

Introduzione all'Algebra astratta

Alfredo Marzocchi

Università Cattolica del Sacro Cuore
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Via dei Musei, 41 – 25121 Brescia (Italy)

- 1 Introduzione
- 2 Un esempio: S_3
- 3 S_2
- 4 Approfondimento
- 5 Gruppi ciclici
- 6 Il gruppo di Klein

Cosa significa l' "Algebra *astratta*"?

Chi ha studiato o sta studiando operazioni con i polinomi, calcolo letterale e quant'altro non può non chiedersi

Cosa significa l' "Algebra *astratta*"?

Chi ha studiato o sta studiando operazioni con i polinomi, calcolo letterale e quant'altro non può non chiedersi

Ma l'Algebra della scuola superiore non è già *astratta*?

Cosa significa l' "Algebra *astratta*"?

Chi ha studiato o sta studiando operazioni con i polinomi, calcolo letterale e quant'altro non può non chiedersi

Ma l'Algebra della scuola superiore non è già *astratta*?

In effetti, leggendo una cosa di questo tipo

Cosa significa l' "Algebra *astratta*" ?

Chi ha studiato o sta studiando operazioni con i polinomi, calcolo letterale e quant'altro non può non chiedersi

Ma l'Algebra della scuola superiore non è già *astratta*?

In effetti, leggendo una cosa di questo tipo

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

Cosa significa l' "Algebra *astratta*" ?

Chi ha studiato o sta studiando operazioni con i polinomi, calcolo letterale e quant'altro non può non chiedersi

Ma l'Algebra della scuola superiore non è già *astratta*?

In effetti, leggendo una cosa di questo tipo

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

si ha proprio la sensazione che sia vero.

In realtà, con il termine “algebra astratta” si intendono quelle proprietà delle *operazioni* effettuate su oggetti che *non* siano numeri.

In realtà, con il termine “algebra astratta” si intendono quelle proprietà delle *operazioni* effettuate su oggetti che *non* siano numeri.
Ma cosa intendiamo normalmente per “operazione”?

In realtà, con il termine “algebra astratta” si intendono quelle proprietà delle *operazioni* effettuate su oggetti che *non* siano numeri.

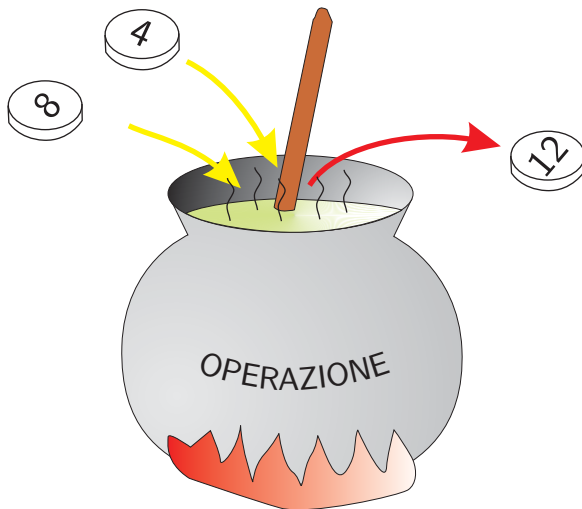
Ma cosa intendiamo normalmente per “operazione”?

L'idea che abbiamo comunemente è questa:

In realtà, con il termine “algebra astratta” si intendono quelle proprietà delle *operazioni* effettuate su oggetti che *non* siano numeri.

Ma cosa intendiamo normalmente per “operazione”?

L'idea che abbiamo comunemente è questa:

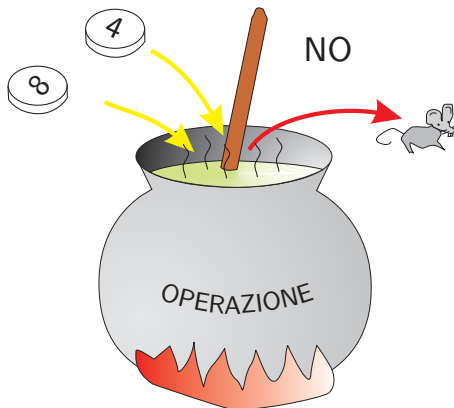


A parte un aspetto che discuteremo fra un attimo, l'idea è giusta: in un'operazione (quella che in realtà si dovrebbe chiamare un'operazione *binaria*) si “fondono” due oggetti e se ne ottiene un terzo, il risultato.

A parte un aspetto che discuteremo fra un attimo, l'idea è giusta: in un'operazione (quella che in realtà si dovrebbe chiamare un'operazione *binaria*) si “fondono” due oggetti e se ne ottiene un terzo, il risultato. È importante però che il risultato sia dello stesso tipo degli oggetti “fusi”:

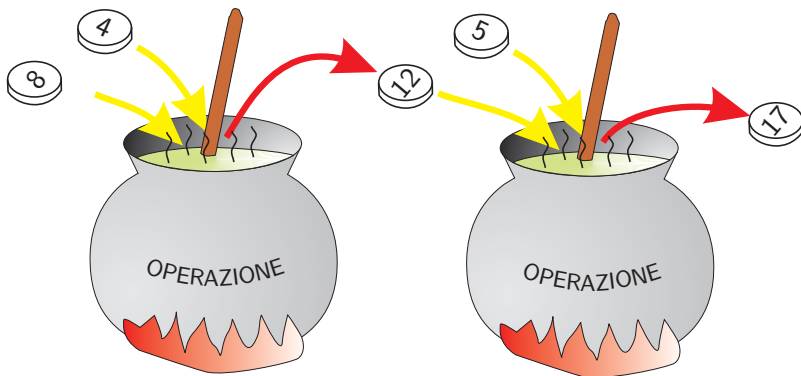
A parte un aspetto che discuteremo fra un attimo, l'idea è giusta: in un'operazione (quella che in realtà si dovrebbe chiamare un'operazione *binaria*) si “fondono” due oggetti e se ne ottiene un terzo, il risultato. È importante però che il risultato sia dello stesso tipo degli oggetti “fusi”: cioè, *non* una cosa di questo genere:

A parte un aspetto che discuteremo fra un attimo, l'idea è giusta: in un'operazione (quella che in realtà si dovrebbe chiamare un'operazione *binaria*) si “fondono” due oggetti e se ne ottiene un terzo, il risultato. È importante però che il risultato sia dello stesso tipo degli oggetti “fusi”: cioè, *non* una cosa di questo genere:



Ciò si esprime dicendo che un'operazione è una *legge di composizione interna*. L'idea è che, se una operazione produce numeri, il risultato può essere usato per produrre altri numeri, eccetera:

Ciò si esprime dicendo che un'operazione è una *legge di composizione interna*. L'idea è che, se una operazione produce numeri, il risultato può essere usato per produrre altri numeri, eccetera:



L'idea di “buttare” due numeri in pasto ad un'operazione è quasi giusta: essa però lascia il dubbio se l'*ordine* con i quali si buttano sia importante.

L'idea di “buttare” due numeri in pasto ad un'operazione è quasi giusta: essa però lascia il dubbio se l'*ordine* con i quali si buttano sia importante. In effetti, anche in cucina l'ordine è importante:

L'idea di “buttare” due numeri in pasto ad un'operazione è quasi giusta: essa però lascia il dubbio se l'*ordine* con i quali si buttano sia importante. In effetti, anche in cucina l'ordine è importante: non è la stessa cosa cuocere *prima* la pasta e *poi* aggiungere l'acqua bollente,

L'idea di “buttare” due numeri in pasto ad un'operazione è quasi giusta: essa però lascia il dubbio se l'*ordine* con i quali si buttano sia importante. In effetti, anche in cucina l'ordine è importante: non è la stessa cosa cuocere *prima* la pasta e *poi* aggiungere l'acqua bollente, rispetto a far bollire l'acqua e poi buttarci la pasta.

L'idea di “buttare” due numeri in pasto ad un'operazione è quasi giusta: essa però lascia il dubbio se l'*ordine* con i quali si buttano sia importante. In effetti, anche in cucina l'ordine è importante: non è la stessa cosa cuocere *prima* la pasta e *poi* aggiungere l'acqua bollente, rispetto a far bollire l'acqua e poi buttarci la pasta. L'idea del pentolone richiama, in altre parole, una operazione *commutativa*,

L'idea di “buttare” due numeri in pasto ad un'operazione è quasi giusta: essa però lascia il dubbio se l'*ordine* con i quali si buttano sia importante. In effetti, anche in cucina l'ordine è importante: non è la stessa cosa cuocere *prima* la pasta e *poi* aggiungere l'acqua bollente, rispetto a far bollire l'acqua e poi buttarci la pasta. L'idea del pentolone richiama, in altre parole, una operazione *commutativa*, nella quale l'ordine degli oggetti con cui operare non conta.

Un esempio: S_3

Facciamo allora un esempio.

Un esempio: S_3

Facciamo allora un esempio. Prendiamo un cartello stradale ben noto:

Un esempio: S_3

Facciamo allora un esempio. Prendiamo un cartello stradale ben noto:



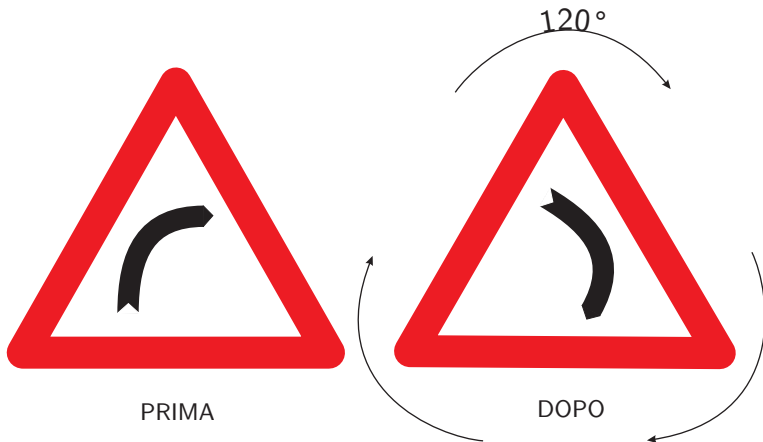
Immaginiamo che di notte qualche buontempone vada a ruotare il cartello riappendendolo, così:

Immaginiamo che di notte qualche buontempone vada a ruotare il cartello riappendendolo, così:

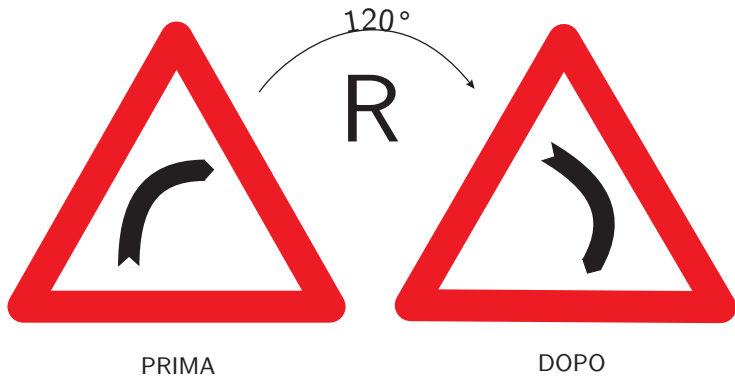


Si capisce bene cosa ha fatto: ha ruotato il cartello di 120° in senso orario:

Si capisce bene cosa ha fatto: ha ruotato il cartello di 120° in senso orario:



Si capisce bene cosa ha fatto: ha ruotato il cartello di 120° in senso orario:



Bene. Chiamiamo R questa rotazione.

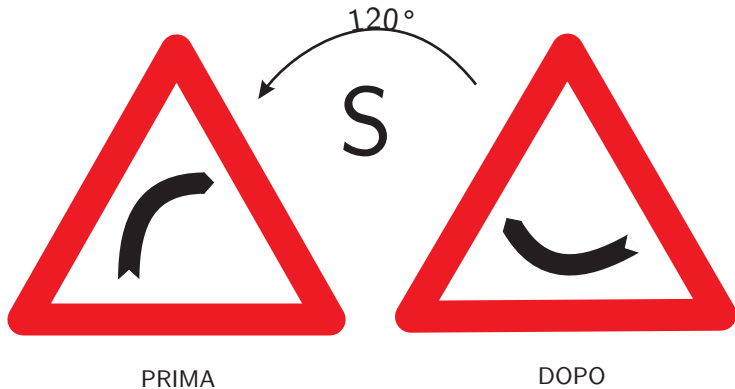
L'indomani il Comune risistema il cartello e la notte di nuovo il nostro buontempone lo ruota, stavolta così:

L'indomani il Comune risistema il cartello e la notte di nuovo il nostro buontempone lo ruota, stavolta così:



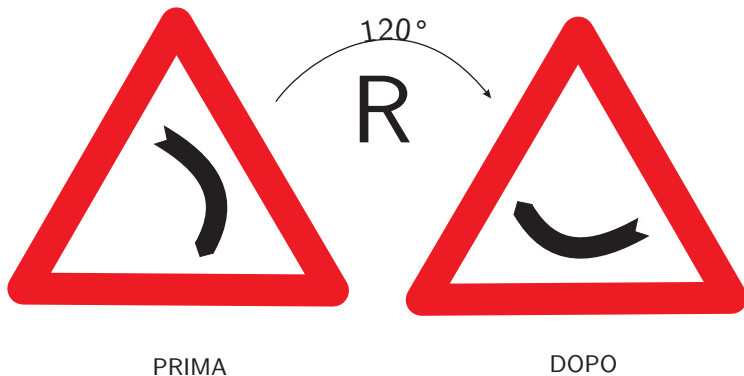
Stavolta la rotazione, come si può vedere, è antioraria di 120° , e la chiamiamo S :

Stavolta la rotazione, come si può vedere, è antioraria di 120° , e la chiamiamo S :



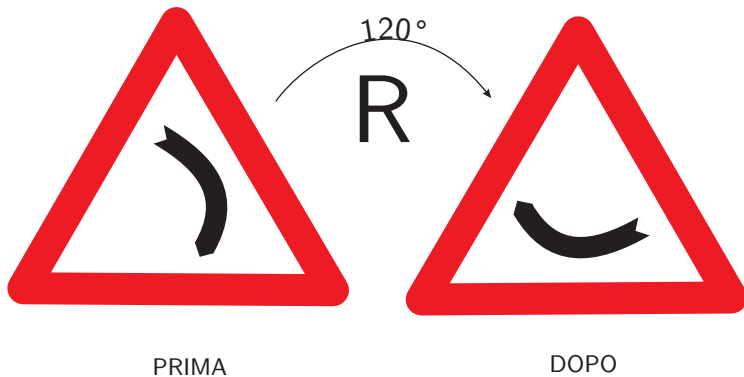
A questo punto, molti degli automobilisti, che non hanno visto che il Comune ha risistemato il cartello, pensano che la persona l'abbia semplicemente ruotato di nuovo in senso *orario* di 120° , cioè applicando *di nuovo* la rotazione R :

A questo punto, molti degli automobilisti, che non hanno visto che il Comune ha risistemato il cartello, pensano che la persona l'abbia semplicemente ruotato di nuovo in senso *orario* di 120° , cioè applicando *di nuovo* la rotazione R :



In effetti, il risultato finale è indistinguibile:

In effetti, il risultato finale è indistinguibile:



Un automobilista (magari anche matematico) potrebbe allora pensare che

Un automobilista (magari anche matematico) potrebbe allora pensare che “fare R e poi ancora R è come fare S ”, e scrivere

Un automobilista (magari anche matematico) potrebbe allora pensare che “fare R e poi ancora R è come fare S ”, e scrivere

$$R + R = S.$$

Un automobilista (magari anche matematico) potrebbe allora pensare che “fare R e poi ancora R è come fare S ”, e scrivere

$$R + R = S.$$

Abbiamo inventato una nuova “operazione”, la “somma consecutiva” di due rotazioni.

Un automobilista (magari anche matematico) potrebbe allora pensare che “fare R e poi ancora R è come fare S ”, e scrivere

$$R + R = S.$$

Abbiamo inventato una nuova “operazione”, la “somma consecutiva” di due rotazioni.

