30.031$$

Questo numero è composto, e si decompone in

$$30.031 = 59 \cdot 509$$

Come si può constatare, entrambi i suoi fattori primi sono superiori a 13.

Per esemplificare ulteriormente la dimostrazione, supponiamo che esistano solo 6 numeri primi, col che il più grande è $N = 13$. Essi saranno allora

$$2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

Allora il numero M è

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30.031$$

Questo numero è composto, e si decompone in

$$30.031 = 59 \cdot 509$$

Come si può constatare, entrambi i suoi fattori primi sono superiori a 13.
(La dimostrazione, ovviamente, vale per *ogni* N , non solo 13.)

Vediamo ora un esempio interessante tratto dalla Geometria.

Vediamo ora un esempio interessante tratto dalla Geometria.
Sappiamo già cosa sono due rette incidenti. Diamo ora un'altra definizione.

Vediamo ora un esempio interessante tratto dalla Geometria.
Sappiamo già cosa sono due rette incidenti. Diamo ora un'altra definizione.

Rette parallele

Due rette si dicono *parallele* se non hanno nessun punto in comune.

Vediamo ora un esempio interessante tratto dalla Geometria.
Sappiamo già cosa sono due rette incidenti. Diamo ora un'altra definizione.

Rette parallele

Due rette si dicono *parallele* se non hanno nessun punto in comune.

Siamo soliti disegnare due rette parallele così:

Vediamo ora un esempio interessante tratto dalla Geometria.
Sappiamo già cosa sono due rette incidenti. Diamo ora un'altra definizione.

Rette parallele

Due rette si dicono *parallele* se non hanno nessun punto in comune.

Siamo soliti disegnare due rette parallele così:



Vogliamo dimostrare il seguente

Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema con dimostrazione per assurdo

Date due rette parallele, se una terza retta è incidente alla prima, allora è incidente anche alla seconda.

Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema con dimostrazione per assurdo

Date due rette parallele, se una terza retta è incidente alla prima, allora è incidente anche alla seconda.

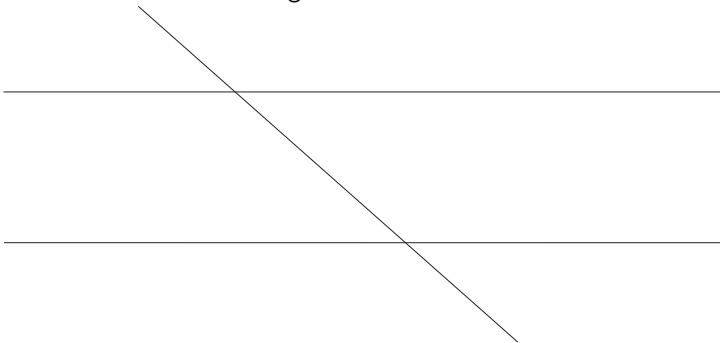
Vediamo subito cosa dice la figura.

Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema con dimostrazione per assurdo

Date due rette parallele, se una terza retta è incidente alla prima, allora è incidente anche alla seconda.

Vediamo subito cosa dice la figura.

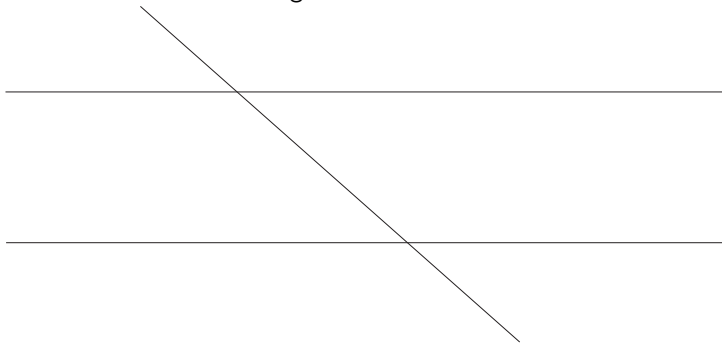


Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema con dimostrazione per assurdo

Date due rette parallele, se una terza retta è incidente alla prima, allora è incidente anche alla seconda.

Vediamo subito cosa dice la figura.



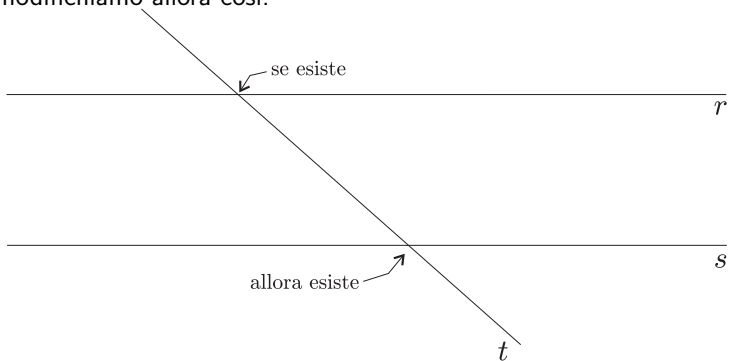
Questa figura non è il massimo: non dice quali siano le rette *che si fanno essere incidenti*, e quali quelle *che si dimostrano essere incidenti*.

Questa figura non è il massimo: non dice quali siano le rette *che si fanno essere incidenti*, e quali quelle *che si dimostrano essere incidenti*.

La modifichiamo allora così:

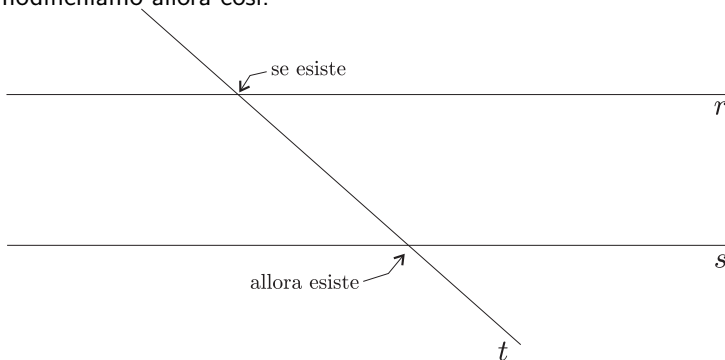
Questa figura non è il massimo: non dice quali siano le rette *che si sanno essere incidenti*, e quali quelle *che si dimostrano essere incidenti*.

La modifichiamo allora così:



Questa figura non è il massimo: non dice quali siano le rette *che si sanno essere incidenti*, e quali quelle *che si dimostrano essere incidenti*.

La modifichiamo allora così:



In questo modo affermiamo che, delle due rette parallele, la retta *superiore* (indicata con r) è quella che si suppone incidente alla terza (indicata con t), mentre quella inferiore (indicata con s) è quella che si dimostra essere incidente.

Da quali assiomi o teoremi partire?

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Siccome t interseca r in un punto esterno ad s , essa è parallela ad s e passante per un punto fuori di essa.

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Siccome t interseca r in un punto esterno ad s , essa è parallela ad s e passante per un punto fuori di essa.

Per il quinto postulato di Euclide, t è l'*unica* parallela a s , dunque coincide con r .

Da quali assiomi o teoremi partire?

In questo caso l'assioma che ci serve è famoso; si chiama *quinto postulato di Euclide*:

("postulato" è oggi sinonimo di assioma)

Quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola parallela alla retta data.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema per assurdo.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la terza retta (quella indicata con t nella figura) **non** sia incidente alla retta s .

Allora la retta t è parallela a s .

Siccome t interseca r in un punto esterno ad s , essa è parallela ad s e passante per un punto fuori di essa.

Per il quinto postulato di Euclide, t è l'*unica* parallela a s , dunque coincide con r .

E questa è una contraddizione, perché r ed s , per definizione, hanno *un solo* punto in comune.

Approfondimento: definizioni implicite

Vi sono dei casi nei quali gli assiomi definiscono *implicitamente* gli oggetti che descrivono.

Approfondimento: definizioni implicite

Vi sono dei casi nei quali gli assiomi definiscono *implicitamente* gli oggetti che descrivono.