Ma allora cosa succede se facciamo un'altra rotazione R ,

Un automobilista (magari anche matematico) potrebbe allora pensare che “fare R e poi ancora R è come fare S ”, e scrivere

$$R + R = S.$$

Abbiamo inventato una nuova “operazione”, la “somma consecutiva” di due rotazioni.

Ma allora cosa succede se facciamo un'altra rotazione R , cioè $R + R + R$?

Un automobilista (magari anche matematico) potrebbe allora pensare che “fare R e poi ancora R è come fare S ”, e scrivere

$$R + R = S.$$

Abbiamo inventato una nuova “operazione”, la “somma consecutiva” di due rotazioni.

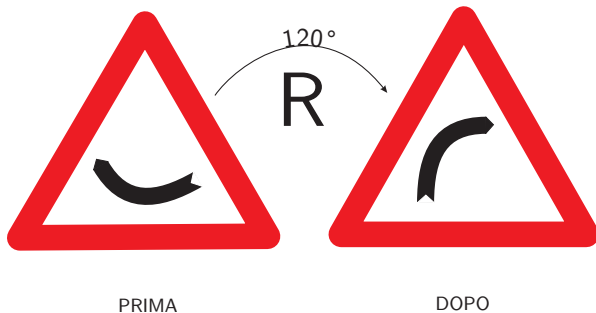
Ma allora cosa succede se facciamo un'altra rotazione R , cioè $R + R + R$? Be', facile: sembra che non sia successo nulla:

Un automobilista (magari anche matematico) potrebbe allora pensare che “fare R e poi ancora R è come fare S ”, e scrivere

$$R + R = S.$$

Abbiamo inventato una nuova “operazione”, la “somma consecutiva” di due rotazioni.

Ma allora cosa succede se facciamo un'altra rotazione R , cioè $R + R + R$? Be', facile: sembra che non sia successo nulla:



Ma che cos'è “non far nulla”?

Ma che cos'è “non far nulla”? È una azione anche quella?

Ma che cos'è “non far nulla”? È una azione anche quella? Possiamo chiamarla l' “azione nulla” e indicarla con 0 (zero):

Ma che cos'è "non far nulla"? È una azione anche quella? Possiamo chiamarla l' "azione nulla" e indicarla con 0 (zero):



PRIMA

DOPO

Abbiamo quindi a disposizione tre “oggetti”: R , S , e 0 .

Abbiamo quindi a disposizione tre “oggetti”: R , S , e 0 . Se ci pensiamo un attimo, “ruotare di zero gradi” è equivalente a 0 ,

Abbiamo quindi a disposizione tre “oggetti”: R , S , e 0 . Se ci pensiamo un attimo, “ruotare di zero gradi” è equivalente a 0 , e quindi anche se dopo S faremo 0 non cambierà nulla, così come dopo R :

Abbiamo quindi a disposizione tre “oggetti”: R , S , e 0 . Se ci pensiamo un attimo, “ruotare di zero gradi” è equivalente a 0 , e quindi anche se dopo S faremo 0 non cambierà nulla, così come dopo R :

$$S + 0 = S$$

Abbiamo quindi a disposizione tre “oggetti”: R , S , e 0 . Se ci pensiamo un attimo, “ruotare di zero gradi” è equivalente a 0 , e quindi anche se dopo S faremo 0 non cambierà nulla, così come dopo R :

$$S + 0 = S, \quad R + 0 = R.$$

Abbiamo quindi a disposizione tre “oggetti”: R , S , e 0 . Se ci pensiamo un attimo, “ruotare di zero gradi” è equivalente a 0 , e quindi anche se dopo S faremo 0 non cambierà nulla, così come dopo R :

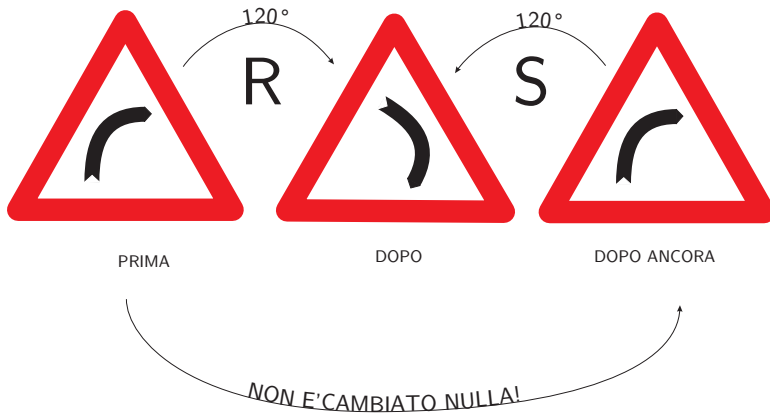
$$S + 0 = S, \quad R + 0 = R.$$

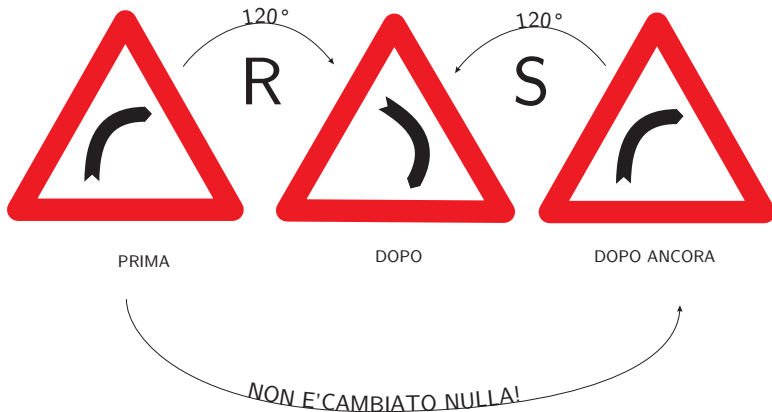
Cosa darà $R + S$?

Abbiamo quindi a disposizione tre “oggetti”: R , S , e 0 . Se ci pensiamo un attimo, “ruotare di zero gradi” è equivalente a 0 , e quindi anche se dopo S faremo 0 non cambierà nulla, così come dopo R :

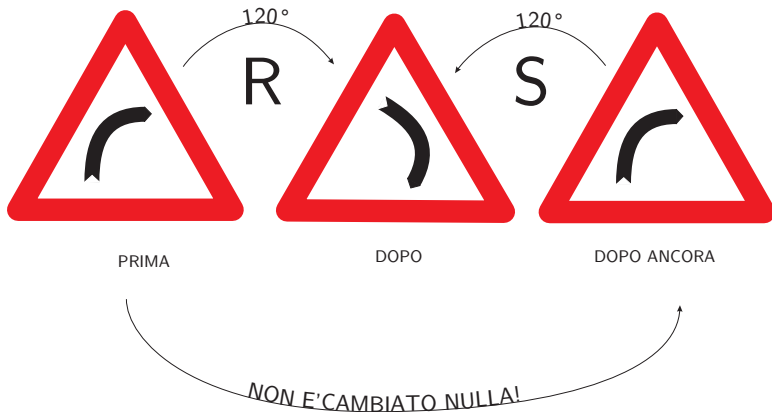
$$S + 0 = S, \quad R + 0 = R.$$

Cosa darà $R + S$? Vediamo:

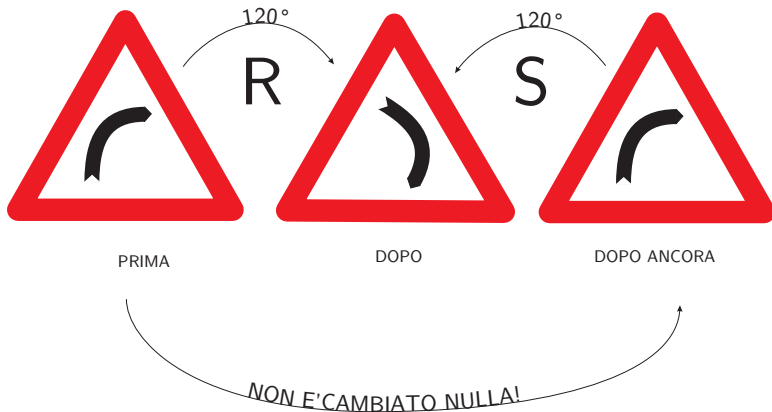




Non è cambiato nulla! (È come se il buontempone avesse ruotato, poi, pentito, avesse messo tutto a posto).



Non è cambiato nulla! (È come se il buontempone avesse ruotato, poi, pentito, avesse messo tutto a posto). Quindi, con la nostra “nuova” scrittura,



Non è cambiato nulla! (È come se il buontempone avesse ruotato, poi, pentito, avesse messo tutto a posto). Quindi, con la nostra “nuova” scrittura,

$$R + S = 0.$$

In effetti, quindi, secondo l'algebra "normale", avremmo che $S = -R$, e in effetti S è un po' la rotazione contraria di S .

In effetti, quindi, secondo l'algebra "normale", avremmo che $S = -R$, e in effetti S è un po' la rotazione contraria di S . Però, rispetto all'algebra ordinaria, qui succede che

In effetti, quindi, secondo l'algebra "normale", avremmo che $S = -R$, e in effetti S è un po' la rotazione contraria di S . Però, rispetto all'algebra ordinaria, qui succede che

$$R + R + R = 0$$

In effetti, quindi, secondo l'algebra "normale", avremmo che $S = -R$, e in effetti S è un po' la rotazione contraria di S . Però, rispetto all'algebra ordinaria, qui succede che

$$R + R + R = 0$$

(e anche, se provate, $S + S + S = 0$),

In effetti, quindi, secondo l'algebra "normale", avremmo che $S = -R$, e in effetti S è un po' la rotazione contraria di S . Però, rispetto all'algebra ordinaria, qui succede che

$$R + R + R = 0$$

(e anche, se provate, $S + S + S = 0$), senza che R sia zero!.

In effetti, quindi, secondo l'algebra "normale", avremmo che $S = -R$, e in effetti S è un po' la rotazione contraria di R . Però, rispetto all'algebra ordinaria, qui succede che

$$R + R + R = 0$$

(e anche, se provate, $S + S + S = 0$), senza che R sia zero!.
In questa nuova operazione di somma (sequenza di rotazioni) conta l'ordine?

In effetti, quindi, secondo l'algebra "normale", avremmo che $S = -R$, e in effetti S è un po' la rotazione contraria di R . Però, rispetto all'algebra ordinaria, qui succede che

$$R + R + R = 0$$

(e anche, se provate, $S + S + S = 0$), senza che R sia zero!.
In questa nuova operazione di somma (sequenza di rotazioni) conta l'ordine? Vediamo.

In effetti, quindi, secondo l'algebra "normale", avremmo che $S = -R$, e in effetti S è un po' la rotazione contraria di R . Però, rispetto all'algebra ordinaria, qui succede che

$$R + R + R = 0$$

(e anche, se provate, $S + S + S = 0$), senza che R sia zero!.

In questa nuova operazione di somma (sequenza di rotazioni) conta l'ordine? Vediamo.

$0 + R$ e $0 + S$ danno ovviamente R ed S rispettivamente, e quindi sono uguali a $R + 0$ e $S + 0$.

In effetti, quindi, secondo l'algebra "normale", avremmo che $S = -R$, e in effetti S è un po' la rotazione contraria di R . Però, rispetto all'algebra ordinaria, qui succede che

$$R + R + R = 0$$

(e anche, se provate, $S + S + S = 0$), senza che R sia zero!.

In questa nuova operazione di somma (sequenza di rotazioni) conta l'ordine? Vediamo.

$0 + R$ e $0 + S$ danno ovviamente R ed S rispettivamente, e quindi sono uguali a $R + 0$ e $S + 0$. C'è poco da fare: potrebbe solo essere $S + R$ ad essere diverso da $R + S$. Vediamo:





Niente da fare: anche $S + R = 0$, e quindi $R + S = S + R$.

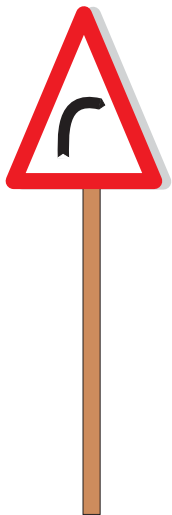


Niente da fare: anche $S + R = 0$, e quindi $R + S = S + R$. L'operazione del nostro burlone è commutativa.

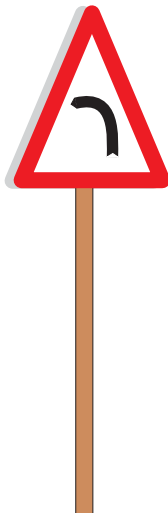
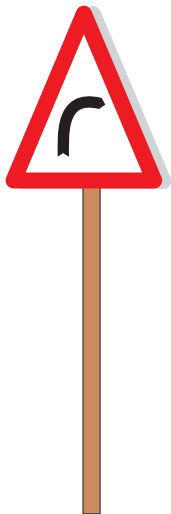
Immaginiamo allora che il nostro Comune abbia posizionato dei cartelli *doppi*, cioè davanti e dietro, per indicare la curva a tutti gli automobilisti:

Immaginiamo allora che il nostro Comune abbia posizionato dei cartelli *doppi*, cioè davanti e dietro, per indicare la curva a tutti gli automobilisti:

si legge anche da dietro



Immaginiamo allora che il nostro Comune abbia posizionato dei cartelli *doppi*, cioè davanti e dietro, per indicare la curva a tutti gli automobilisti:



e si vede questo



Adesso il nostro burlone notturno può farne una nuova:

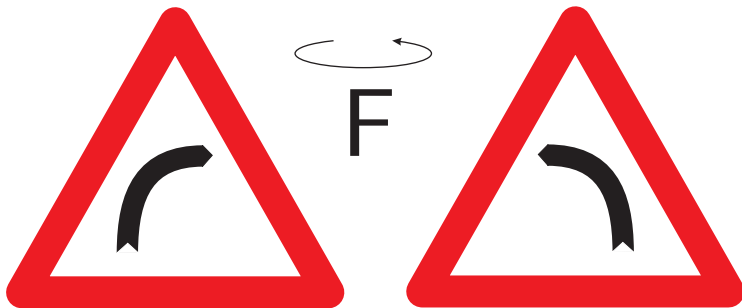
Adesso il nostro burlone notturno può farne una nuova: *girare il cartello attorno al palo*, così:

Adesso il nostro burlone notturno può farne una nuova: *girare il cartello attorno al palo*, così:



L'operazione è chiara, e la possiamo chiamare F (dall'inglese *flip*, che vuol dire 'scambio'):

L'operazione è chiara, e la possiamo chiamare F (dall'inglese *flip*, che vuol dire 'scambio'):

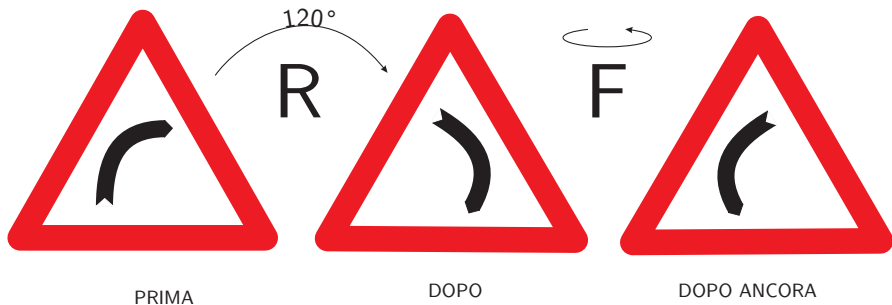


PRIMA

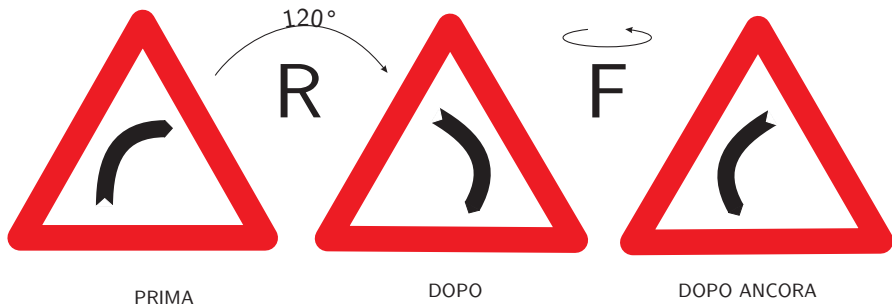
DOPO

Ci si apre un mondo! Adesso, per esempio, il nostro buontempone può fare $R + F$:

Ci si apre un mondo! Adesso, per esempio, il nostro buontempone può fare $R + F$:

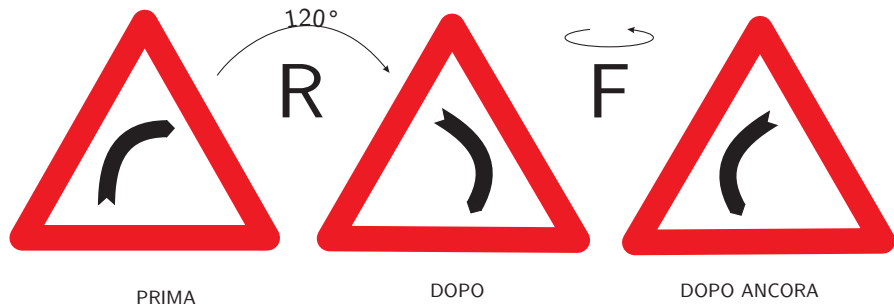


Ci si apre un mondo! Adesso, per esempio, il nostro buontempone può fare $R + F$:



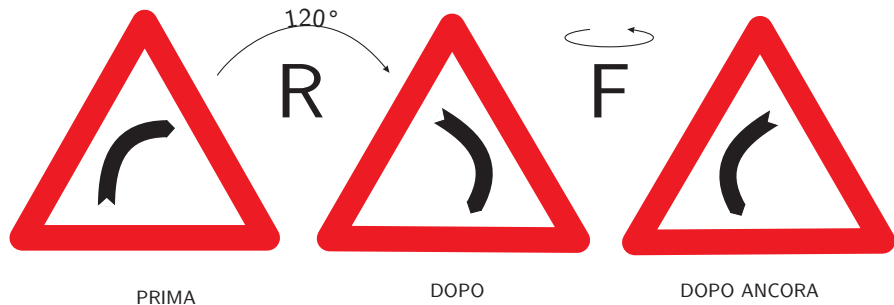
e trovare una posizione mai raggiunta finora.

Ci si apre un mondo! Adesso, per esempio, il nostro buontempone può fare $R + F$:



e trovare una posizione mai raggiunta finora. Ma c'è modo di ottenerla con *una sola mossa* a partire dal cartello normale?

Ci si apre un mondo! Adesso, per esempio, il nostro buontempone può fare $R + F$:



e trovare una posizione mai raggiunta finora. Ma c'è modo di ottenerla con *una sola mossa* a partire dal cartello normale? Sì:





Come vedete, si ottiene il risultato ruotando il cartello “normale” attorno all'asse inclinato di 60° come indicato in figura.

Ma allora ci deve essere un'ultima “mossa” che chiamiamo H , che ruota il cartello rispetto ad un asse inclinato di 60° in senso orario:

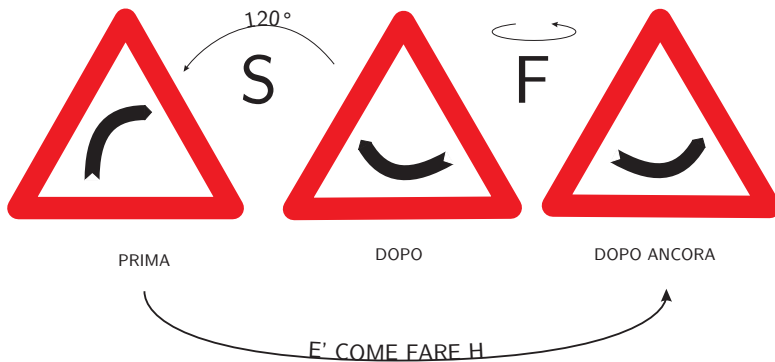
Ma allora ci deve essere un'ultima "mossa" che chiamiamo H , che ruota il cartello rispetto ad un asse inclinato di 60° in senso orario:

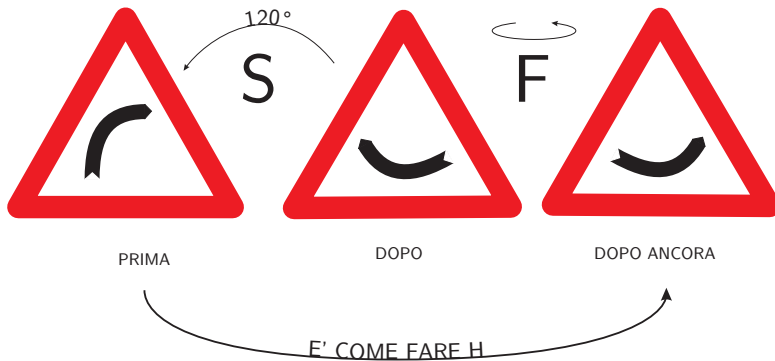


Ma allora ci deve essere un'ultima "mossa" che chiamiamo H , che ruota il cartello rispetto ad un asse inclinato di 60° in senso orario:

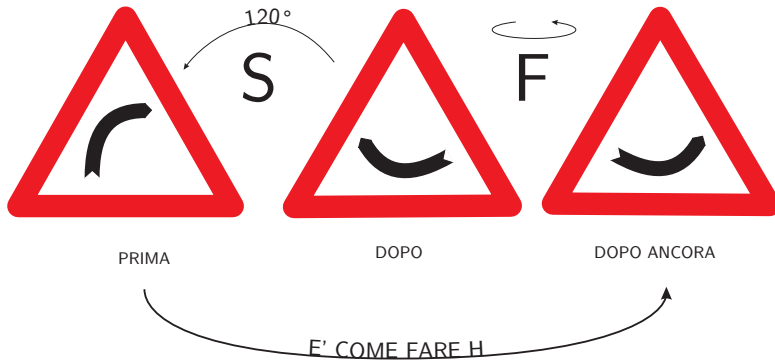


Questa operazione, se provate, è la stessa che fare prima S e poi F , cioè è $S + F$:





Adesso abbiamo a disposizione più elementi su cui operare.



Adesso abbiamo a disposizione più elementi su cui operare. Proviamo allora a fare $F + S$:





Stavolta viene un risultato diverso!



Stavolta viene un risultato diverso! $F + S$ è G e non è uguale a $S + F$ che era H !.



Stavolta viene un risultato diverso! $F + S$ è G e *non è uguale* a $S + F$ che era H !. Dunque, se includiamo anche i tre scambi rispetto ai tre assi di simmetria, otteniamo una operazione non commutativa.

Non c'è bisogno di un disegno per rendersi conto del fatto che

Non c'è bisogno di un disegno per rendersi conto del fatto che

$$F + F = 0, \quad G + G = 0, \quad H + H = 0$$

Non c'è bisogno di un disegno per rendersi conto del fatto che

$$F + F = 0, \quad G + G = 0, \quad H + H = 0$$

perché quando si ribalta il cartello due volte (rispetto allo stesso asse) si ritorna all'inizio.

Non c'è bisogno di un disegno per rendersi conto del fatto che

$$F + F = 0, \quad G + G = 0, \quad H + H = 0$$

perché quando si ribalta il cartello due volte (rispetto allo stesso asse) si ritorna all'inizio.

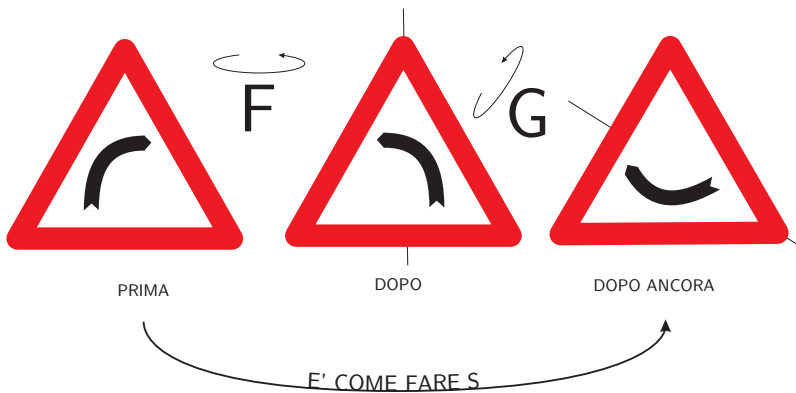
Meno facile è capire cosa faccia $F + G$, oppure $G + H$, oppure $F + H$.

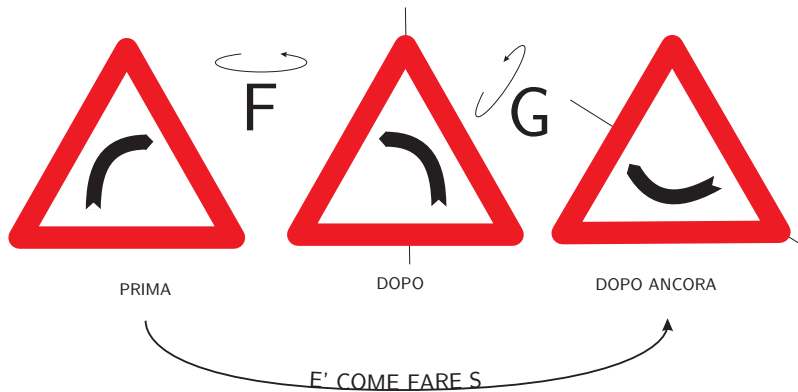
Non c'è bisogno di un disegno per rendersi conto del fatto che

$$F + F = 0, \quad G + G = 0, \quad H + H = 0$$

perché quando si ribalta il cartello due volte (rispetto allo stesso asse) si ritorna all'inizio.

Meno facile è capire cosa faccia $F + G$, oppure $G + H$, oppure $F + H$.
Facciamone uno:

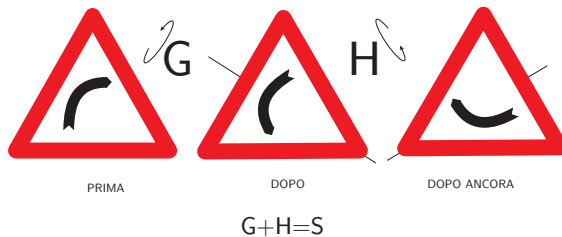




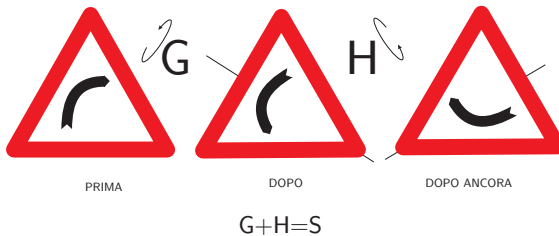
Quindi $F + G = S$. In maniera analoga, con la figura, si vede che $G + H = S$



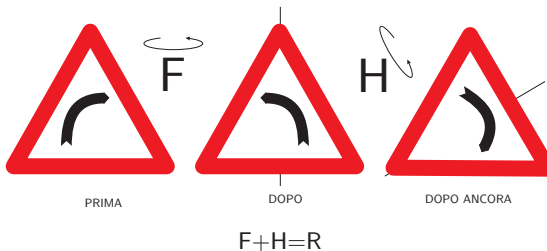
$$G+H=S$$



e anche che $F + H = R$:



e anche che $F + H = R$:



Cosa farà invece $R + H$?

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Sappiamo che $H = S + F$, l'abbiamo visto prima.

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Sappiamo che $H = S + F$, l'abbiamo visto prima.

Allora dovremmo avere

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Sappiamo che $H = S + F$, l'abbiamo visto prima.

Allora dovremmo avere

$$R + H =$$

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Sappiamo che $H = S + F$, l'abbiamo visto prima.

Allora dovremmo avere

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H =$$

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Sappiamo che $H = S + F$, l'abbiamo visto prima.

Allora dovremmo avere

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F).$$

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Sappiamo che $H = S + F$, l'abbiamo visto prima.

Allora dovremmo avere

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F).$$

Se adesso sapessimo che vale la proprietà *associativa* potremmo continuare:

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Sappiamo che $H = S + F$, l'abbiamo visto prima.

Allora dovremmo avere

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F).$$

Se adesso sapessimo che vale la proprietà *associativa* potremmo continuare:

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F) =$$

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Sappiamo che $H = S + F$, l'abbiamo visto prima.

Allora dovremmo avere

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F).$$

Se adesso sapessimo che vale la proprietà *associativa* potremmo continuare:

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F) = (R + S) + F.$$

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Sappiamo che $H = S + F$, l'abbiamo visto prima.

Allora dovremmo avere

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F).$$

Se adesso sapessimo che vale la proprietà *associativa* potremmo continuare:

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F) = (R + S) + F.$$

Ma $R + S = 0$ e $0 + F$ è ovviamente F ,

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Sappiamo che $H = S + F$, l'abbiamo visto prima.

Allora dovremmo avere

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F).$$

Se adesso sapessimo che vale la proprietà *associativa* potremmo continuare:

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F) = (R + S) + F.$$

Ma $R + S = 0$ e $0 + F$ è ovviamente F , per cui alla fine $R + H$ dovrebbe fare F :

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Sappiamo che $H = S + F$, l'abbiamo visto prima.

Allora dovremmo avere

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F).$$

Se adesso sapessimo che vale la proprietà *associativa* potremmo continuare:

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F) = (R + S) + F.$$

Ma $R + S = 0$ e $0 + F$ è ovviamente F , per cui alla fine $R + H$ dovrebbe fare F :

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F) = \underbrace{(R + S)}_0 + F = 0 + F = F.$$

Cosa farà invece $R + H$? Proviamo a ragionare, ma stavolta senza il disegno.

Sappiamo che $H = S + F$, l'abbiamo visto prima.

Allora dovremmo avere

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F).$$

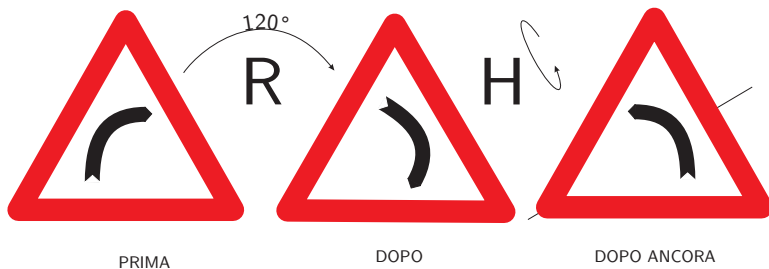
Se adesso sapessimo che vale la proprietà *associativa* potremmo continuare:

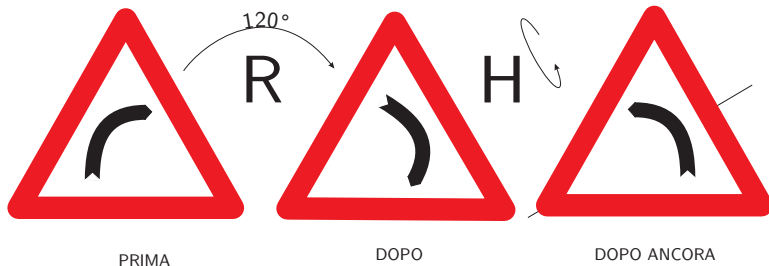
$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F) = (R + S) + F.$$

Ma $R + S = 0$ e $0 + F$ è ovviamente F , per cui alla fine $R + H$ dovrebbe fare F :

$$R + H = R + \underbrace{(S + F)}_H = R + (S + F) = \underbrace{(R + S)}_0 + F = 0 + F = F.$$

Vediamo:





$$R+H=F$$

Giusto! (In effetti la proprietà associativa è vera, ma lunghissima da verificare, ed è sempre vera per rotazioni, riflessioni o affini).