Spesso non è così: noi ammettiamo di sapere cosa sia una retta, e gli assiomi dicono *come essa si comporta*.

Approfondimento: definizioni implicite

Vi sono dei casi nei quali gli assiomi definiscono *implicitamente* gli oggetti che descrivono.

Spesso non è così: noi ammettiamo di sapere cosa sia una retta, e gli assiomi dicono *come essa si comporta*.

La definizione implicita è, invece, più sottile: dice che la retta è *ciò che verifica gli assiomi*,

Approfondimento: definizioni implicite

Vi sono dei casi nei quali gli assiomi definiscono *implicitamente* gli oggetti che descrivono.

Spesso non è così: noi ammettiamo di sapere cosa sia una retta, e gli assiomi dicono *come essa si comporta*.

La definizione implicita è, invece, più sottile: dice che la retta è *ciò che verifica gli assiomi*, e il resto è una nostra interpretazione.

Approfondimento: definizioni implicite

Vi sono dei casi nei quali gli assiomi definiscono *implicitamente* gli oggetti che descrivono.

Spesso non è così: noi ammettiamo di sapere cosa sia una retta, e gli assiomi dicono *come essa si comporta*.

La definizione implicita è, invece, più sottile: dice che la retta è *ciò che verifica gli assiomi*, e il resto è una nostra interpretazione.

Per esempio, nei giochi, ciò si verifica di frequente: il cavallo degli scacchi **è** la pedina che si muove ad L, non quella che ha la forma di un cavallo.

Approfondimento: definizioni implicite

Vi sono dei casi nei quali gli assiomi definiscono *implicitamente* gli oggetti che descrivono.

Spesso non è così: noi ammettiamo di sapere cosa sia una retta, e gli assiomi dicono *come essa si comporta*.

La definizione implicita è, invece, più sottile: dice che la retta è *ciò che verifica gli assiomi*, e il resto è una nostra interpretazione.

Per esempio, nei giochi, ciò si verifica di frequente: il cavallo degli scacchi **è** la pedina che si muove ad L, non quella che ha la forma di un cavallo.

Naturalmente ci possono essere tanti modi di *interpretare* gli assiomi, e questo conduce ad esempi strutturalmente simili.

Esempio

Supponiamo di avere una città nella quale, prese due fermate A e B dell'autobus, vi sia *una e una sola* linea di autobus che porti da A a B .

Esempio

Supponiamo di avere una città nella quale, prese due fermate A e B dell'autobus, vi sia *una e una sola* linea di autobus che porti da A a B .

Consideriamo l'assioma

Esempio

Supponiamo di avere una città nella quale, prese due fermate A e B dell'autobus, vi sia *una e una sola* linea di autobus che porti da A a B .

Consideriamo l'assioma

Assioma

Per due punti passa una e una sola retta.

Esempio

Supponiamo di avere una città nella quale, prese due fermate A e B dell'autobus, vi sia *una e una sola* linea di autobus che porti da A a B .

Consideriamo l'assioma

Assioma

Per due punti passa una e una sola retta.

Se ci limitiamo a *questo* assioma, possiamo *interpretare* la parola “punto” come “fermata”, la parola “retta” come “linea di autobus” e la parola “passare per...” con la parola “passare per...”.

Ecco la sua “traduzione”:

Esempio

Supponiamo di avere una città nella quale, prese due fermate A e B dell'autobus, vi sia *una e una sola* linea di autobus che porti da A a B .

Consideriamo l'assioma

Assioma

Per due punti passa una e una sola retta.

Se ci limitiamo a *questo* assioma, possiamo *interpretare* la parola “punto” come “fermata”, la parola “retta” come “linea di autobus” e la parola “passare per...” con la parola “passare per...”.

Ecco la sua “traduzione”:

Interpretazione

Per due fermate passa una e un sola linea di autobus.

Naturalmente, con *ulteriori* assiomi, questa interpretazione può venir meno.

Gli assiomi sono *veri*?

Il fatto che “per due punti passa una e una sola retta” o che “due cose uguali a una terza sono uguali” sembrano così evidenti da non lasciare adito a dubbi.

Gli assiomi sono *veri*?

Il fatto che “per due punti passa una e una sola retta” o che “due cose uguali a una terza sono uguali” sembrano così evidenti da non lasciare adito a dubbi.

Eppure, oggi in Matematica si *chiede di accettare* gli assiomi. Perché?

Gli assiomi sono *veri*?

Il fatto che “per due punti passa una e una sola retta” o che “due cose uguali a una terza sono uguali” sembrano così evidenti da non lasciare adito a dubbi.

Eppure, oggi in Matematica si *chiede di accettare* gli assiomi. Perché?

Un motivo di ciò sta nell'*intuizione*: quando si parla di “retta” si ha in mente un ben preciso oggetto geometrico: non verrebbe mai in mente una circonferenza, per esempio.

Gli assiomi sono *veri*?

Il fatto che “per due punti passa una e una sola retta” o che “due cose uguali a una terza sono uguali” sembrano così evidenti da non lasciare adito a dubbi.

Eppure, oggi in Matematica si *chiede di accettare* gli assiomi. Perché?

Un motivo di ciò sta nell'*intuizione*: quando si parla di “retta” si ha in mente un ben preciso oggetto geometrico: non verrebbe mai in mente una circonferenza, per esempio.

Siccome la Matematica tende ad essere il più possibile indipendente dall'intuizione (cosa a volte fonte di difficoltà), per sicurezza di chiede di *accettare* gli assiomi.

Gli assiomi sono *veri*?

Il fatto che “per due punti passa una e una sola retta” o che “due cose uguali a una terza sono uguali” sembrano così evidenti da non lasciare adito a dubbi.

Eppure, oggi in Matematica si *chiede di accettare* gli assiomi. Perché?

Un motivo di ciò sta nell'*intuizione*: quando si parla di “retta” si ha in mente un ben preciso oggetto geometrico: non verrebbe mai in mente una circonferenza, per esempio.

Siccome la Matematica tende ad essere il più possibile indipendente dall'intuizione (cosa a volte fonte di difficoltà), per sicurezza di chiede di *accettare* gli assiomi.

Ma non è solo un fatto di indipendenza. Il quinto postulato di Euclide è un esempio molto istruttivo, che vedremo tra un attimo.

Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:

Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:



Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:



che non sembra affatto una retta!

Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:



che non sembra affatto una retta!

Chiaramente ci riferiamo a una retta “ideale”, senza spessore, che potremmo immaginare come qualcosa che “non diventa spesso per quanto lo ingrandiamo”.

Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:



che non sembra affatto una retta!

Chiaramente ci riferiamo a una retta “ideale”, senza spessore, che potremmo immaginare come qualcosa che “non diventa spesso per quanto lo ingrandiamo”.

Altre caratteristiche della retta sono però meno facili da verificare.

Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:



che non sembra affatto una retta!

Chiaramente ci riferiamo a una retta “ideale”, senza spessore, che potremmo immaginare come qualcosa che “non diventa spesso per quanto lo ingrandiamo”.

Altre caratteristiche della retta sono però meno facili da verificare. Euclide richiedeva che “la retta si potesse prolungare indefinitamente in maniera rettilinea”.

Ma torniamo alla retta. Cos'è per noi una retta? È chiaro che se ingrandiamo un pezzo del nostro foglio osserviamo qualcosa di questo genere:



che non sembra affatto una retta!

Chiaramente ci riferiamo a una retta “ideale”, senza spessore, che potremmo immaginare come qualcosa che “non diventa spesso per quanto lo ingrandiamo”.

Altre caratteristiche della retta sono però meno facili da verificare.

Euclide richiedeva che “la retta si potesse prolungare indefinitamente in maniera rettilinea”.

Ma che vuol dire? È evidente qui che c'è una definizione circolare: se non sappiamo ancora cosa sia una retta, è difficile capire cosa voglia dire “in maniera rettilinea”.

Infine, alcune richieste, se formulate in modo subdolo, non sembrano affatto evidenti.

Infine, alcune richieste, se formulate in modo subdolo, non sembrano affatto evidenti. Torniamo al quinto postulato.

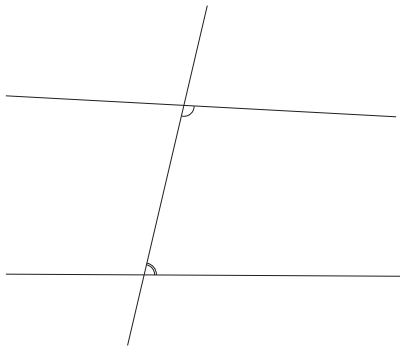
Quinto postulato, versione originale

“Se due rette tagliate da una trasversale formano con essa angoli corrispondenti interni aventi somma inferiore a due angoli retti, esse si incontrano nel semipiano determinato dalla trasversale e contenente detti angoli”

Infine, alcune richieste, se formulate in modo subdolo, non sembrano affatto evidenti. Torniamo al quinto postulato.

Quinto postulato, versione originale

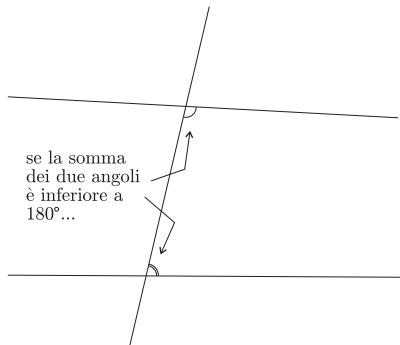
“Se due rette tagliate da una trasversale formano con essa angoli corrispondenti interni aventi somma inferiore a due angoli retti, esse si incontrano nel semipiano determinato dalla trasversale e contenente detti angoli”



Infine, alcune richieste, se formulate in modo subdolo, non sembrano affatto evidenti. Torniamo al quinto postulato.

Quinto postulato, versione originale

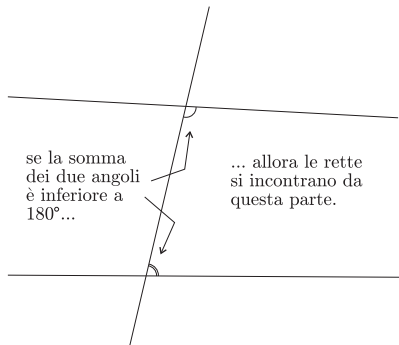
“Se due rette tagliate da una trasversale formano con essa angoli corrispondenti interni aventi somma inferiore a due angoli retti, esse si incontrano nel semipiano determinato dalla trasversale e contenente detti angoli”



Infine, alcune richieste, se formulate in modo subdolo, non sembrano affatto evidenti. Torniamo al quinto postulato.

Quinto postulato, versione originale

“Se due rette tagliate da una trasversale formano con essa angoli corrispondenti interni aventi somma inferiore a due angoli retti, esse si incontrano nel semipiano determinato dalla trasversale e contenente detti angoli”



Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontanano sempre più.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontanano sempre più.

Ma non solo: manipolando opportunamente questi angoli è possibile *far allontanare il punto di intersezione quanto si vuole*.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontanano sempre più.

Ma non solo: manipolando opportunamente questi angoli è possibile *far allontanare il punto di intersezione quanto si vuole*.

Dunque, l'assioma afferma che esiste un punto anche laddove non si riuscirà mai a “controllare” che il punto esista anche in realtà.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontanano sempre più.

Ma non solo: manipolando opportunamente questi angoli è possibile *far allontanare il punto di intersezione quanto si vuole*.

Dunque, l'assioma afferma che esiste un punto anche laddove non si riuscirà mai a “controllare” che il punto esista anche in realtà.

Per questo motivo molti (e forse anche Euclide stesso) hanno dubitato dell'evidenza del quinto postulato, cercando di *dimostrarlo* a partire dagli altri assiomi.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontanano sempre più.

Ma non solo: manipolando opportunamente questi angoli è possibile *far allontanare il punto di intersezione quanto si vuole*.

Dunque, l'assioma afferma che esiste un punto anche laddove non si riuscirà mai a “controllare” che il punto esista anche in realtà.

Per questo motivo molti (e forse anche Euclide stesso) hanno dubitato dell'evidenza del quinto postulato, cercando di *dimostrarlo* a partire dagli altri assiomi.

La Storia ha poi dimostrato che ciò è impossibile.

Si può dimostrare che questa versione è equivalente a quella che abbiamo usato prima.

Il punto è che se la somma dei due angoli in figura è molto prossima a 180° , possiamo immaginare che il punto di intersezione tra le due rette si allontanano sempre più.

Ma non solo: manipolando opportunamente questi angoli è possibile *far allontanare il punto di intersezione quanto si vuole*.

Dunque, l'assioma afferma che esiste un punto anche laddove non si riuscirà mai a “controllare” che il punto esista anche in realtà.

Per questo motivo molti (e forse anche Euclide stesso) hanno dubitato dell'evidenza del quinto postulato, cercando di *dimostrarlo* a partire dagli altri assiomi.

La Storia ha poi dimostrato che ciò è impossibile.

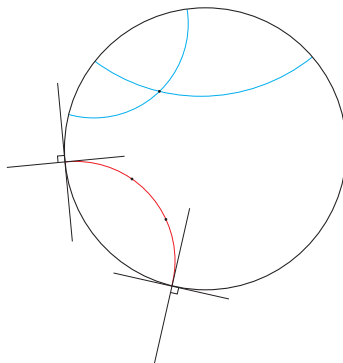
In altre parole, è possibile costruire una Geometria nella quale per un punto esterno a una retta data esistono *infinite* parallele, e quindi l'immagine “intuitiva” della “retta” è *diversa* da quella usuale.

Approfondimento: cenno di geometria non euclidea

Un esempio di interpretazione diversa della retta è il seguente:

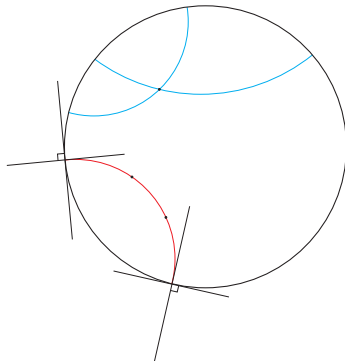
Approfondimento: cenno di geometria non euclidea

Un esempio di interpretazione diversa della retta è il seguente:



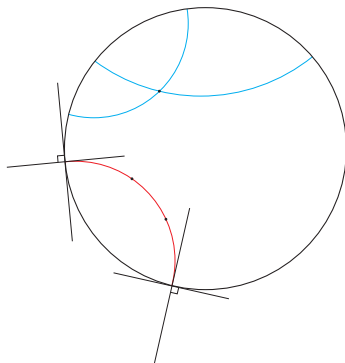
Approfondimento: cenno di geometria non euclidea

Un esempio di interpretazione diversa della retta è il seguente:

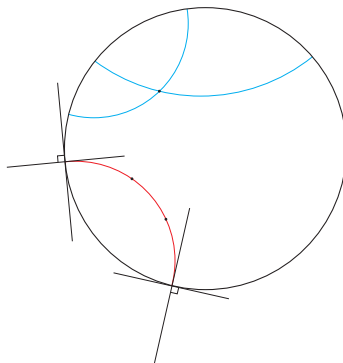


In questa interpretazione i punti sono i punti interni a una circonferenza e le “rette” sono archi di circonferenza che “arrivano perpendicolarmente” alla circonferenza nera.

Approfondimento: cenno di geometria non euclidea

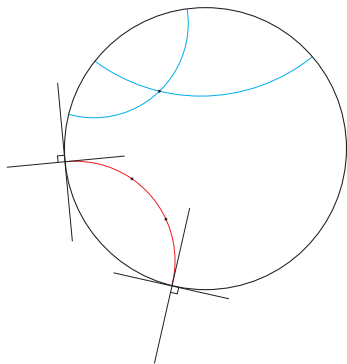


Approfondimento: cenno di geometria non euclidea



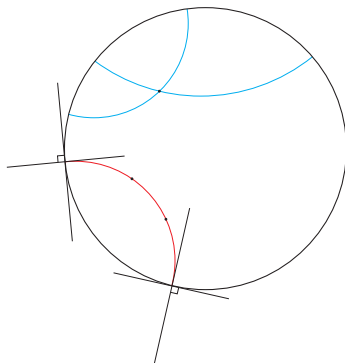
Nella figura si vede una “retta” (rossa) passante per due punti,

Approfondimento: cenno di geometria non euclidea



Nella figura si vede una “retta” (rossa) passante per due punti, e due rette (blu), passanti per un punto esterno alla retta rossa, che non hanno punti in comune con essa, e quindi ad essa parallele.