Ci poniamo ora un obiettivo ambizioso: calcolare *tutte* le possibili “somme” di questi elementi (rotazioni o scambi).

Ci poniamo ora un obiettivo ambizioso: calcolare *tutte* le possibili “somme” di questi elementi (rotazioni o scambi).

Ne sappiamo già un po', e altre le possiamo dedurre per via “algebrica”, ma sono parecchie: 36 in tutto!

Ci poniamo ora un obiettivo ambizioso: calcolare *tutte* le possibili “somme” di questi elementi (rotazioni o scambi).

Ne sappiamo già un po', e altre le possiamo dedurre per via “algebrica”, ma sono parecchie: 36 in tutto! Infatti abbiamo 6 elementi, e ciascuno si combina con tutti gli altri.

Ci poniamo ora un obiettivo ambizioso: calcolare *tutte* le possibili “somme” di questi elementi (rotazioni o scambi).

Ne sappiamo già un po', e altre le possiamo dedurre per via “algebrica”, ma sono parecchie: 36 in tutto! Infatti abbiamo 6 elementi, e ciascuno si combina con tutti gli altri.

Dobbiamo per questo creare una tabellina, così, proprio come quella del prodotto tra numeri:

Ci poniamo ora un obiettivo ambizioso: calcolare *tutte* le possibili “somme” di questi elementi (rotazioni o scambi).

Ne sappiamo già un po', e altre le possiamo dedurre per via “algebrica”, ma sono parecchie: 36 in tutto! Infatti abbiamo 6 elementi, e ciascuno si combina con tutti gli altri.

Dobbiamo per questo creare una tabellina, così, proprio come quella del prodotto tra numeri:

	R	S	O	F	G	H
R						
S						
O						
F						
G						
H						

La tabellina si usa però così: si legge *prima* il primo elemento della riga e poi quello della colonna, e nell'incrocio delle due c'è il risultato:

La tabellina si usa però così: si legge *prima* il primo elemento della riga e poi quello della colonna, e nell'incrocio delle due c'è il risultato:

				F		
S				H		

$$S + F = H$$

La tabellina si usa però così: si legge *prima* il primo elemento della riga e poi quello della colonna, e nell'incrocio delle due c'è il risultato:

				F		
S				H		

$$S + F = H$$

Questo è importante perché non vale la proprietà commutativa e quindi $S + F$ potrebbe essere (e di fatto è) diverso da $F + S$.

Noi conosciamo già come si comportano fra loro i primi tre, cioè R , S e 0 . Abbiamo visto che per loro la nostra “somma” è commutativa e che $R + S = 0$, $R + R = S$, $S + S = R$, mentre sommando 0 non cambia nulla. Dunque abbiamo già qualcosa:

Noi conosciamo già come si comportano fra loro i primi tre, cioè R , S e 0 . Abbiamo visto che per loro la nostra “somma” è commutativa e che $R + S = 0$, $R + R = S$, $S + S = R$, mentre sommando 0 non cambia nulla. Dunque abbiamo già qualcosa:

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R			
S	0	R	S			
0	R	S	0			
F						
G						
H						

Poi c'è lo zero: sappiamo che non far nulla non cambia l'azione fatta, per cui $0 + F = F$, $0 + G = G$, e anche $H + 0 = H$, ecc. quindi andiamo avanti:

Poi c'è lo zero: sappiamo che non far nulla non cambia l'azione fatta, per cui $0 + F = F$, $0 + G = G$, e anche $H + 0 = H$, ecc. quindi andiamo avanti:

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R			
S	0	R	S			
0	R	S	0	F	G	H
F			F			
G			G			
H			H			

Poi sappiamo che $F + F = 0$, $G + G = 0$, $H + H = 0$ e abbiamo visto prima che

Poi sappiamo che $F + F = 0$, $G + G = 0$, $H + H = 0$ e abbiamo visto prima che

$$R + F = G, \quad S + F = H, \quad F + S = G, \quad F + G = S, \quad G + H = S, \quad F + H = R$$

Poi sappiamo che $F + F = 0$, $G + G = 0$, $H + H = 0$ e abbiamo visto prima che

$$R + F = G, \quad S + F = H, \quad F + S = G, \quad F + G = S, \quad G + H = S, \quad F + H = R$$

e possiamo continuare:

Poi sappiamo che $F + F = 0$, $G + G = 0$, $H + H = 0$ e abbiamo visto prima che

$$R + F = G, S + F = H, F + S = G, F + G = S, G + H = S, F + H = R$$

e possiamo continuare:

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	
H			H			0

Come vedete, ne mancano ancora un po'. I restanti, però, si possono ricavare tutti da quello che sappiamo e dalla proprietà associativa (*non* da quella commutativa).

Come vedete, ne mancano ancora un po'. I restanti, però, si possono ricavare tutti da quello che sappiamo e dalla proprietà associativa (*non* da quella commutativa).

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	
H			H			0

Come vedete, ne mancano ancora un po'. I restanti, però, si possono ricavare tutti da quello che sappiamo e dalla proprietà associativa (*non* da quella commutativa).

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	
H			H			0

Proviamo a fare ad esempio $G + H$.

	R	S	O	F	G	H
R	S	O	R	G		
S	O	R	S	H		
O	R	S	O	F	G	H
F		G	F	O	S	R
G			G		O	
H			H			O

G è uguale a $R + F$, per cui

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	
H			H			0

G è uguale a $R + F$, per cui

$$G + H =$$

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	
H			H			0

G è uguale a $R + F$, per cui

$$G + H = \underbrace{(R + F)}_G + H =$$

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	
H			H			0

G è uguale a $R + F$, per cui

$$G + H = \underbrace{(R + F)}_G + H = R + (F + H)$$

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	
H			H			0

G è uguale a $R + F$, per cui

$$G + H = \underbrace{(R + F)}_G + H = R + (F + H)$$

dove abbiamo usato la proprietà associativa.

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	
H			H			0

G è uguale a $R + F$, per cui

$$G + H = \underbrace{(R + F)}_G + H = R + (F + H)$$

dove abbiamo usato la proprietà associativa. Adesso sappiamo che $F + H = R$, per cui

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	
H			H			0

G è uguale a $R + F$, per cui

$$G + H = \underbrace{(R + F)}_G + H = R + (F + H)$$

dove abbiamo usato la proprietà associativa. Adesso sappiamo che $F + H = R$, per cui

$$G + H = R + R = S.$$

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	S
H			H			0

Facciamo ancora $F + R$ e lasciamo a voi gli altri, che si fanno allo stesso modo.

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	S
H			H			0

Facciamo ancora $F + R$ e lasciamo a voi gli altri, che si fanno allo stesso modo. Dalla tabellina vediamo che $R = F + H$ e quindi

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	S
H			H			0

Facciamo ancora $F + R$ e lasciamo a voi gli altri, che si fanno allo stesso modo. Dalla tabellina vediamo che $R = F + H$ e quindi

$$F + R = F + \underbrace{F + H}_R =$$

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	S
H			H			0

Facciamo ancora $F + R$ e lasciamo a voi gli altri, che si fanno allo stesso modo. Dalla tabellina vediamo che $R = F + H$ e quindi

$$F + R = F + \underbrace{F + H}_R = F + (F + H) =$$

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	S
H			H			0

Facciamo ancora $F + R$ e lasciamo a voi gli altri, che si fanno allo stesso modo. Dalla tabellina vediamo che $R = F + H$ e quindi

$$F + R = F + \underbrace{F + H}_R = F + (F + H) = (F + F) + H.$$

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	S
H			H			0

Facciamo ancora $F + R$ e lasciamo a voi gli altri, che si fanno allo stesso modo. Dalla tabellina vediamo che $R = F + H$ e quindi

$$F + R = F + \underbrace{F + H}_R = F + (F + H) = (F + F) + H.$$

Siccome $F + F = 0$, possiamo proseguire:

	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G		
S	0	R	S	H		
0	R	S	0	F	G	H
F		G	F	0	S	R
G			G		0	S
H			H			0

Facciamo ancora $F + R$ e lasciamo a voi gli altri, che si fanno allo stesso modo. Dalla tabellina vediamo che $R = F + H$ e quindi

$$F + R = F + \underbrace{F + H}_R = F + (F + H) = (F + F) + H.$$

Siccome $F + F = 0$, possiamo proseguire:

$$F + R = (F + F) + H = 0 + H = H.$$

	R	S	O	F	G	H
R	S	O	R	G		
S	O	R	S	H		
O	R	S	O	F	G	H
F	H	G	F	O	S	R
G			G		O	S
H			H			O

Con un po' di pazienza, è possibile completare tutte le operazioni a due a due e riassumerle nella tabellina finale:

Con un po' di pazienza, è possibile completare tutte le operazioni a due a due e riassumerle nella tabellina finale:

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	R	S	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

Con un po' di pazienza, è possibile completare tutte le operazioni a due a due e riassumerle nella tabellina finale:

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	R	S	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

Vediamo adesso cosa possiamo dedurre dalla tabellina.

+	R	S	O	F	G	H
R	S	O	R	G	H	F
S	O	R	S	H	F	G
O	R	S	O	F	G	H
F	H	G	F	O	S	R
G	F	H	G	R	O	S
H	G	F	H	S	R	O

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	R	S	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

- C'è un elemento (lo zero) che ha la riga e la colonna identiche a quelle rosse;

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	R	S	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

- C'è un elemento (lo zero) che ha la riga e la colonna identiche a quelle rosse; questo vuol dire che

$$0 + X = X + 0 \quad \text{qualunque sia } X.$$

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	R	S	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

- C'è un elemento (lo zero) che ha la riga e la colonna identiche a quelle rosse; questo vuol dire che

$$0 + X = X + 0 \quad \text{qualunque sia } X.$$

- In ogni riga e in ogni colonna c'è lo zero, e ce n'è uno solo;

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	R	S	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

- C'è un elemento (lo zero) che ha la riga e la colonna identiche a quelle rosse; questo vuol dire che

$$0 + X = X + 0 \quad \text{qualunque sia } X.$$

- In ogni riga e in ogni colonna c'è lo zero, e ce n'è uno solo; questo significa che per ogni elemento X ce n'è uno solo che sommato a lui dà zero:

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	R	S	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

- C'è un elemento (lo zero) che ha la riga e la colonna identiche a quelle rosse; questo vuol dire che

$$0 + X = X + 0 \quad \text{qualunque sia } X.$$

- In ogni riga e in ogni colonna c'è lo zero, e ce n'è uno solo; questo significa che per ogni elemento X ce n'è uno solo che sommato a lui dà zero: è l'*opposto* di X .

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	R	S	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

- C'è un elemento (lo zero) che ha la riga e la colonna identiche a quelle rosse; questo vuol dire che

$$0 + X = X + 0 \quad \text{qualunque sia } X.$$

- In ogni riga e in ogni colonna c'è lo zero, e ce n'è uno solo; questo significa che per ogni elemento X ce n'è uno solo che sommato a lui dà zero: è l'*opposto* di X .

Per esempio, come avevamo già visto, l'opposto di R è S , mentre l'opposto di F è sempre F .

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	R	S	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

- C'è un elemento (lo zero) che ha la riga e la colonna identiche a quelle rosse; questo vuol dire che

$$0 + X = X + 0 \quad \text{qualunque sia } X.$$

- In ogni riga e in ogni colonna c'è lo zero, e ce n'è uno solo; questo significa che per ogni elemento X ce n'è uno solo che sommato a lui dà zero: è l'*opposto* di X .

Per esempio, come avevamo già visto, l'opposto di R è S , mentre l'opposto di F è sempre F . Per trovare l'opposto di un elemento basta cercare nella riga o nella colonna l'elemento che corrisponde allo zero.

Abbiamo ottenuto una *struttura algebrica* interessante, quella di *gruppo*.

Abbiamo ottenuto una *struttura algebrica* interessante, quella di *gruppo*.

Definizione

Abbiamo ottenuto una *struttura algebrica* interessante, quella di *gruppo*.

Definizione

Un *gruppo* è costituito da:

Abbiamo ottenuto una *struttura algebrica* interessante, quella di *gruppo*.

Definizione

Un *gruppo* è costituito da:

- degli *elementi* sui quali si opera;

Abbiamo ottenuto una *struttura algebrica* interessante, quella di *gruppo*.

Definizione

Un *gruppo* è costituito da:

- degli *elementi* sui quali si opera;
- una *operazione binaria* sugli elementi con le seguenti proprietà:

Abbiamo ottenuto una *struttura algebrica* interessante, quella di *gruppo*.

Definizione

Un *gruppo* è costituito da:

- degli *elementi* sui quali si opera;
- una *operazione binaria* sugli elementi con le seguenti proprietà:
 - ① deve essere *interna*: l'operazione su due elementi del gruppo deve produrre un elemento del gruppo;

Abbiamo ottenuto una *struttura algebrica* interessante, quella di *gruppo*.

Definizione

Un *gruppo* è costituito da:

- degli *elementi* sui quali si opera;
- una *operazione binaria* sugli elementi con le seguenti proprietà:
 - ① deve essere *interna*: l'operazione su due elementi del gruppo deve produrre un elemento del gruppo;
 - ② deve avere la proprietà *associativa*;

Abbiamo ottenuto una *struttura algebrica* interessante, quella di *gruppo*.

Definizione

Un *gruppo* è costituito da:

- degli *elementi* sui quali si opera;
- una *operazione binaria* sugli elementi con le seguenti proprietà:
 - 1 deve essere *interna*: l'operazione su due elementi del gruppo deve produrre un elemento del gruppo;
 - 2 deve avere la proprietà *associativa*;
 - 3 deve esistere un elemento, detto *elemento neutro*, che si comporta come lo zero dell'addizione, ossia non cambia il primo o il secondo operando;

Abbiamo ottenuto una *struttura algebrica* interessante, quella di *gruppo*.

Definizione

Un *gruppo* è costituito da:

- degli *elementi* sui quali si opera;
- una *operazione binaria* sugli elementi con le seguenti proprietà:
 - 1 deve essere *interna*: l'operazione su due elementi del gruppo deve produrre un elemento del gruppo;
 - 2 deve avere la proprietà *associativa*;
 - 3 deve esistere un elemento, detto *elemento neutro*, che si comporta come lo zero dell'addizione, ossia non cambia il primo o il secondo operando;
 - 4 ogni elemento deve avere un *opposto* (o *inverso*), cioè un elemento che "operato" col primo dia l'elemento neutro.

Come vedete, non è richiesta la proprietà *commutativa*.

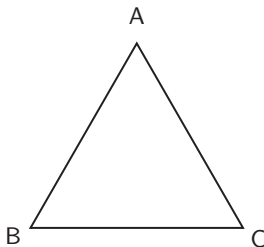
Come vedete, non è richiesta la proprietà *commutativa*. Se essa è verificata, il gruppo si dice *commutativo*.

Come vedete, non è richiesta la proprietà *commutativa*. Se essa è verificata, il gruppo si dice *commutativo*.

Il gruppo che abbiamo scoperto si chiama *gruppo simmetrico* ed è legato anche alle lettere dell'alfabeto. Per esempio, se indichiamo i vertici di un triangolo equilatero con le lettere A, B, C , così:

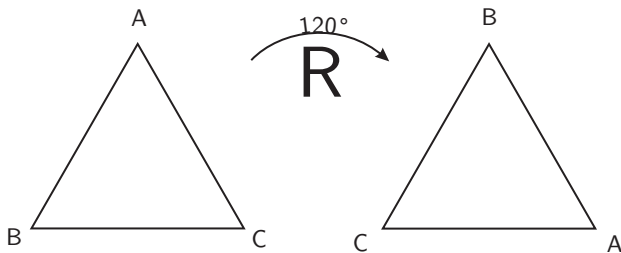
Come vedete, non è richiesta la proprietà *commutativa*. Se essa è verificata, il gruppo si dice *commutativo*.