Approfondimento: cenno di geometria non euclidea



Nella figura si vede una “retta” (rossa) passante per due punti, e due rette (blu), passanti per un punto esterno alla retta rossa, che non hanno punti in comune con essa, e quindi ad essa parallele.

Si può verificare che tutti gli assiomi della Geometria piana (anche quello dell'illimitatezza della retta, con un trucco che non possiamo approfondire), sono verificati, **ad eccezione del quinto postulato**.

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*,

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*, specie se si sta spiegando una teoria.

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*, specie se si sta spiegando una teoria.

In questo caso uno o più di essi sono in realtà *teoremi*:

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*, specie se si sta spiegando una teoria.

In questo caso uno o più di essi sono in realtà *teoremi*: la loro dimostrazione, però, può essere difficile.

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*, specie se si sta spiegando una teoria.

In questo caso uno o più di essi sono in realtà *teoremi*: la loro dimostrazione, però, può essere difficile. In questo caso gli assiomi si dicono *indipendenti*.

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*, specie se si sta spiegando una teoria.

In questo caso uno o più di essi sono in realtà *teoremi*: la loro dimostrazione, però, può essere difficile. In questo caso gli assiomi si dicono *indipendenti*.

Esempio di assiomi non indipendenti (tratto dagli scacchi)

- 1 La Regina si muove sia in diagonale che in orizzontale e verticale;

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*, specie se si sta spiegando una teoria.

In questo caso uno o più di essi sono in realtà *teoremi*: la loro dimostrazione, però, può essere difficile. In questo caso gli assiomi si dicono *indipendenti*.

Esempio di assiomi non indipendenti (tratto dagli scacchi)

- 1 La Regina si muove sia in diagonale che in orizzontale e verticale;
- 2 la Torre si muove in orizzontale e in verticale;

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*, specie se si sta spiegando una teoria.

In questo caso uno o più di essi sono in realtà *teoremi*: la loro dimostrazione, però, può essere difficile. In questo caso gli assiomi si dicono *indipendenti*.

Esempio di assiomi non indipendenti (tratto dagli scacchi)

- 1 La Regina si muove sia in diagonale che in orizzontale e verticale;
- 2 la Torre si muove in orizzontale e in verticale;
- 3 l'Alfiere si muove in diagonale;

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*, specie se si sta spiegando una teoria.

In questo caso uno o più di essi sono in realtà *teoremi*: la loro dimostrazione, però, può essere difficile. In questo caso gli assiomi si dicono *indipendenti*.

Esempio di assiomi non indipendenti (tratto dagli scacchi)

- 1 La Regina si muove sia in diagonale che in orizzontale e verticale;
- 2 la Torre si muove in orizzontale e in verticale;
- 3 l'Alfiere si muove in diagonale;
- 4 il Cavallo si muove ad L, due caselle in orizzontale o verticale e una perpendicolare;

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*, specie se si sta spiegando una teoria.

In questo caso uno o più di essi sono in realtà *teoremi*: la loro dimostrazione, però, può essere difficile. In questo caso gli assiomi si dicono *indipendenti*.

Esempio di assiomi non indipendenti (tratto dagli scacchi)

- 1 La Regina si muove sia in diagonale che in orizzontale e verticale;
- 2 la Torre si muove in orizzontale e in verticale;
- 3 l'Alfiere si muove in diagonale;
- 4 il Cavallo si muove ad L, due caselle in orizzontale o verticale e una perpendicolare;
- 5 l'Alfiere non può mai abbandonare il colore della sua casella;

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*, specie se si sta spiegando una teoria.

In questo caso uno o più di essi sono in realtà *teoremi*: la loro dimostrazione, però, può essere difficile. In questo caso gli assiomi si dicono *indipendenti*.

Esempio di assiomi non indipendenti (tratto dagli scacchi)

- ❶ La Regina si muove sia in diagonale che in orizzontale e verticale;
- ❷ la Torre si muove in orizzontale e in verticale;
- ❸ l'Alfiere si muove in diagonale;
- ❹ il Cavallo si muove ad L, due caselle in orizzontale o verticale e una perpendicolare;
- ❺ l'Alfiere non può mai abbandonare il colore della sua casella;
- ❻ il Cavallo deve sempre cambiare il colore della casella che occupa;

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*, specie se si sta spiegando una teoria.

In questo caso uno o più di essi sono in realtà *teoremi*: la loro dimostrazione, però, può essere difficile. In questo caso gli assiomi si dicono *indipendenti*.

Esempio di assiomi non indipendenti (tratto dagli scacchi)

- ❶ La Regina si muove sia in diagonale che in orizzontale e verticale;
- ❷ la Torre si muove in orizzontale e in verticale;
- ❸ l'Alfiere si muove in diagonale;
- ❹ il Cavallo si muove ad L, due caselle in orizzontale o verticale e una perpendicolare;
- ❺ l'Alfiere non può mai abbandonare il colore della sua casella;
- ❻ il Cavallo deve sempre cambiare il colore della casella che occupa;
- ❼ il Re si muove di una casella, in ogni direzione;

Gli assiomi possono essere *in numero superiore al necessario*, specie se si sta spiegando una teoria.

In questo caso uno o più di essi sono in realtà *teoremi*: la loro dimostrazione, però, può essere difficile. In questo caso gli assiomi si dicono *indipendenti*.

Esempio di assiomi non indipendenti (tratto dagli scacchi)

- ❶ La Regina si muove sia in diagonale che in orizzontale e verticale;
- ❷ la Torre si muove in orizzontale e in verticale;
- ❸ l'Alfiere si muove in diagonale;
- ❹ il Cavallo si muove ad L, due caselle in orizzontale o verticale e una perpendicolare;
- ❺ l'Alfiere non può mai abbandonare il colore della sua casella;
- ❻ il Cavallo deve sempre cambiare il colore della casella che occupa;
- ❼ il Re si muove di una casella, in ogni direzione;
- ❽ ecc. ecc. (aggiungete tutte le regole degli scacchi).

Le regole (assiomi) 5 e 6 sono in realtà teoremi.

Le regole (assiomi) 5 e 6 sono in realtà teoremi.

È facile rendersene conto, in quanto, muovendosi solo in diagonale, l'Alfiere non può mai cambiare il colore della casella che occupa.

Le regole (assiomi) 5 e 6 sono in realtà teoremi.

È facile rendersene conto, in quanto, muovendosi solo in diagonale, l'Alfiere non può mai cambiare il colore della casella che occupa.
Allo stesso modo, è facile rendersi conto che il cavallo *deve* cambiare il colore della casella che occupa ad ogni mossa.



Come verificare che gli assiomi sono indipendenti?

Per verificare che degli assiomi sono indipendenti, si può procedere così:

Come verificare che gli assiomi sono indipendenti?

Per verificare che degli assiomi sono indipendenti, si può procedere così:

- si suppongono veri *tutti* gli assiomi *meno uno*;

Come verificare che gli assiomi sono indipendenti?

Per verificare che degli assiomi sono indipendenti, si può procedere così:

- si suppongono veri *tutti* gli assiomi *meno uno*;
- si cerca una interpretazione degli assiomi nella quale quello lasciato non è vero.

Come verificare che gli assiomi sono indipendenti?

Per verificare che degli assiomi sono indipendenti, si può procedere così:

- si suppongono veri *tutti* gli assiomi *meno uno*;
- si cerca una interpretazione degli assiomi nella quale quello lasciato non è vero.

Se si riesce in ciò, allora non è possibile che l'ultimo assioma sia in realtà un teorema, perché altrimenti sarebbe verificato in *tutte* le interpretazioni degli altri assiomi.

Come verificare che gli assiomi sono indipendenti?

Per verificare che degli assiomi sono indipendenti, si può procedere così:

- si suppongono veri *tutti* gli assiomi *meno uno*;
- si cerca una interpretazione degli assiomi nella quale quello lasciato non è vero.

Se si riesce in ciò, allora non è possibile che l'ultimo assioma sia in realtà un teorema, perché altrimenti sarebbe verificato in *tutte* le interpretazioni degli altri assiomi.

Infine, si ripete la procedura per tutti gli altri assiomi.

Come verificare che gli assiomi sono indipendenti?

Per verificare che degli assiomi sono indipendenti, si può procedere così:

- si suppongono veri *tutti* gli assiomi *meno uno*;
- si cerca una interpretazione degli assiomi nella quale quello lasciato non è vero.

Se si riesce in ciò, allora non è possibile che l'ultimo assioma sia in realtà un teorema, perché altrimenti sarebbe verificato in *tutte* le interpretazioni degli altri assiomi.

Infine, si ripete la procedura per tutti gli altri assiomi.

Per esempio, la mossa della Torre è indipendente dalle altre regole: un gioco con dei Pedoni al posto delle Torri è perfettamente concepibile (anche se diverso dagli scacchi).

Come verificare che gli assiomi sono indipendenti?

Per verificare che degli assiomi sono indipendenti, si può procedere così:

- si suppongono veri *tutti* gli assiomi *meno uno*;
- si cerca una interpretazione degli assiomi nella quale quello lasciato non è vero.

Se si riesce in ciò, allora non è possibile che l'ultimo assioma sia in realtà un teorema, perché altrimenti sarebbe verificato in *tutte* le interpretazioni degli altri assiomi.

Infine, si ripete la procedura per tutti gli altri assiomi.

Per esempio, la mossa della Torre è indipendente dalle altre regole: un gioco con dei Pedoni al posto delle Torri è perfettamente concepibile (anche se diverso dagli scacchi).

Come secondo, ben più importante, esempio, abbiamo visto il quinto postulato di Euclide: il fatto che gli altri assiomi possano essere soddisfatto e il quinto no in un quadro coerente dimostra che esso è indipendente dagli altri.

Più difficile è stabilire se da un certo gruppo di assiomi possa seguire logicamente una contraddizione.

Più difficile è stabilire se da un certo gruppo di assiomi possa seguire logicamente una contraddizione.

Chiaramente, se ciò avvenisse in Matematica, ciò significherebbe che gli assiomi scelti sono sbagliati.

Più difficile è stabilire se da un certo gruppo di assiomi possa seguire logicamente una contraddizione.

Chiaramente, se ciò avvenisse in Matematica, ciò significherebbe che gli assiomi scelti sono sbagliati.

Nell'esempio degli scacchi, aggiungendo l'assioma

Più difficile è stabilire se da un certo gruppo di assiomi possa seguire logicamente una contraddizione.

Chiaramente, se ciò avvenisse in Matematica, ciò significherebbe che gli assiomi scelti sono sbagliati.

Nell'esempio degli scacchi, aggiungendo l'assioma

- 9 L'alfiere deve sempre cambiare il colore della casella che occupa

Più difficile è stabilire se da un certo gruppo di assiomi possa seguire logicamente una contraddizione.

Chiaramente, se ciò avvenisse in Matematica, ciò significherebbe che gli assiomi scelti sono sbagliati.

Nell'esempio degli scacchi, aggiungendo l'assioma

9 L'alfiere deve sempre cambiare il colore della casella che occupa

si trova immediatamente una contraddizione con l'assioma 3. Il gioco è impossibile.

Per stabilire la non contraddittorietà di un gruppo di assiomi si deve cercare un *modello*. Si tratta di una interpretazione nella quale tutti gli assiomi sono verificati.

Per stabilire la non contraddittorietà di un gruppo di assiomi si deve cercare un *modello*. Si tratta di una interpretazione nella quale tutti gli assiomi sono verificati.

Per esempio, l'interpretazione della circonferenza con gli archi di circonferenza come rette è un modello di Geometria non Euclidea.

Per stabilire la non contraddittorietà di un gruppo di assiomi si deve cercare un *modello*. Si tratta di una interpretazione nella quale tutti gli assiomi sono verificati.

Per esempio, l'interpretazione della circonferenza con gli archi di circonferenza come rette è un modello di Geometria non Euclidea. Una volta trovato un modello, se esso (come accade quasi sempre) è di natura matematica, la questione si sposta sugli assiomi che stanno alla base *dell'ambiente del modello*.

Per stabilire la non contraddittorietà di un gruppo di assiomi si deve cercare un *modello*. Si tratta di una interpretazione nella quale tutti gli assiomi sono verificati.

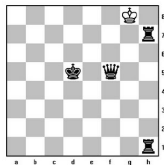
Per esempio, l'interpretazione della circonferenza con gli archi di circonferenza come rette è un modello di Geometria non Euclidea. Una volta trovato un modello, se esso (come accade quasi sempre) è di natura matematica, la questione si sposta sugli assiomi che stanno alla base *dell'ambiente del modello*.

Nell'esempio degli scacchi, se non si contempla la possibilità dello *stallo* (che è la situazione nella quale il Re non può effettuare alcuna mossa con le regole a sua disposizione), il gioco diventa contraddittorio, perché lo stallo è possibile.

Per stabilire la non contraddittorietà di un gruppo di assiomi si deve cercare un *modello*. Si tratta di una interpretazione nella quale tutti gli assiomi sono verificati.

Per esempio, l'interpretazione della circonferenza con gli archi di circonferenza come rette è un modello di Geometria non Euclidea. Una volta trovato un modello, se esso (come accade quasi sempre) è di natura matematica, la questione si sposta sugli assiomi che stanno alla base *dell'ambiente del modello*.

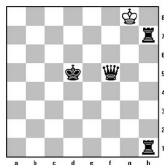
Nell'esempio degli scacchi, se non si contempla la possibilità dello *stallo* (che è la situazione nella quale il Re non può effettuare alcuna mossa con le regole a sua disposizione), il gioco diventa contraddittorio, perché lo stallo è possibile.



Per stabilire la non contraddittorietà di un gruppo di assiomi si deve cercare un *modello*. Si tratta di una interpretazione nella quale tutti gli assiomi sono verificati.

Per esempio, l'interpretazione della circonferenza con gli archi di circonferenza come rette è un modello di Geometria non Euclidea. Una volta trovato un modello, se esso (come accade quasi sempre) è di natura matematica, la questione si sposta sugli assiomi che stanno alla base *dell'ambiente del modello*.

Nell'esempio degli scacchi, se non si contempla la possibilità dello *stallo* (che è la situazione nella quale il Re non può effettuare alcuna mossa con le regole a sua disposizione), il gioco diventa contraddittorio, perché lo stallo è possibile.



Nell'esempio della Geometria non Euclidea, il problema si sposta quindi sulla non contraddittorietà degli assiomi della Geometria Piana.

Abbiamo detto che le dimostrazioni seguono le regole della Logica e sono dettate dal ragionamento.

Abbiamo detto che le dimostrazioni seguono le regole della Logica e sono dettate dal ragionamento.

In certi casi, nelle basi della Matematica, le dimostrazioni possono seguire regole quasi meccaniche.

Abbiamo detto che le dimostrazioni seguono le regole della Logica e sono dettate dal ragionamento.

In certi casi, nelle basi della Matematica, le dimostrazioni possono seguire regole quasi meccaniche.

Nel seguito, riportiamo un esempio tratto dalla Teoria degli Insiemi.

Abbiamo detto che le dimostrazioni seguono le regole della Logica e sono dettate dal ragionamento.

In certi casi, nelle basi della Matematica, le dimostrazioni possono seguire regole quasi meccaniche.

Nel seguito, riportiamo un esempio tratto dalla Teoria degli Insiemi.

Richiamiamo brevemente i concetti che ci servono, basandoci sull'intuizione.