Il gruppo che abbiamo scoperto si chiama *gruppo simmetrico* ed è legato anche alle lettere dell'alfabeto. Per esempio, se indichiamo i vertici di un triangolo equilatero con le lettere A, B, C , così:

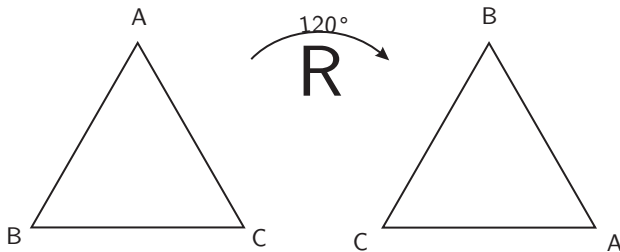


allora la rotazione R corrisponde a cambiare le lettere in questo senso:

allora la rotazione R corrisponde a cambiare le lettere in questo senso:



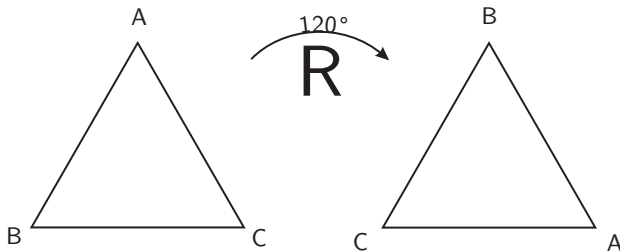
allora la rotazione R corrisponde a cambiare le lettere in questo senso:



La lettera B prende il posto della A , la C della B e la A della C , e si scrive così:

$$\begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}$$

allora la rotazione R corrisponde a cambiare le lettere in questo senso:



La lettera B prende il posto della A , la C della B e la A della C , e si scrive così:

$$\begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}$$

o più semplicemente (BCA) perché tanto la riga superiore è sempre ABC .

Per esempio, quindi, la F , che corrisponde a scambiare le lettere dalla base, sarebbe (ACB) con questa notazione.

Per esempio, quindi, la F , che corrisponde a scambiare le lettere dalla base, sarebbe (ACB) con questa notazione.

Quindi $R + F$ si scriverebbe

Per esempio, quindi, la F , che corrisponde a scambiare le lettere dalla base, sarebbe (ACB) con questa notazione.

Quindi $R + F$ si scriverebbe $(BCA) + (ACB)$

Per esempio, quindi, la F , che corrisponde a scambiare le lettere dalla base, sarebbe (ACB) con questa notazione.

Quindi $R + F$ si scriverebbe $(BCA) + (ACB)$ e significa però che A diventa B nella prima operazione,

Per esempio, quindi, la F , che corrisponde a scambiare le lettere dalla base, sarebbe (ACB) con questa notazione.

Quindi $R + F$ si scriverebbe $(BCA) + (ACB)$ e significa però che A diventa B nella prima operazione, poi resta fisso perché la seconda si intende partita di nuovo da (ABC)

Per esempio, quindi, la F , che corrisponde a scambiare le lettere dalla base, sarebbe (ACB) con questa notazione.

Quindi $R + F$ si scriverebbe $(BCA) + (ACB)$ e significa però che A diventa B nella prima operazione, poi resta fisso perché la seconda si intende partita di nuovo da (ABC) e quindi B resta B ,

Per esempio, quindi, la F , che corrisponde a scambiare le lettere dalla base, sarebbe (ACB) con questa notazione.

Quindi $R + F$ si scriverebbe $(BCA) + (ACB)$ e significa però che A diventa B nella prima operazione, poi resta fisso perché la seconda si intende partita di nuovo da (ABC) e quindi B resta B , mentre B diventa C e poi torna B perché la seconda scambia le due ultime lettere.

Per esempio, quindi, la F , che corrisponde a scambiare le lettere dalla base, sarebbe (ACB) con questa notazione.

Quindi $R + F$ si scriverebbe $(BCA) + (ACB)$ e significa però che A diventa B nella prima operazione, poi resta fisso perché la seconda si intende partita di nuovo da (ABC) e quindi B resta B , mentre B diventa C e poi torna B perché la seconda scambia le due ultime lettere.

Infine C va in A e poi torna in C , quindi il triangolo finale è BAC ,

Per esempio, quindi, la F , che corrisponde a scambiare le lettere dalla base, sarebbe (ACB) con questa notazione.

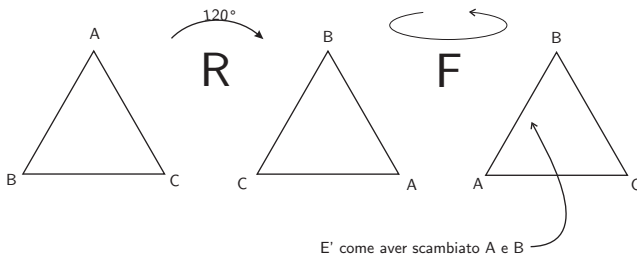
Quindi $R + F$ si scriverebbe $(BCA) + (ACB)$ e significa però che A diventa B nella prima operazione, poi resta fisso perché la seconda si intende partita di nuovo da (ABC) e quindi B resta B , mentre B diventa C e poi torna B perché la seconda scambia le due ultime lettere.

Infine C va in A e poi torna in C , quindi il triangolo finale è BAC , ossia (BAC) che corrisponde all'aver scambiato A e B , che è l'operazione G .

Per esempio, quindi, la F , che corrisponde a scambiare le lettere dalla base, sarebbe (ACB) con questa notazione.

Quindi $R + F$ si scriverebbe $(BCA) + (ACB)$ e significa però che A diventa B nella prima operazione, poi resta fisso perché la seconda si intende partita di nuovo da (ABC) e quindi B resta B , mentre B diventa C e poi torna B perché la seconda scambia le due ultime lettere.

Infine C va in A e poi torna in C , quindi il triangolo finale è BAC , ossia (BAC) che corrisponde all'aver scambiato A e B , che è l'operazione G .



I gruppi sono conosciuti in Matematica da più di 200 anni ormai e si incontrano in numerosissime occasioni.

I gruppi sono conosciuti in Matematica da più di 200 anni ormai e si incontrano in numerosissime occasioni.

Il gruppo che abbiamo qui incontrato si chiama *gruppo simmetrico* su 3 elementi (dal fatto che si hanno 3 vertici del triangolo) e si indica con S_3 .

I gruppi sono conosciuti in Matematica da più di 200 anni ormai e si incontrano in numerosissime occasioni.

Il gruppo che abbiamo qui incontrato si chiama *gruppo simmetrico* su 3 elementi (dal fatto che si hanno 3 vertici del triangolo) e si indica con S_3 .

Il nome “simmetrico” deriva invece dal fatto che è un gruppo di simmetrie: infatti un triangolo equilatero resta sempre un triangolo equilatero se si applica una qualunque delle trasformazioni

R, S, O, F, G, H .

I gruppi sono conosciuti in Matematica da più di 200 anni ormai e si incontrano in numerosissime occasioni.

Il gruppo che abbiamo qui incontrato si chiama *gruppo simmetrico* su 3 elementi (dal fatto che si hanno 3 vertici del triangolo) e si indica con S_3 .

Il nome “simmetrico” deriva invece dal fatto che è un gruppo di simmetrie: infatti un triangolo equilatero resta sempre un triangolo equilatero se si applica una qualunque delle trasformazioni

R, S, O, F, G, H .

Non è un gruppo tanto semplice: ve ne sono di più piccoli, però è il più piccolo che non è commutativo.

I gruppi sono conosciuti in Matematica da più di 200 anni ormai e si incontrano in numerosissime occasioni.

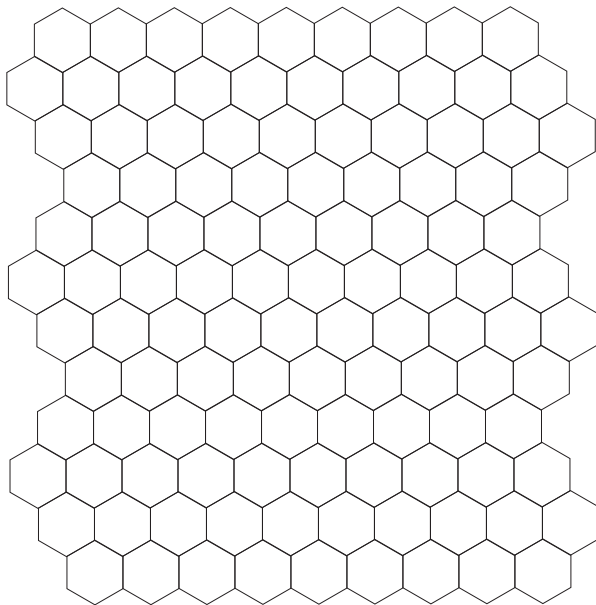
Il gruppo che abbiamo qui incontrato si chiama *gruppo simmetrico* su 3 elementi (dal fatto che si hanno 3 vertici del triangolo) e si indica con S_3 .

Il nome “simmetrico” deriva invece dal fatto che è un gruppo di simmetrie: infatti un triangolo equilatero resta sempre un triangolo equilatero se si applica una qualunque delle trasformazioni

$R, S, 0, F, G, H$.

Non è un gruppo tanto semplice: ve ne sono di più piccoli, però è il più piccolo che non è commutativo.

Esso è tuttavia molto importante perché esiste una applicazione molto comune di questo gruppo. Guardate:

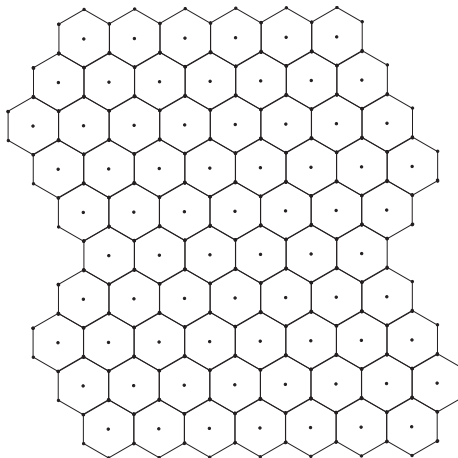


Non è solo un un alveare, è anche la struttura del *ghiaccio*.

Non è solo un un alveare, è anche la struttura del *ghiaccio*. Dovete immaginare che nei vertici e nei centri degli esagoni ci siano delle molecole di acqua.

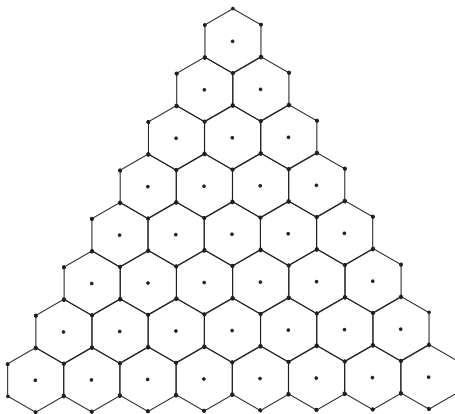
Non è solo un un alveare, è anche la struttura del *ghiaccio*. Dovete immaginare che nei vertici e nei centri degli esagoni ci siano delle molecole di acqua. Si chiama *reticolo cristallino*.

Non è solo un un alveare, è anche la struttura del *ghiaccio*. Dovete immaginare che nei vertici e nei centri degli esagoni ci siano delle molecole di acqua. Si chiama *reticolo cristallino*.



Immaginiamo ora che il nostro reticolo si estenda senza limite per tutto il piano, oppure che abbia una forma “triangolare”:

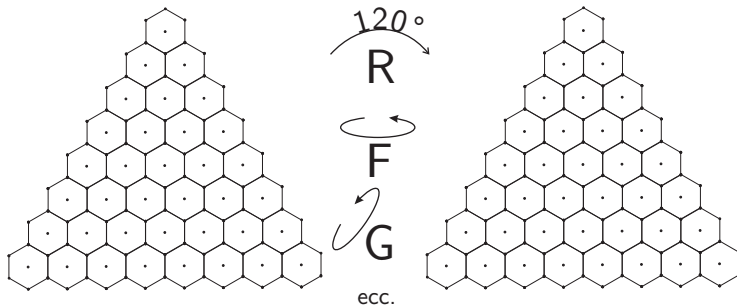
Immaginiamo ora che il nostro reticolo si estenda senza limite per tutto il piano, oppure che abbia una forma “triangolare”:



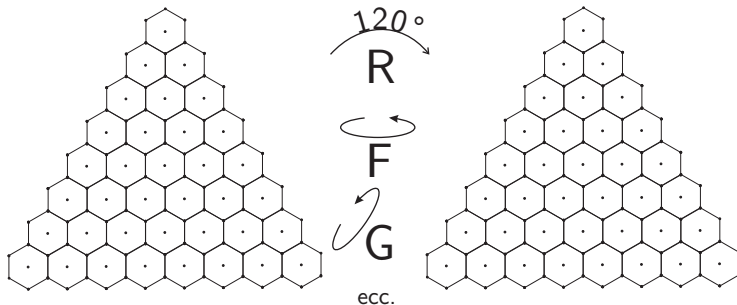
La cosa interessante è che se prendiamo questo reticolo e lo ruotiamo secondo *uno qualunque* degli elementi del gruppo S_3 , cioè $R, S, 0, F, G, H$,

La cosa interessante è che se prendiamo questo reticolo e lo ruotiamo secondo *uno qualunque* degli elementi del gruppo S_3 , cioè $R, S, 0, F, G, H$, esso non cambia: rimane identico.

La cosa interessante è che se prendiamo questo reticolo e lo ruotiamo secondo *uno qualunque* degli elementi del gruppo S_3 , cioè $R, S, 0, F, G, H$, esso non cambia: rimane identico.



La cosa interessante è che se prendiamo questo reticolo e lo ruotiamo secondo *uno qualunque* degli elementi del gruppo S_3 , cioè $R, S, 0, F, G, H$, esso non cambia: rimane identico.



Questo fatto è fondamentale per descrivere le proprietà del ghiaccio: ogni tentativo di capire come il ghiaccio si comporta quando è compresso, dilatato o soggetto a qualche sforzo deve “fare i conti” con il gruppo S_3 (e anche con altri gruppi più complicati).

Il gruppo S_2

Ma c'è qualche gruppo più semplice di S_3 ? Magari un S_2 ?

Il gruppo S_2

Ma c'è qualche gruppo più semplice di S_3 ? Magari un S_2 ? Certo: lo vediamo subito, perché è *molto* più semplice.

Il gruppo S_2

Ma c'è qualche gruppo più semplice di S_3 ? Magari un S_2 ? Certo: lo vediamo subito, perché è *molto* più semplice.

Se S_3 era legato a come un triangolo equilatero si trasforma in sé, nel caso di S_2 si tratta di un segmento.

Il gruppo S_2

Ma c'è qualche gruppo più semplice di S_3 ? Magari un S_2 ? Certo: lo vediamo subito, perché è *molto* più semplice.

Se S_3 era legato a come un triangolo equilatero si trasforma in sé, nel caso di S_2 si tratta di un segmento. E in questo caso ci sono solo due simmetrie possibili:

Il gruppo S_2

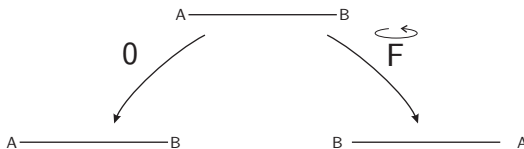
Ma c'è qualche gruppo più semplice di S_3 ? Magari un S_2 ? Certo: lo vediamo subito, perché è *molto* più semplice.

Se S_3 era legato a come un triangolo equilatero si trasforma in sé, nel caso di S_2 si tratta di un segmento. E in questo caso ci sono solo due simmetrie possibili: quella “nulla” (che indicavamo con 0) e quella di scambio, che indicavamo con F :

Il gruppo S_2

Ma c'è qualche gruppo più semplice di S_3 ? Magari un S_2 ? Certo: lo vediamo subito, perché è *molto* più semplice.