Abbiamo detto che le dimostrazioni seguono le regole della Logica e sono dettate dal ragionamento.

In certi casi, nelle basi della Matematica, le dimostrazioni possono seguire regole quasi meccaniche.

Nel seguito, riportiamo un esempio tratto dalla Teoria degli Insiemi.

Richiamiamo brevemente i concetti che ci servono, basandoci sull'intuizione.

L'*intersezione* di due insiemi ha per elementi gli elementi comuni agli insiemi. Quindi, se li indichiamo con A e B , e indichiamo con $A \cap B$ l'intersezione, avremo che

Abbiamo detto che le dimostrazioni seguono le regole della Logica e sono dettate dal ragionamento.

In certi casi, nelle basi della Matematica, le dimostrazioni possono seguire regole quasi meccaniche.

Nel seguito, riportiamo un esempio tratto dalla Teoria degli Insiemi.

Richiamiamo brevemente i concetti che ci servono, basandoci sull'intuizione.

L'*intersezione* di due insiemi ha per elementi gli elementi comuni agli insiemi. Quindi, se li indichiamo con A e B , e indichiamo con $A \cap B$ l'intersezione, avremo che

$$x \in A \cap B \text{ significa } x \in A \text{ e } x \in B.$$

Abbiamo detto che le dimostrazioni seguono le regole della Logica e sono dettate dal ragionamento.

In certi casi, nelle basi della Matematica, le dimostrazioni possono seguire regole quasi meccaniche.

Nel seguito, riportiamo un esempio tratto dalla Teoria degli Insiemi.

Richiamiamo brevemente i concetti che ci servono, basandoci sull'intuizione.

L'*intersezione* di due insiemi ha per elementi gli elementi comuni agli insiemi. Quindi, se li indichiamo con A e B , e indichiamo con $A \cap B$ l'intersezione, avremo che

$$x \in A \cap B \text{ significa } x \in A \text{ e } x \in B.$$

Se poi di due insiemi uno è contenuto nell'altro (sottoinsieme dell'altro), abbiamo che tutti gli elementi del primo sono anche elementi del secondo. Se indichiamo con $M \subseteq N$ il fatto che M è sottoinsieme di N , avremo che

Abbiamo detto che le dimostrazioni seguono le regole della Logica e sono dettate dal ragionamento.

In certi casi, nelle basi della Matematica, le dimostrazioni possono seguire regole quasi meccaniche.

Nel seguito, riportiamo un esempio tratto dalla Teoria degli Insiemi.

Richiamiamo brevemente i concetti che ci servono, basandoci sull'intuizione.

L'*intersezione* di due insiemi ha per elementi gli elementi comuni agli insiemi. Quindi, se li indichiamo con A e B , e indichiamo con $A \cap B$ l'intersezione, avremo che

$$x \in A \cap B \text{ significa } x \in A \text{ e } x \in B.$$

Se poi di due insiemi uno è contenuto nell'altro (sottoinsieme dell'altro), abbiamo che tutti gli elementi del primo sono anche elementi del secondo. Se indichiamo con $M \subseteq N$ il fatto che M è sottoinsieme di N , avremo che

$$M \subseteq N \text{ significa: se } x \in M, \text{ allora } x \in N.$$

Esempio di dimostrazione formalizzata

Vogliamo allora dimostrare in maniera formalizzata che

Esempio di dimostrazione formalizzata

Vogliamo allora dimostrare in maniera formalizzata che

Teorema con dimostrazione formalizzata

$$(A \cap B) \subseteq B.$$

Esempio di dimostrazione formalizzata

Vogliamo allora dimostrare in maniera formalizzata che

Teorema con dimostrazione formalizzata

$$(A \cap B) \subseteq B.$$

Seguiremo la dimostrazione commentandola, introducendo via via le regole logiche che usiamo (tanto è un esempio).

Esempio di dimostrazione formalizzata

Vogliamo allora dimostrare in maniera formalizzata che

Teorema con dimostrazione formalizzata

$$(A \cap B) \subseteq B.$$

Seguiremo la dimostrazione commentandola, introducendo via via le regole logiche che usiamo (tanto è un esempio).

Dimostrazione formalizzata.

Esempio di dimostrazione formalizzata

Vogliamo allora dimostrare in maniera formalizzata che

Teorema con dimostrazione formalizzata

$$(A \cap B) \subseteq B.$$

Seguiremo la dimostrazione commentandola, introducendo via via le regole logiche che usiamo (tanto è un esempio).

Dimostrazione formalizzata.

	Passaggio	Commento
--	-----------	----------

Esempio di dimostrazione formalizzata

Vogliamo allora dimostrare in maniera formalizzata che

Teorema con dimostrazione formalizzata

$$(A \cap B) \subseteq B.$$

Seguiremo la dimostrazione commentandola, introducendo via via le regole logiche che usiamo (tanto è un esempio).

Dimostrazione formalizzata.

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.

Esempio di dimostrazione formalizzata

Vogliamo allora dimostrare in maniera formalizzata che

Teorema con dimostrazione formalizzata

$$(A \cap B) \subseteq B.$$

Seguiremo la dimostrazione commentandola, introducendo via via le regole logiche che usiamo (tanto è un esempio).

Dimostrazione formalizzata.

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.

Esempio di dimostrazione formalizzata

Vogliamo allora dimostrare in maniera formalizzata che

Teorema con dimostrazione formalizzata

$$(A \cap B) \subseteq B.$$

Seguiremo la dimostrazione commentandola, introducendo via via le regole logiche che usiamo (tanto è un esempio).

Dimostrazione formalizzata.

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A$ e $x \in B$	Deduzione da 1. e 2.

Esempio di dimostrazione formalizzata

Vogliamo allora dimostrare in maniera formalizzata che

Teorema con dimostrazione formalizzata

$$(A \cap B) \subseteq B.$$

Seguiremo la dimostrazione commentandola, introducendo via via le regole logiche che usiamo (tanto è un esempio).

Dimostrazione formalizzata.

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A$ e $x \in B$	Deduzione da 1. e 2.

Qui abbiamo usato una *regola logica* (chiamata *modus ponens*):

Se in un punto della dimostrazione ci sono un enunciato P e un enunciato $P \Rightarrow Q$, allora in una riga successiva si può mettere Q .

Se in un punto della dimostrazione ci sono un enunciato P e un enunciato $P \Rightarrow Q$, allora in una riga successiva si può mettere Q .

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)

Se in un punto della dimostrazione ci sono un enunciato P e un enunciato $P \Rightarrow Q$, allora in una riga successiva si può mettere Q .

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	

Se in un punto della dimostrazione ci sono un enunciato P e un enunciato $P \Rightarrow Q$, allora in una riga successiva si può mettere Q .

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	$P \Rightarrow Q$	Dimostrato in qualche modo

Se in un punto della dimostrazione ci sono un enunciato P e un enunciato $P \Rightarrow Q$, allora in una riga successiva si può mettere Q .

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	$P \Rightarrow Q$	Dimostrato in qualche modo
...		

Se in un punto della dimostrazione ci sono un enunciato P e un enunciato $P \Rightarrow Q$, allora in una riga successiva si può mettere Q .

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	$P \Rightarrow Q$	Dimostrato in qualche modo
...		
$N + M$	Q	deduzione

Se in un punto della dimostrazione ci sono un enunciato P e un enunciato $P \Rightarrow Q$, allora in una riga successiva si può mettere Q .

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	$P \Rightarrow Q$	Dimostrato in qualche modo
...		
$N + M$	Q	deduzione

Essa corrisponde al ragionamento

Piove.

Se in un punto della dimostrazione ci sono un enunciato P e un enunciato $P \Rightarrow Q$, allora in una riga successiva si può mettere Q .

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	$P \Rightarrow Q$	Dimostrato in qualche modo
...		
$N + M$	Q	deduzione

Essa corrisponde al ragionamento

Piove.

Se piove, allora mi bagno.

Se in un punto della dimostrazione ci sono un enunciato P e un enunciato $P \Rightarrow Q$, allora in una riga successiva si può mettere Q .

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	$P \Rightarrow Q$	Dimostrato in qualche modo
...		
$N + M$	Q	deduzione

Essa corrisponde al ragionamento

Piove.

Se piove, allora mi bagno.

Conclusione: Mi bagno.

Se in un punto della dimostrazione ci sono un enunciato P e un enunciato $P \Rightarrow Q$, allora in una riga successiva si può mettere Q .

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	$P \Rightarrow Q$	Dimostrato in qualche modo
...		
$N + M$	Q	deduzione

Essa corrisponde al ragionamento

Piove.

Se piove, allora mi bagno.

Conclusione: Mi bagno.

Proseguiamo, riportando i passaggi precedenti per chiarezza:

Passaggio	Commento

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A$ e $x \in B$	Deduzione da 1. e 2.

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A$ e $x \in B$	Deduzione da 1. e 2.
4.	$x \in B$	Deduzione da 3.

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A$ e $x \in B$	Deduzione da 1. e 2.
4.	$x \in B$	Deduzione da 3.

Qui abbiamo usato una proprietà della congiunzione “e”:

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A$ e $x \in B$	Deduzione da 1. e 2.
4.	$x \in B$	Deduzione da 3.

Qui abbiamo usato una proprietà della congiunzione “e”:

Se in un punto della dimostrazione c'è un enunciato della forma “P e Q”, allora in una riga successiva si possono scrivere P e Q separatamente.

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A$ e $x \in B$	Deduzione da 1. e 2.
4.	$x \in B$	Deduzione da 3.

Qui abbiamo usato una proprietà della congiunzione “e”:

Se in un punto della dimostrazione c'è un enunciato della forma “P e Q”, allora in una riga successiva si possono scrivere P e Q separatamente.

Chiaramente, essa corrisponde al ragionamento

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A$ e $x \in B$	Deduzione da 1. e 2.
4.	$x \in B$	Deduzione da 3.

Qui abbiamo usato una proprietà della congiunzione “e”:

Se in un punto della dimostrazione c'è un enunciato della forma “P e Q”, allora in una riga successiva si possono scrivere P e Q separatamente.

Chiaramente, essa corrisponde al ragionamento

Piove e fa freddo.

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A$ e $x \in B$	Deduzione da 1. e 2.
4.	$x \in B$	Deduzione da 3.

Qui abbiamo usato una proprietà della congiunzione “e”:

Se in un punto della dimostrazione c'è un enunciato della forma “P e Q”, allora in una riga successiva si possono scrivere P e Q separatamente.

Chiaramente, essa corrisponde al ragionamento

Piove e fa freddo.

Conclusione: Piove.

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A$ e $x \in B$	Deduzione da 1. e 2.
4.	$x \in B$	Deduzione da 3.

Qui abbiamo usato una proprietà della congiunzione “e”:

Se in un punto della dimostrazione c'è un enunciato della forma “P e Q”, allora in una riga successiva si possono scrivere P e Q separatamente.

Chiaramente, essa corrisponde al ragionamento

Piove e fa freddo.

Conclusione: Piove.

Conclusione: Fa freddo.

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A$ e $x \in B$	Deduzione da 1. e 2.
4.	$x \in B$	Deduzione da 3.

Qui abbiamo usato una proprietà della congiunzione “e”:

Se in un punto della dimostrazione c'è un enunciato della forma “P e Q”, allora in una riga successiva si possono scrivere P e Q separatamente.

Chiaramente, essa corrisponde al ragionamento

Piove e fa freddo.

Conclusione: Piove.

Conclusione: Fa freddo.

(Naturalmente, ci si può limitare ad una sola delle due conclusioni.)

	Passaggio	Commento
1.	P e Q	(dimostrato, o preso per ipotesi)

	Passaggio	Commento
1.	P e Q	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	P	deduzione

	Passaggio	Commento
1.	P e Q	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	P	deduzione
...		
$N + M$	Q	deduzione

	Passaggio	Commento
1.	P e Q	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	P	deduzione
...		
$N + M$	Q	deduzione

Proseguiamo:

	Passaggio	Commento
1.	P e Q	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	P	deduzione
...		
$N + M$	Q	deduzione

Proseguiamo:

	Passaggio	Commento
--	-----------	----------

	Passaggio	Commento
1.	P e Q	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	P	deduzione
...		
$N + M$	Q	deduzione

Proseguiamo:

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.

	Passaggio	Commento
1.	$P \text{ e } Q$	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	P	deduzione
...		
$N + M$	Q	deduzione

Proseguiamo:

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ e } x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.

	Passaggio	Commento
1.	$P \text{ e } Q$	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	P	deduzione
...		
$N + M$	Q	deduzione

Proseguiamo:

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ e } x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A \text{ e } x \in B$	Deduzione da 1. e 2.

	Passaggio	Commento
1.	$P \text{ e } Q$	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	P	deduzione
...		
$N + M$	Q	deduzione

Proseguiamo:

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ e } x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A \text{ e } x \in B$	Deduzione da 1. e 2.
4.	$x \in B$	Deduzione da 3.

	Passaggio	Commento
1.	$P \text{ e } Q$	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	P	deduzione
...		
$N + M$	Q	deduzione

Proseguiamo:

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ e } x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A \text{ e } x \in B$	Deduzione da 1. e 2.
4.	$x \in B$	Deduzione da 3.
5.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$	Deduzione da 1. e 4.

	Passaggio	Commento
1.	$P \text{ e } Q$	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	P	deduzione
...		
$N + M$	Q	deduzione

Proseguiamo:

	Passaggio	Commento
1.	$x \in A \cap B$	Supponiamo che x appartenga a $A \cap B$.
2.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ e } x \in B$	Dalla definizione di $A \cap B$ data sopra.
3.	$x \in A \text{ e } x \in B$	Deduzione da 1. e 2.
4.	$x \in B$	Deduzione da 3.
5.	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$	Deduzione da 1. e 4.

Qui abbiamo usato un'ultima regola logica

Se in un punto della dimostrazione si ottiene, o si suppone, un enunciato P , e successivamente, applicando le regole logiche ammissibili, si trova un altro enunciato Q , in una riga successiva si può scrivere $P \Rightarrow Q$.

Se in un punto della dimostrazione si ottiene, o si suppone, un enunciato P , e successivamente, applicando le regole logiche ammissibili, si trova un altro enunciato Q , in una riga successiva si può scrivere $P \Rightarrow Q$.

Si tratta di una conferma del fatto che è una dimostrazione: P è una “ipotesi” e Q una “tesi”.

Se in un punto della dimostrazione si ottiene, o si suppone, un enunciato P , e successivamente, applicando le regole logiche ammissibili, si trova un altro enunciato Q , in una riga successiva si può scrivere $P \Rightarrow Q$.

Si tratta di una conferma del fatto che è una dimostrazione: P è una “ipotesi” e Q una “tesi”.

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)

Se in un punto della dimostrazione si ottiene, o si suppone, un enunciato P , e successivamente, applicando le regole logiche ammissibili, si trova un altro enunciato Q , in una riga successiva si può scrivere $P \Rightarrow Q$.

Si tratta di una conferma del fatto che è una dimostrazione: P è una “ipotesi” e Q una “tesi”.

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	Q	Dimostrato con regole ammesse

Se in un punto della dimostrazione si ottiene, o si suppone, un enunciato P , e successivamente, applicando le regole logiche ammissibili, si trova un altro enunciato Q , in una riga successiva si può scrivere $P \Rightarrow Q$.

Si tratta di una conferma del fatto che è una dimostrazione: P è una “ipotesi” e Q una “tesi”.

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	Q	Dimostrato con regole ammesse
...		
$N + M$	$P \Rightarrow Q$	deduzione

Se in un punto della dimostrazione si ottiene, o si suppone, un enunciato P , e successivamente, applicando le regole logiche ammissibili, si trova un altro enunciato Q , in una riga successiva si può scrivere $P \Rightarrow Q$.

Si tratta di una conferma del fatto che è una dimostrazione: P è una “ipotesi” e Q una “tesi”.