Se S_3 era legato a come un triangolo equilatero si trasforma in sé, nel caso di S_2 si tratta di un segmento. E in questo caso ci sono solo due simmetrie possibili: quella “nulla” (che indicavamo con 0) e quella di scambio, che indicavamo con F :



Qui la tabellina è molto più semplice che per S_3 , perché gli elementi sono solo due:

Qui la tabellina è molto più semplice che per S_3 , perché gli elementi sono solo due:

$$0 + F = F, \quad F + 0 = F, \quad 0 + 0 = 0$$

Qui la tabellina è molto più semplice che per S_3 , perché gli elementi sono solo due:

$$0 + F = F, \quad F + 0 = F, \quad 0 + 0 = 0$$

e poi, analogamente a quanto succedeva per S_3 , $F + F = 0$.

Qui la tabellina è molto più semplice che per S_3 , perché gli elementi sono solo due:

$$0 + F = F, \quad F + 0 = F, \quad 0 + 0 = 0$$

e poi, analogamente a quanto succedeva per S_3 , $F + F = 0$. Ecco la tabella:

Qui la tabellina è molto più semplice che per S_3 , perché gli elementi sono solo due:

$$0 + F = F, \quad F + 0 = F, \quad 0 + 0 = 0$$

e poi, analogamente a quanto succedeva per S_3 , $F + F = 0$. Ecco la tabella:

+	0	F
0	0	F
F	F	0

Vediamo ora una cosa interessante. Chiamiamo P un numero pari e D un numero dispari, e formiamo la tabella della somma dei due numeri nei vari casi.

Vediamo ora una cosa interessante. Chiamiamo P un numero pari e D un numero dispari, e formiamo la tabella della somma dei due numeri nei vari casi. Per esempio, siccome pari più pari dà pari, avremo $P + P = P$,

Vediamo ora una cosa interessante. Chiamiamo P un numero pari e D un numero dispari, e formiamo la tabella della somma dei due numeri nei vari casi. Per esempio, siccome pari più pari dà pari, avremo $P + P = P$, mentre pari più dispari (o dispari più pari) dà dispari,

Vediamo ora una cosa interessante. Chiamiamo P un numero pari e D un numero dispari, e formiamo la tabella della somma dei due numeri nei vari casi. Per esempio, siccome pari più pari dà pari, avremo $P + P = P$, mentre pari più dispari (o dispari più pari) dà dispari, cioè $D + P = D$ e $P + D = D$,

Vediamo ora una cosa interessante. Chiamiamo P un numero pari e D un numero dispari, e formiamo la tabella della somma dei due numeri nei vari casi. Per esempio, siccome pari più pari dà pari, avremo $P + P = P$, mentre pari più dispari (o dispari più pari) dà dispari, cioè $D + P = D$ e $P + D = D$, e infine dispari più dispari dà pari: $D + D = P$.

Vediamo ora una cosa interessante. Chiamiamo P un numero pari e D un numero dispari, e formiamo la tabella della somma dei due numeri nei vari casi. Per esempio, siccome pari più pari dà pari, avremo $P + P = P$, mentre pari più dispari (o dispari più pari) dà dispari, cioè $D + P = D$ e $P + D = D$, e infine dispari più dispari dà pari: $D + D = P$.

Ecco la tabella:

Vediamo ora una cosa interessante. Chiamiamo P un numero pari e D un numero dispari, e formiamo la tabella della somma dei due numeri nei vari casi. Per esempio, siccome pari più pari dà pari, avremo $P + P = P$, mentre pari più dispari (o dispari più pari) dà dispari, cioè $D + P = D$ e $P + D = D$, e infine dispari più dispari dà pari: $D + D = P$.

Ecco la tabella:

+	P	D
P	P	D
D	D	P

Vediamo ora una cosa interessante. Chiamiamo P un numero pari e D un numero dispari, e formiamo la tabella della somma dei due numeri nei vari casi. Per esempio, siccome pari più pari dà pari, avremo $P + P = P$, mentre pari più dispari (o dispari più pari) dà dispari, cioè $D + P = D$ e $P + D = D$, e infine dispari più dispari dà pari: $D + D = P$.

Ecco la tabella:

+	P	D
P	P	D
D	D	P

Osserviamo adesso le due tabelle assieme:

Vediamo ora una cosa interessante. Chiamiamo P un numero pari e D un numero dispari, e formiamo la tabella della somma dei due numeri nei vari casi. Per esempio, siccome pari più pari dà pari, avremo $P + P = P$, mentre pari più dispari (o dispari più pari) dà dispari, cioè $D + P = D$ e $P + D = D$, e infine dispari più dispari dà pari: $D + D = P$.

Ecco la tabella:

+	P	D
P	P	D
D	D	P

Osserviamo adesso le due tabelle assieme:

+	P	D
P	P	D
D	D	P

+	0	F
0	0	F
F	F	0

Vediamo ora una cosa interessante. Chiamiamo P un numero pari e D un numero dispari, e formiamo la tabella della somma dei due numeri nei vari casi. Per esempio, siccome pari più pari dà pari, avremo $P + P = P$, mentre pari più dispari (o dispari più pari) dà dispari, cioè $D + P = D$ e $P + D = D$, e infine dispari più dispari dà pari: $D + D = P$.

Ecco la tabella:

+	P	D
P	P	D
D	D	P

Osserviamo adesso le due tabelle assieme:

+	P	D
P	P	D
D	D	P

+	0	F
0	0	F
F	F	0

Come si vede, se si cambia 0 in P e F in D , si ottiene la stessa tabella.

Questa situazione si chiama *isomorfismo*

Questa situazione si chiama *isomorfismo* (da una parola greca che significa 'stessa forma').

Questa situazione si chiama *isomorfismo* (da una parola greca che significa 'stessa forma').

Due gruppi isomorfi si comportano “allo stesso modo”, anche se, come abbiamo visto, si riferiscono a situazioni molto diverse.

Questa situazione si chiama *isomorfismo* (da una parola greca che significa 'stessa forma').

Due gruppi isomorfi si comportano "allo stesso modo", anche se, come abbiamo visto, si riferiscono a situazioni molto diverse.

Il gruppo che abbiamo visto, S_2 , è commutativo.

Questa situazione si chiama *isomorfismo* (da una parola greca che significa ‘stessa forma’).

Due gruppi isomorfi si comportano “allo stesso modo”, anche se, come abbiamo visto, si riferiscono a situazioni molto diverse.

Il gruppo che abbiamo visto, S_2 , è commutativo. Come abbiamo detto, si può dimostrare che gruppi con 2,3,4,5 elementi sono tutti commutativi.

Questa situazione si chiama *isomorfismo* (da una parola greca che significa ‘stessa forma’).

Due gruppi isomorfi si comportano “allo stesso modo”, anche se, come abbiamo visto, si riferiscono a situazioni molto diverse.

Il gruppo che abbiamo visto, S_2 , è commutativo. Come abbiamo detto, si può dimostrare che gruppi con 2,3,4,5 elementi sono tutti commutativi.

Si può dimostrare anche che i gruppi con due elementi, come S_2 , sono tutti isomorfi:

Questa situazione si chiama *isomorfismo* (da una parola greca che significa ‘stessa forma’).

Due gruppi isomorfi si comportano “allo stesso modo”, anche se, come abbiamo visto, si riferiscono a situazioni molto diverse.

Il gruppo che abbiamo visto, S_2 , è commutativo. Come abbiamo detto, si può dimostrare che gruppi con 2,3,4,5 elementi sono tutti commutativi.

Si può dimostrare anche che i gruppi con due elementi, come S_2 , sono tutti isomorfi: non c'è modo di inventare una tabella diversa (a parte cambiare i nomi alle lettere) che rispetti tutte le proprietà di gruppo.

Questa situazione si chiama *isomorfismo* (da una parola greca che significa ‘stessa forma’).

Due gruppi isomorfi si comportano “allo stesso modo”, anche se, come abbiamo visto, si riferiscono a situazioni molto diverse.

Il gruppo che abbiamo visto, S_2 , è commutativo. Come abbiamo detto, si può dimostrare che gruppi con 2,3,4,5 elementi sono tutti commutativi.

Si può dimostrare anche che i gruppi con due elementi, come S_2 , sono tutti isomorfi: non c'è modo di inventare una tabella diversa (a parte cambiare i nomi alle lettere) che rispetti tutte le proprietà di gruppo.

Anche i gruppi con 3 elementi sono tutti isomorfi. E uno l'abbiamo già visto, senza accorgercene.

Questa situazione si chiama *isomorfismo* (da una parola greca che significa ‘stessa forma’).

Due gruppi isomorfi si comportano “allo stesso modo”, anche se, come abbiamo visto, si riferiscono a situazioni molto diverse.

Il gruppo che abbiamo visto, S_2 , è commutativo. Come abbiamo detto, si può dimostrare che gruppi con 2,3,4,5 elementi sono tutti commutativi.

Si può dimostrare anche che i gruppi con due elementi, come S_2 , sono tutti isomorfi: non c’è modo di inventare una tabella diversa (a parte cambiare i nomi alle lettere) che rispetti tutte le proprietà di gruppo.

Anche i gruppi con 3 elementi sono tutti isomorfi. E uno l’abbiamo già visto, senza accorgercene.

Riprendiamo la tabella di S_3 ed evidenziamo alcuni elementi:

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	S	R	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	S	R	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

Come si può vedere, la parte blu è “autonoma”: non contiene F , G o H , ma solo R , S e 0 .

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	S	R	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

Come si può vedere, la parte blu è “autonoma”: non contiene F , G o H , ma solo R , S e 0 . E si può verificare che è un gruppo anche lui, che si indica con A_3 o C_3 .

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	S	R	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

Come si può vedere, la parte blu è “autonoma”: non contiene F , G o H , ma solo R , S e 0 . E si può verificare che è un gruppo anche lui, che si indica con A_3 o C_3 .

Questo gruppo corrisponde alle rotazioni del cartello triangolare: la rotazione di 120° (R), quella di 240° (S) e quella nulla (0).

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	S	R	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

Come si può vedere, la parte blu è “autonoma”: non contiene F , G o H , ma solo R , S e 0 . E si può verificare che è un gruppo anche lui, che si indica con A_3 o C_3 .

Questo gruppo corrisponde alle rotazioni del cartello triangolare: la rotazione di 120° (R), quella di 240° (S) e quella nulla (0). È anch'esso commutativo.

+	R	S	0	F	G	H
R	S	0	R	G	H	F
S	0	S	R	H	F	G
0	R	S	0	F	G	H
F	H	G	F	0	S	R
G	F	H	G	R	0	S
H	G	F	H	S	R	0

Come si può vedere, la parte blu è “autonoma”: non contiene F , G o H , ma solo R , S e 0 . E si può verificare che è un gruppo anche lui, che si indica con A_3 o C_3 .

Questo gruppo corrisponde alle rotazioni del cartello triangolare: la rotazione di 120° (R), quella di 240° (S) e quella nulla (0). È anch'esso commutativo.

Quando si ha una situazione come questa, con un gruppo dentro un altro gruppo, si parla di *sottogruppo*.

S_3 ha poi anche altri sottogruppi: quelli costituiti solo da 0 e F , oppure 0 e G , oppure 0 e H , tutti isomorfi a S_2 .

S_3 ha poi anche altri sottogruppi: quelli costituiti solo da 0 e F , oppure 0 e G , oppure 0 e H , tutti isomorfi a S_2 .

Il gruppo A_3 ha infine un'altra particolarità che abbiamo visto senza rendercene conto:

S_3 ha poi anche altri sottogruppi: quelli costituiti solo da 0 e F , oppure 0 e G , oppure 0 e H , tutti isomorfi a S_2 .

Il gruppo A_3 ha infine un'altra particolarità che abbiamo visto senza rendercene conto: se si parte da R e si continua a sommare R , si ottengono tutti gli elementi di A_3 .

S_3 ha poi anche altri sottogruppi: quelli costituiti solo da 0 e F , oppure 0 e G , oppure 0 e H , tutti isomorfi a S_2 .

Il gruppo A_3 ha infine un'altra particolarità che abbiamo visto senza rendercene conto: se si parte da R e si continua a sommare R , si ottengono tutti gli elementi di A_3 . Infatti $R + R = S$ e $R + R + R = 0$, cosa che avevamo visto prima.

S_3 ha poi anche altri sottogruppi: quelli costituiti solo da 0 e F , oppure 0 e G , oppure 0 e H , tutti isomorfi a S_2 .

Il gruppo A_3 ha infine un'altra particolarità che abbiamo visto senza rendercene conto: se si parte da R e si continua a sommare R , si ottengono tutti gli elementi di A_3 . Infatti $R + R = S$ e $R + R + R = 0$, cosa che avevamo visto prima.

Un gruppo fatto così si dice *ciclico*, perché continuando a sommare R (che si chiama *generatore*) si continua a girare in tondo

S_3 ha poi anche altri sottogruppi: quelli costituiti solo da 0 e F , oppure 0 e G , oppure 0 e H , tutti isomorfi a S_2 .

Il gruppo A_3 ha infine un'altra particolarità che abbiamo visto senza rendercene conto: se si parte da R e si continua a sommare R , si ottengono tutti gli elementi di A_3 . Infatti $R + R = S$ e $R + R + R = 0$, cosa che avevamo visto prima.

Un gruppo fatto così si dice *ciclico*, perché continuando a sommare R (che si chiama *generatore*) si continua a girare in tondo (esattamente come si gira in tondo ruotando tante volte un triangolo equilatero). Per questo a volte lo si indica con C_3 .

S_3 ha poi anche altri sottogruppi: quelli costituiti solo da 0 e F , oppure 0 e G , oppure 0 e H , tutti isomorfi a S_2 .

Il gruppo A_3 ha infine un'altra particolarità che abbiamo visto senza rendercene conto: se si parte da R e si continua a sommare R , si ottengono tutti gli elementi di A_3 . Infatti $R + R = S$ e $R + R + R = 0$, cosa che avevamo visto prima.

Un gruppo fatto così si dice *ciclico*, perché continuando a sommare R (che si chiama *generatore*) si continua a girare in tondo (esattamente come si gira in tondo ruotando tante volte un triangolo equilatero). Per questo a volte lo si indica con C_3 .

Esistono altri gruppi con 3 elementi? No, e possiamo vedere perché, come approfondimento.

Approfondimento

Prendiamo una tabella 3×3 e chiamiamo $A, B, 0$ i tre elementi (uno deve essere quello neutro).

Approfondimento

Prendiamo una tabella 3×3 e chiamiamo $A, B, 0$ i tre elementi (uno deve essere quello neutro).

+	A	B	0
A			
B			
0			

Approfondimento

Prendiamo una tabella 3×3 e chiamiamo $A, B, 0$ i tre elementi (uno deve essere quello neutro).

+	A	B	0
A			
B			
0			

Dal fatto che 0 deve essere l'elemento neutro, sappiamo già che $A + 0 = A$, $0 + 0 = 0$, ecc.:

Approfondimento

Prendiamo una tabella 3×3 e chiamiamo $A, B, 0$ i tre elementi (uno deve essere quello neutro).

+	A	B	0
A			
B			
0			

Dal fatto che 0 deve essere l'elemento neutro, sappiamo già che $A + 0 = A$, $0 + 0 = 0$, ecc.:

+	A	B	0
A			A
B			B
0	A	B	0

+	A	B	0
A			A
B			B
0	A	B	0

Adesso, dato che ogni elemento deve avere un opposto, dobbiamo mettere uno zero nella prima riga, quindi ad $A + A$ o ad $A + B$.

+	A	B	0
A			A
B			B
0	A	B	0

Adesso, dato che ogni elemento deve avere un opposto, dobbiamo mettere uno zero nella prima riga, quindi ad $A + A$ o ad $A + B$.
Proviamo a metterlo ad $A + A$.

+	A	B	0
A			A
B			B
0	A	B	0

Adesso, dato che ogni elemento deve avere un opposto, dobbiamo mettere uno zero nella prima riga, quindi ad $A + A$ o ad $A + B$.

Proviamo a metterlo ad $A + A$. Quindi $A + A = 0$ ed A è l'opposto di A .

Allora B non può essere l'opposto di A perché c'è già A , e quindi $A + B$ non può fare 0, altrimenti anche B sarebbe l'opposto di A .

+	A	B	0
A			A
B			B
0	A	B	0

Adesso, dato che ogni elemento deve avere un opposto, dobbiamo mettere uno zero nella prima riga, quindi ad $A + A$ o ad $A + B$.

Proviamo a metterlo ad $A + A$. Quindi $A + A = 0$ ed A è l'opposto di A . Allora B non può essere l'opposto di A perché c'è già A , e quindi $A + B$ non può fare 0, altrimenti anche B sarebbe l'opposto di A . Allora $A + B$ fa A oppure B .

+	A	B	0
A			A
B			B
0	A	B	0

Adesso, dato che ogni elemento deve avere un opposto, dobbiamo mettere uno zero nella prima riga, quindi ad $A + A$ o ad $A + B$.

Proviamo a metterlo ad $A + A$. Quindi $A + A = 0$ ed A è l'opposto di A . Allora B non può essere l'opposto di A perché c'è già A , e quindi $A + B$ non può fare 0, altrimenti anche B sarebbe l'opposto di A . Allora $A + B$ fa A oppure B .

Ma allora

$$(A + A) + B = 0 + B = B$$

+	A	B	0
A			A
B			B
0	A	B	0

Adesso, dato che ogni elemento deve avere un opposto, dobbiamo mettere uno zero nella prima riga, quindi ad $A + A$ o ad $A + B$.

Proviamo a metterlo ad $A + A$. Quindi $A + A = 0$ ed A è l'opposto di A . Allora B non può essere l'opposto di A perché c'è già A , e quindi $A + B$ non può fare 0, altrimenti anche B sarebbe l'opposto di A . Allora $A + B$ fa A oppure B .

Ma allora

$$(A + A) + B = 0 + B = B$$

e, se l'operazione deve avere la proprietà associativa lo stesso deve venire da

+	A	B	0
A			A
B			B
0	A	B	0

Adesso, dato che ogni elemento deve avere un opposto, dobbiamo mettere uno zero nella prima riga, quindi ad $A + A$ o ad $A + B$.

Proviamo a metterlo ad $A + A$. Quindi $A + A = 0$ ed A è l'opposto di A . Allora B non può essere l'opposto di A perché c'è già A , e quindi $A + B$ non può fare 0, altrimenti anche B sarebbe l'opposto di A . Allora $A + B$ fa A oppure B .

Ma allora

$$(A + A) + B = 0 + B = B$$

e, se l'operazione deve avere la proprietà associativa lo stesso deve venire da

$$A + (A + B).$$

+	A	B	0
A			A
B			B
0	A	B	0

Adesso, dato che ogni elemento deve avere un opposto, dobbiamo mettere uno zero nella prima riga, quindi ad $A + A$ o ad $A + B$.

Proviamo a metterlo ad $A + A$. Quindi $A + A = 0$ ed A è l'opposto di A . Allora B non può essere l'opposto di A perché c'è già A , e quindi $A + B$ non può fare 0, altrimenti anche B sarebbe l'opposto di A . Allora $A + B$ fa A oppure B .

Ma allora

$$(A + A) + B = 0 + B = B$$

e, se l'operazione deve avere la proprietà associativa lo stesso deve venire da

$$A + (A + B).$$

Ora, se $A + B = A$ viene

+	A	B	0
A			A
B			B
0	A	B	0

Adesso, dato che ogni elemento deve avere un opposto, dobbiamo mettere uno zero nella prima riga, quindi ad $A + A$ o ad $A + B$.

Proviamo a metterlo ad $A + A$. Quindi $A + A = 0$ ed A è l'opposto di A . Allora B non può essere l'opposto di A perché c'è già A , e quindi $A + B$ non può fare 0, altrimenti anche B sarebbe l'opposto di A . Allora $A + B$ fa A oppure B .

Ma allora

$$(A + A) + B = 0 + B = B$$

e, se l'operazione deve avere la proprietà associativa lo stesso deve venire da

$$A + (A + B).$$

Ora, se $A + B = A$ viene

$$A + (A + B) = A + A = 0$$

e non va bene perché deve venire B .

e non va bene perché deve venire B . Se invece $A + B = B$ va bene perché

e non va bene perché deve venire B . Se invece $A + B = B$ va bene perché

$$A + (A + B) = A + B = B$$

e non va bene perché deve venire B . Se invece $A + B = B$ va bene perché

$$A + (A + B) = A + B = B$$

Ecco la situazione:

e non va bene perché deve venire B . Se invece $A + B = B$ va bene perché

$$A + (A + B) = A + B = B$$

Ecco la situazione:

+	A	B	0
A	0	B	A
B			B
0	A	B	0

e non va bene perché deve venire B . Se invece $A + B = B$ va bene perché

$$A + (A + B) = A + B = B$$

Ecco la situazione:

+	A	B	0
A	0	B	A
B			B
0	A	B	0

Adesso però dobbiamo mettere lo zero anche nella seconda riga, e sappiamo che in ogni colonna ci deve essere uno zero, quindi $B + B$ deve essere zero.

e non va bene perché deve venire B . Se invece $A + B = B$ va bene perché

$$A + (A + B) = A + B = B$$

Ecco la situazione:

+	A	B	0
A	0	B	A
B			B
0	A	B	0

Adesso però dobbiamo mettere lo zero anche nella seconda riga, e sappiamo che in ogni colonna ci deve essere uno zero, quindi $B + B$ deve essere zero. Ma ora

e non va bene perché deve venire B . Se invece $A + B = B$ va bene perché

$$A + (A + B) = A + B = B$$

Ecco la situazione:

+	A	B	0
A	0	B	A
B			B
0	A	B	0

Adesso però dobbiamo mettere lo zero anche nella seconda riga, e sappiamo che in ogni colonna ci deve essere uno zero, quindi $B + B$ deve essere zero. Ma ora

$$A + (B + B) = A + 0 = A$$

e non va bene perché deve venire B . Se invece $A + B = B$ va bene perché

$$A + (A + B) = A + B = B$$

Ecco la situazione:

+	A	B	0
A	0	B	A
B			B
0	A	B	0

Adesso però dobbiamo mettere lo zero anche nella seconda riga, e sappiamo che in ogni colonna ci deve essere uno zero, quindi $B + B$ deve essere zero. Ma ora

$$A + (B + B) = A + 0 = A \quad \text{e} \quad \underbrace{(A + B)}_B + B = B + B = 0$$

e quindi la somma non è associativa.

e non va bene perché deve venire B . Se invece $A + B = B$ va bene perché

$$A + (A + B) = A + B = B$$

Ecco la situazione:

+	A	B	0
A	0	B	A
B			B
0	A	B	0

Adesso però dobbiamo mettere lo zero anche nella seconda riga, e sappiamo che in ogni colonna ci deve essere uno zero, quindi $B + B$ deve essere zero. Ma ora

$$A + (B + B) = A + 0 = A \quad \text{e} \quad \underbrace{(A + B)}_B + B = B + B = 0$$

e quindi la somma non è associativa.

Ma allora $A + A$ non poteva fare 0 e quindi deve esserlo $A + B$, e allo stesso modo, invertendo i ruoli di A e B , si dimostra che $B + A = 0$.

e non va bene perché deve venire B . Se invece $A + B = B$ va bene perché

$$A + (A + B) = A + B = B$$

Ecco la situazione:

+	A	B	0
A	0	B	A
B			B
0	A	B	0

Adesso però dobbiamo mettere lo zero anche nella seconda riga, e sappiamo che in ogni colonna ci deve essere uno zero, quindi $B + B$ deve essere zero. Ma ora

$$A + (B + B) = A + 0 = A \quad \text{e} \quad \underbrace{(A + B)}_B + B = B + B = 0$$

e quindi la somma non è associativa.

Ma allora $A + A$ non poteva fare 0 e quindi deve esserlo $A + B$, e allo stesso modo, invertendo i ruoli di A e B , si dimostra che $B + A = 0$. La tabella è ora

+	A	B	0
A		0	A
B	0		B
0	A	B	0

+	A	B	0
A		0	A
B	0		B
0	A	B	0

Adesso infine $A + A$ può fare A o B .

+	A	B	0
A		0	A
B	0		B
0	A	B	0

Adesso infine $A + A$ può fare A o B . Se facesse A , avremmo

+	A	B	0
A		0	A
B	0		B
0	A	B	0

Adesso infine $A + A$ può fare A o B . Se facesse A , avremmo

$$(A + A) + B = A + B = 0$$

+	A	B	0
A		0	A
B	0		B
0	A	B	0

Adesso infine $A + A$ può fare A o B . Se facesse A , avremmo

$$(A + A) + B = A + B = 0$$

mentre

+	A	B	0
A		0	A
B	0		B
0	A	B	0

Adesso infine $A + A$ può fare A o B . Se facesse A , avremmo

$$(A + A) + B = A + B = 0$$

mentre

$$A + (A + B) = A + 0 = A$$

+	A	B	0
A		0	A
B	0		B
0	A	B	0

Adesso infine $A + A$ può fare A o B . Se facesse A , avremmo

$$(A + A) + B = A + B = 0$$

mentre

$$A + (A + B) = A + 0 = A$$

e quindi non è di nuovo possibile per l'associatività.

+	A	B	0
A		0	A
B	0		B
0	A	B	0

Adesso infine $A + A$ può fare A o B . Se facesse A , avremmo

$$(A + A) + B = A + B = 0$$

mentre

$$A + (A + B) = A + 0 = A$$

e quindi non è di nuovo possibile per l'associatività. Dunque $A + A = B$ e, scambiando A con B , viene $B + B = A$.

+	A	B	0
A		0	A
B	0		B
0	A	B	0

Adesso infine $A + A$ può fare A o B . Se facesse A , avremmo

$$(A + A) + B = A + B = 0$$

mentre

$$A + (A + B) = A + 0 = A$$

e quindi non è di nuovo possibile per l'associatività. Dunque $A + A = B$ e, scambiando A con B , viene $B + B = A$. In definitiva abbiamo la tabella

+	A	B	0
A	B	0	A
B	0	A	B
0	A	B	0

+	A	B	0
A	B	0	A
B	0	A	B
0	A	B	0

e se la confrontiamo con A_3 vediamo che è la stessa:

+	A	B	0
A	B	0	A
B	0	A	B
0	A	B	0

e se la confrontiamo con A_3 vediamo che è la stessa:

+	R	S	0
R	S	0	R
S	0	R	S
0	R	S	0

+	A	B	0
A	B	0	A
B	0	A	B
0	A	B	0

e se la confrontiamo con A_3 vediamo che è la stessa:

+	R	S	0
R	S	0	R
S	0	R	S
0	R	S	0

se al posto di A scriviamo R e al posto di B scriviamo S . Dunque ogni gruppo con 3 elementi è isomorfo a C_3 .

Gruppi ciclici

Il gruppo A_3 , quello, lo ricordiamo, delle rotazioni del triangolo equilatero $(R, S, 0)$, è un gruppo ciclico: significa che esiste un elemento (nell'esempio R) tale che continuando a sommare multipli di esso si trovano tutti gli elementi del gruppo.

Gruppi ciclici

Il gruppo A_3 , quello, lo ricordiamo, delle rotazioni del triangolo equilatero $(R, S, 0)$, è un gruppo ciclico: significa che esiste un elemento (nell'esempio R) tale che continuando a sommare multipli di esso si trovano tutti gli elementi del gruppo.

Anche S_2 è ciclico:

Gruppi ciclici

Il gruppo A_3 , quello, lo ricordiamo, delle rotazioni del triangolo equilatero $(R, S, 0)$, è un gruppo ciclico: significa che esiste un elemento (nell'esempio R) tale che continuando a sommare multipli di esso si trovano tutti gli elementi del gruppo.

Anche S_2 è ciclico: siccome $D + D = P$ e i soli elementi sono D e P (quest'ultimo è l'elemento neutro), i multipli di D generano tutti gli elementi.

Gruppi ciclici

Il gruppo A_3 , quello, lo ricordiamo, delle rotazioni del triangolo equilatero $(R, S, 0)$, è un gruppo ciclico: significa che esiste un elemento (nell'esempio R) tale che continuando a sommare multipli di esso si trovano tutti gli elementi del gruppo.

Anche S_2 è ciclico: siccome $D + D = P$ e i soli elementi sono D e P (quest'ultimo è l'elemento neutro), i multipli di D generano tutti gli elementi.

Esistono gruppi ciclici con un numero qualunque di elementi.

Gruppi ciclici

Il gruppo A_3 , quello, lo ricordiamo, delle rotazioni del triangolo equilatero $(R, S, 0)$, è un gruppo ciclico: significa che esiste un elemento (nell'esempio R) tale che continuando a sommare multipli di esso si trovano tutti gli elementi del gruppo.

Anche S_2 è ciclico: siccome $D + D = P$ e i soli elementi sono D e P (quest'ultimo è l'elemento neutro), i multipli di D generano tutti gli elementi.

Esistono gruppi ciclici con un numero qualunque di elementi. Basta prendere un poligono di n lati e considerare la rotazione di $360/n$ gradi, (nel caso $n = 3$ vengono i 120° di R), con tutti i suoi multipli.

Gruppi ciclici

Il gruppo A_3 , quello, lo ricordiamo, delle rotazioni del triangolo equilatero $(R, S, 0)$, è un gruppo ciclico: significa che esiste un elemento (nell'esempio R) tale che continuando a sommare multipli di esso si trovano tutti gli elementi del gruppo.

Anche S_2 è ciclico: siccome $D + D = P$ e i soli elementi sono D e P (quest'ultimo è l'elemento neutro), i multipli di D generano tutti gli elementi.

Esistono gruppi ciclici con un numero qualunque di elementi. Basta prendere un poligono di n lati e considerare la rotazione di $360/n$ gradi, (nel caso $n = 3$ vengono i 120° di R), con tutti i suoi multipli. Ne escono n elementi che formano un gruppo.

Gruppi ciclici

Il gruppo A_3 , quello, lo ricordiamo, delle rotazioni del triangolo equilatero $(R, S, 0)$, è un gruppo ciclico: significa che esiste un elemento (nell'esempio R) tale che continuando a sommare multipli di esso si trovano tutti gli elementi del gruppo.

Anche S_2 è ciclico: siccome $D + D = P$ e i soli elementi sono D e P (quest'ultimo è l'elemento neutro), i multipli di D generano tutti gli elementi.

Esistono gruppi ciclici con un numero qualunque di elementi. Basta prendere un poligono di n lati e considerare la rotazione di $360/n$ gradi, (nel caso $n = 3$ vengono i 120° di R), con tutti i suoi multipli. Ne escono n elementi che formano un gruppo.

Prima di vedere perché, però, cambiamo la notazione.

Gruppi ciclici

Il gruppo A_3 , quello, lo ricordiamo, delle rotazioni del triangolo equilatero $(R, S, 0)$, è un gruppo ciclico: significa che esiste un elemento (nell'esempio R) tale che continuando a sommare multipli di esso si trovano tutti gli elementi del gruppo.

Anche S_2 è ciclico: siccome $D + D = P$ e i soli elementi sono D e P (quest'ultimo è l'elemento neutro), i multipli di D generano tutti gli elementi.

Esistono gruppi ciclici con un numero qualunque di elementi. Basta prendere un poligono di n lati e considerare la rotazione di $360/n$ gradi, (nel caso $n = 3$ vengono i 120° di R), con tutti i suoi multipli. Ne escono n elementi che formano un gruppo.

Prima di vedere perché, però, cambiamo la notazione. Invece di scrivere $R + R + R$, scriviamo R^3 , come si fa di solito.

Gruppi ciclici

Il gruppo A_3 , quello, lo ricordiamo, delle rotazioni del triangolo equilatero $(R, S, 0)$, è un gruppo ciclico: significa che esiste un elemento (nell'esempio R) tale che continuando a sommare multipli di esso si trovano tutti gli elementi del gruppo.

Anche S_2 è ciclico: siccome $D + D = P$ e i soli elementi sono D e P (quest'ultimo è l'elemento neutro), i multipli di D generano tutti gli elementi.

Esistono gruppi ciclici con un numero qualunque di elementi. Basta prendere un poligono di n lati e considerare la rotazione di $360/n$ gradi, (nel caso $n = 3$ vengono i 120° di R), con tutti i suoi multipli. Ne escono n elementi che formano un gruppo.