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	Q	Dimostrato con regole ammesse
...		
$N + M$	$P \Rightarrow Q$	deduzione

Riprendiamo quello che abbiamo trovato:

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in B.$$

Se in un punto della dimostrazione si ottiene, o si suppone, un enunciato P , e successivamente, applicando le regole logiche ammissibili, si trova un altro enunciato Q , in una riga successiva si può scrivere $P \Rightarrow Q$.

Si tratta di una conferma del fatto che è una dimostrazione: P è una “ipotesi” e Q una “tesi”.

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	Q	Dimostrato con regole ammesse
...		
$N + M$	$P \Rightarrow Q$	deduzione

Riprendiamo quello che abbiamo trovato:

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in B.$$

Questo si può anche scrivere

Se in un punto della dimostrazione si ottiene, o si suppone, un enunciato P , e successivamente, applicando le regole logiche ammissibili, si trova un altro enunciato Q , in una riga successiva si può scrivere $P \Rightarrow Q$.

Si tratta di una conferma del fatto che è una dimostrazione: P è una “ipotesi” e Q una “tesi”.

	Passaggio	Commento
1.	P	(dimostrato, o preso per ipotesi)
...	...	
N	Q	Dimostrato con regole ammesse
...		
$N + M$	$P \Rightarrow Q$	deduzione

Riprendiamo quello che abbiamo trovato:

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in B.$$

Questo si può anche scrivere

$$\text{Se } x \in A \cap B, \text{ allora } x \in B.$$

Se confrontiamo questo con la *definizione* di “essere contenuto in” data sopra:

Se confrontiamo questo con la *definizione* di “essere contenuto in” data sopra:

$M \subseteq N$ significa: se $x \in M$, allora $x \in N$,

ci accorgiamo che M corrisponde ad $A \cap B$ e N a B .

Se confrontiamo questo con la *definizione* di “essere contenuto in” data sopra:

$M \subseteq N$ significa: se $x \in M$, allora $x \in N$,

ci accorgiamo che M corrisponde ad $A \cap B$ e N a B . Quindi abbiamo dimostrato che

Se confrontiamo questo con la *definizione* di “essere contenuto in” data sopra:

$M \subseteq N$ significa: se $x \in M$, allora $x \in N$,

ci accorgiamo che M corrisponde ad $A \cap B$ e N a B . Quindi abbiamo dimostrato che

$$A \cap B \subseteq B$$

Se confrontiamo questo con la *definizione* di “essere contenuto in” data sopra:

$M \subseteq N$ significa: se $x \in M$, allora $x \in N$,

ci accorgiamo che M corrisponde ad $A \cap B$ e N a B . Quindi abbiamo dimostrato che

$$A \cap B \subseteq B$$

e quindi il teorema.

Approfondimento: Logica formale e Genetica

Le dimostrazioni formalizzate sono difficili. Però hanno il pregio di illustrare in forma sintetica il ragionamento, e non solo.

Approfondimento: Logica formale e Genetica

Le dimostrazioni formalizzate sono difficili. Però hanno il pregio di illustrare in forma sintetica il ragionamento, e non solo.

Esse hanno mostrato che un “sistema di assiomi” (in questo caso, quelli della Teoria degli Insiemi) assomiglia molto a delle “regole di generazione di parole”, fatto questo di notevole interesse, come mostrerà il seguente esempio, non matematico.

Approfondimento: Logica formale e Genetica

Le dimostrazioni formalizzate sono difficili. Però hanno il pregio di illustrare in forma sintetica il ragionamento, e non solo.

Esse hanno mostrato che un “sistema di assiomi” (in questo caso, quelli della Teoria degli Insiemi) assomiglia molto a delle “regole di generazione di parole”, fatto questo di notevole interesse, come mostrerà il seguente esempio, non matematico.

I “teoremi” dell'esempio sono delle sequenze di quattro lettere, che per convenzione supporremo saranno A, T, C, G.

Approfondimento: Logica formale e Genetica

Le dimostrazioni formalizzate sono difficili. Però hanno il pregio di illustrare in forma sintetica il ragionamento, e non solo.

Esse hanno mostrato che un “sistema di assiomi” (in questo caso, quelli della Teoria degli Insiemi) assomiglia molto a delle “regole di generazione di parole”, fatto questo di notevole interesse, come mostrerà il seguente esempio, non matematico.

I “teoremi” dell’esempio sono delle sequenze di quattro lettere, che per convenzione supporremo saranno A, T, C, G.

Esempio di sistema di assiomi

- 1 Dopo una A ci deve andare una C o una G;

Approfondimento: Logica formale e Genetica

Le dimostrazioni formalizzate sono difficili. Però hanno il pregio di illustrare in forma sintetica il ragionamento, e non solo.

Esse hanno mostrato che un “sistema di assiomi” (in questo caso, quelli della Teoria degli Insiemi) assomiglia molto a delle “regole di generazione di parole”, fatto questo di notevole interesse, come mostrerà il seguente esempio, non matematico.

I “teoremi” dell'esempio sono delle sequenze di quattro lettere, che per convenzione supporremo saranno A, T, C, G.

Esempio di sistema di assiomi

- 1 Dopo una A ci deve andare una C o una G;
- 2 Dopo una C deve andare una T;

Approfondimento: Logica formale e Genetica

Le dimostrazioni formalizzate sono difficili. Però hanno il pregio di illustrare in forma sintetica il ragionamento, e non solo.

Esse hanno mostrato che un “sistema di assiomi” (in questo caso, quelli della Teoria degli Insiemi) assomiglia molto a delle “regole di generazione di parole”, fatto questo di notevole interesse, come mostrerà il seguente esempio, non matematico.

I “teoremi” dell’esempio sono delle sequenze di quattro lettere, che per convenzione supporremo saranno A, T, C, G.

Esempio di sistema di assiomi

- 1 Dopo una A ci deve andare una C o una G;
- 2 Dopo una C deve andare una T;
- 3 Non sono ammesse più di tre ripetizioni consecutive di una lettera.

Approfondimento: Logica formale e Genetica

Le dimostrazioni formalizzate sono difficili. Però hanno il pregio di illustrare in forma sintetica il ragionamento, e non solo.

Esse hanno mostrato che un “sistema di assiomi” (in questo caso, quelli della Teoria degli Insiemi) assomiglia molto a delle “regole di generazione di parole”, fatto questo di notevole interesse, come mostrerà il seguente esempio, non matematico.

I “teoremi” dell’esempio sono delle sequenze di quattro lettere, che per convenzione supporremo saranno A, T, C, G.

Esempio di sistema di assiomi

- 1 Dopo una A ci deve andare una C o una G;
- 2 Dopo una C deve andare una T;
- 3 Non sono ammesse più di tre ripetizioni consecutive di una lettera.

I *teoremi*, in questo gioco, sono le “parole” che si possono formare con gli assiomi.

Per esempio,

Per esempio,

ACATT, CTAGTATT, A, ACGGG

Per esempio,

ACATT, CTAGTATT, A, ACGGG

sono teoremi, mentre

Per esempio,

ACATT, CTAGTATT, A, ACGGG

sono teoremi, mentre

AA, AGCA, ACTTTGGGG

Per esempio,

ACATT, CTAGTATT, A, ACGGG

sono teoremi, mentre

AA, AGCA, ACTTTGGGG

non lo sono (la prima viola la prima regola, la seconda la seconda e la terza la terza).

Per esempio,

ACATT, CTAGTATT, A, ACGGG

sono teoremi, mentre

AA, AGCA, ACTTTGGGG

non lo sono (la prima viola la prima regola, la seconda la seconda e la terza la terza).

È evidente il parallelo con i *geni*, che sono una sequenza di “lettere chimiche” che codificano per diverse proteine.

Per esempio,

ACATT, CTAGTATT, A, ACGGG

sono teoremi, mentre

AA, AGCA, ACTTTGGGG

non lo sono (la prima viola la prima regola, la seconda la seconda e la terza la terza).

È evidente il parallelo con i *geni*, che sono una sequenza di “lettere chimiche” che codificano per diverse proteine.

FINE