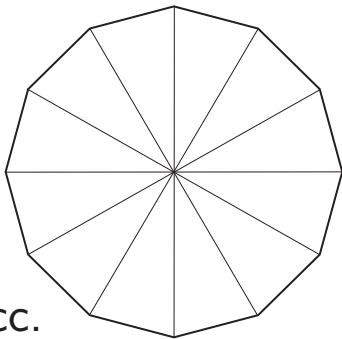
Prima di vedere perché, però, cambiamo la notazione. Invece di scrivere $R + R + R$, scriviamo R^3 , come si fa di solito.

Prendiamo un poligono di 12 lati, tanto per fare un esempio non banale.

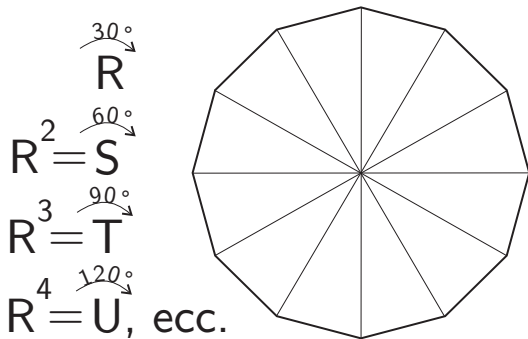
Consideriamo la rotazione R di $360/12 = 30$ gradi in senso orario:

Consideriamo la rotazione R di $360/12 = 30$ gradi in senso orario:

$$\begin{aligned} & \overset{30^\circ}{\curvearrowright} R \\ & R^2 = \overset{60^\circ}{\curvearrowright} S \\ & R^3 = \overset{90^\circ}{\curvearrowright} T \\ & R^4 = \overset{120^\circ}{\curvearrowright} U, \text{ ecc.} \end{aligned}$$



Consideriamo la rotazione R di $360/12 = 30$ gradi in senso orario:



Se la applichiamo 2, 3, 4, ... fino a 12 volte, troviamo rotazioni di $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, \dots$ fino a 360° , che è 0 perché il poligono si ritrova al punto di partenza.

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo?

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Prima di tutto, va detto che per delle *trasformazioni*, come queste rotazioni, la proprietà associativa è sempre verificata e non staremo a dimostrarlo.

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Prima di tutto, va detto che per delle *trasformazioni*, come queste rotazioni, la proprietà associativa è sempre verificata e non staremo a dimostrarlo.

Siccome poi abbiamo messo *tutte* le 12 potenze di R , non possiamo mai uscire dal gruppo e l'operazione di somma è interna.

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Prima di tutto, va detto che per delle *trasformazioni*, come queste rotazioni, la proprietà associativa è sempre verificata e non staremo a dimostrarlo.

Siccome poi abbiamo messo *tutte* le 12 potenze di R , non possiamo mai uscire dal gruppo e l'operazione di somma è interna.

L'elemento neutro poi c'è:

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Prima di tutto, va detto che per delle *trasformazioni*, come queste rotazioni, la proprietà associativa è sempre verificata e non staremo a dimostrarlo.

Siccome poi abbiamo messo *tutte* le 12 potenze di R , non possiamo mai uscire dal gruppo e l'operazione di somma è interna.

L'elemento neutro poi c'è: nell'esempio è R^{12} , ed è chiaro come si procede nel caso di n lati.

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Prima di tutto, va detto che per delle *trasformazioni*, come queste rotazioni, la proprietà associativa è sempre verificata e non staremo a dimostrarlo.

Siccome poi abbiamo messo *tutte* le 12 potenze di R , non possiamo mai uscire dal gruppo e l'operazione di somma è interna.

L'elemento neutro poi c'è: nell'esempio è R^{12} , ed è chiaro come si procede nel caso di n lati.

Vediamo che ogni elemento ammette un opposto (o inverso).

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Prima di tutto, va detto che per delle *trasformazioni*, come queste rotazioni, la proprietà associativa è sempre verificata e non staremo a dimostrarlo.

Siccome poi abbiamo messo *tutte* le 12 potenze di R , non possiamo mai uscire dal gruppo e l'operazione di somma è interna.

L'elemento neutro poi c'è: nell'esempio è R^{12} , ed è chiaro come si procede nel caso di n lati.

Vediamo che ogni elemento ammette un opposto (o inverso). Prendiamo ad esempio R^7 .

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Prima di tutto, va detto che per delle *trasformazioni*, come queste rotazioni, la proprietà associativa è sempre verificata e non staremo a dimostrarlo.

Siccome poi abbiamo messo *tutte* le 12 potenze di R , non possiamo mai uscire dal gruppo e l'operazione di somma è interna.

L'elemento neutro poi c'è: nell'esempio è R^{12} , ed è chiaro come si procede nel caso di n lati.

Vediamo che ogni elemento ammette un opposto (o inverso). Prendiamo ad esempio R^7 . Questa rotazione equivale a ruotare di 7 volte 30 gradi, cioè 210° .

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Prima di tutto, va detto che per delle *trasformazioni*, come queste rotazioni, la proprietà associativa è sempre verificata e non staremo a dimostrarlo.

Siccome poi abbiamo messo *tutte* le 12 potenze di R , non possiamo mai uscire dal gruppo e l'operazione di somma è interna.

L'elemento neutro poi c'è: nell'esempio è R^{12} , ed è chiaro come si procede nel caso di n lati.

Vediamo che ogni elemento ammette un opposto (o inverso). Prendiamo ad esempio R^7 . Questa rotazione equivale a ruotare di 7 volte 30 gradi, cioè 210° . Allora, se ruoto di un angolo pari a $360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$ avrò fatto il giro completo e sarò arrivato a zero.

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Prima di tutto, va detto che per delle *trasformazioni*, come queste rotazioni, la proprietà associativa è sempre verificata e non staremo a dimostrarlo.

Siccome poi abbiamo messo *tutte* le 12 potenze di R , non possiamo mai uscire dal gruppo e l'operazione di somma è interna.

L'elemento neutro poi c'è: nell'esempio è R^{12} , ed è chiaro come si procede nel caso di n lati.

Vediamo che ogni elemento ammette un opposto (o inverso). Prendiamo ad esempio R^7 . Questa rotazione equivale a ruotare di 7 volte 30 gradi, cioè 210° . Allora, se ruoto di un angolo pari a $360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$ avrò fatto il giro completo e sarò arrivato a zero. Questa rotazione corrisponde a R^5 , perché $150/30$ fa 5 (oppure, se preferite, perché $12 - 7 = 5$).

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Prima di tutto, va detto che per delle *trasformazioni*, come queste rotazioni, la proprietà associativa è sempre verificata e non staremo a dimostrarlo.

Siccome poi abbiamo messo *tutte* le 12 potenze di R , non possiamo mai uscire dal gruppo e l'operazione di somma è interna.

L'elemento neutro poi c'è: nell'esempio è R^{12} , ed è chiaro come si procede nel caso di n lati.

Vediamo che ogni elemento ammette un opposto (o inverso). Prendiamo ad esempio R^7 . Questa rotazione equivale a ruotare di 7 volte 30 gradi, cioè 210° . Allora, se ruoto di un angolo pari a $360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$ avrò fatto il giro completo e sarò arrivato a zero. Questa rotazione corrisponde a R^5 , perché $150/30$ fa 5 (oppure, se preferite, perché $12 - 7 = 5$). È chiaro come si prosegue nel caso generale.

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Prima di tutto, va detto che per delle *trasformazioni*, come queste rotazioni, la proprietà associativa è sempre verificata e non staremo a dimostrarlo.

Siccome poi abbiamo messo *tutte* le 12 potenze di R , non possiamo mai uscire dal gruppo e l'operazione di somma è interna.

L'elemento neutro poi c'è: nell'esempio è R^{12} , ed è chiaro come si procede nel caso di n lati.

Vediamo che ogni elemento ammette un opposto (o inverso). Prendiamo ad esempio R^7 . Questa rotazione equivale a ruotare di 7 volte 30 gradi, cioè 210° . Allora, se ruoto di un angolo pari a $360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$ avrò fatto il giro completo e sarò arrivato a zero. Questa rotazione corrisponde a R^5 , perché $150/30$ fa 5 (oppure, se preferite, perché $12 - 7 = 5$). È chiaro come si prosegue nel caso generale.

Questo gruppo è anche commutativo.

Questi elementi (le “potenze” di R) formano un gruppo? Sì, vediamo rapidamente perché.

Prima di tutto, va detto che per delle *trasformazioni*, come queste rotazioni, la proprietà associativa è sempre verificata e non staremo a dimostrarlo.

Siccome poi abbiamo messo *tutte* le 12 potenze di R , non possiamo mai uscire dal gruppo e l'operazione di somma è interna.

L'elemento neutro poi c'è: nell'esempio è R^{12} , ed è chiaro come si procede nel caso di n lati.

Vediamo che ogni elemento ammette un opposto (o inverso). Prendiamo ad esempio R^7 . Questa rotazione equivale a ruotare di 7 volte 30 gradi, cioè 210° . Allora, se ruoto di un angolo pari a $360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$ avrò fatto il giro completo e sarò arrivato a zero. Questa rotazione corrisponde a R^5 , perché $150/30$ fa 5 (oppure, se preferite, perché $12 - 7 = 5$). È chiaro come si prosegue nel caso generale.

Questo gruppo è anche commutativo. Per esempio, applicare $T = R^3$ e poi $U = R^4$ dà evidentemente R^7 , che è lo stesso che fare prima U e poi T .

Il gruppo di Klein

Abbiamo visto che per ogni numero intero positivo si trova un gruppo ciclico con quel numero di elementi.

Il gruppo di Klein

Abbiamo visto che per ogni numero intero positivo si trova un gruppo ciclico con quel numero di elementi.

Vi sono però dei gruppi che *non* sono ciclici.

Il gruppo di Klein

Abbiamo visto che per ogni numero intero positivo si trova un gruppo ciclico con quel numero di elementi.

Vi sono però dei gruppi che *non* sono ciclici. S_3 è uno di questi, perché né gli scambi di lettere come F, G, H né R o S riescono a generare tutti e 6 gli elementi del gruppo.

Il gruppo di Klein

Abbiamo visto che per ogni numero intero positivo si trova un gruppo ciclico con quel numero di elementi.

Vi sono però dei gruppi che *non* sono ciclici. S_3 è uno di questi, perché né gli scambi di lettere come F, G, H né R o S riescono a generare tutti e 6 gli elementi del gruppo.

S_3 non è però il più piccolo gruppo non ciclico.

Il gruppo di Klein

Abbiamo visto che per ogni numero intero positivo si trova un gruppo ciclico con quel numero di elementi.

Vi sono però dei gruppi che *non* sono ciclici. S_3 è uno di questi, perché né gli scambi di lettere come F, G, H né R o S riescono a generare tutti e 6 gli elementi del gruppo.

S_3 non è però il più piccolo gruppo non ciclico.

Vediamo infine di che gruppo si tratta, ritornando ad usare i segnali stradali.

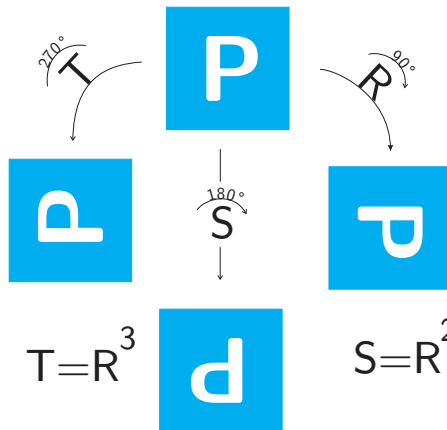
Prendiamo un cartello ben noto:

Prendiamo un cartello ben noto:



Essendo un quadrato, possiamo ragionare come abbiamo fatto per i gruppi ciclici e costruire il gruppo ciclico, generato dalla rotazione R di 90° . Ecco quali sono i tre elementi, oltre ovviamente all'identità che è lo zero:

Essendo un quadrato, possiamo ragionare come abbiamo fatto per i gruppi ciclici e costruire il gruppo ciclico, generato dalla rotazione R di 90° . Ecco quali sono i tre elementi, oltre ovviamente all'identità che è lo zero:



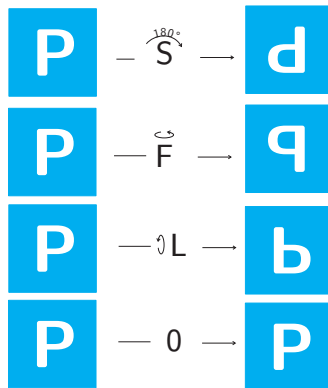
Queste tre rotazioni, più lo zero, formano il gruppo ciclico C_4 .

Però ci sono altri modi di trasformare il quadrato, che per il triangolo non funzionavano.

Però ci sono altri modi di trasformare il quadrato, che per il triangolo non funzionavano. Essi sono, oltre ovviamente allo zero e a S (la rotazione di 180°), anche la riflessione verticale (che corrisponderebbe a F nel triangolo, e fin qui niente di nuovo),

Però ci sono altri modi di trasformare il quadrato, che per il triangolo non funzionavano. Essi sono, oltre ovviamente allo zero e a S (la rotazione di 180°), anche la riflessione verticale (che corrisponderebbe a F nel triangolo, e fin qui niente di nuovo), e quella orizzontale, che nel triangolo non c'era, e che chiamiamo L .

Però ci sono altri modi di trasformare il quadrato, che per il triangolo non funzionavano. Essi sono, oltre ovviamente allo zero e a S (la rotazione di 180°), anche la riflessione verticale (che corrisponderebbe a F nel triangolo, e fin qui niente di nuovo), e quella orizzontale, che nel triangolo non c'era, e che chiamiamo L .



La cosa più lunga da verificare è che questo è un gruppo.

La cosa più lunga da verificare è che questo è un gruppo. Si chiama *gruppo di Klein* in onore del matematico F. Klein.

La cosa più lunga da verificare è che questo è un gruppo. Si chiama *gruppo di Klein* in onore del matematico F. Klein. Torniamo alla notazione col $+$, alla quale siamo più abituati.

La cosa più lunga da verificare è che questo è un gruppo. Si chiama *gruppo di Klein* in onore del matematico F. Klein. Torniamo alla notazione col $+$, alla quale siamo più abituati.

Proviamo a vedere cosa fa $S + L$:

La cosa più lunga da verificare è che questo è un gruppo. Si chiama *gruppo di Klein* in onore del matematico F. Klein. Torniamo alla notazione col $+$, alla quale siamo più abituati.

Proviamo a vedere cosa fa $S + L$:



La cosa più lunga da verificare è che questo è un gruppo. Si chiama *gruppo di Klein* in onore del matematico F. Klein. Torniamo alla notazione col $+$, alla quale siamo più abituati.

Proviamo a vedere cosa fa $S + L$:



Dunque $S + L = F$.

La cosa più lunga da verificare è che questo è un gruppo. Si chiama *gruppo di Klein* in onore del matematico F. Klein. Torniamo alla notazione col $+$, alla quale siamo più abituati.

Proviamo a vedere cosa fa $S + L$:



Dunque $S + L = F$. Poi ovviamente $S + S = 0$, $F + F = 0$, $L + L = 0$ e $F + 0 = F$, $S + 0 = S$, $L + 0 = L$,

La cosa più lunga da verificare è che questo è un gruppo. Si chiama *gruppo di Klein* in onore del matematico F. Klein. Torniamo alla notazione col $+$, alla quale siamo più abituati.

Proviamo a vedere cosa fa $S + L$:



Dunque $S + L = F$. Poi ovviamente $S + S = 0$, $F + F = 0$, $L + L = 0$ e $F + 0 = F$, $S + 0 = S$, $L + 0 = L$, cioè ogni elemento è l'opposto di se stesso.

Per vedere cosa fa $S + F$, ecco la figura:

Per vedere cosa fa $S + F$, ecco la figura:



Per vedere cosa fa $S + F$, ecco la figura:



Dunque $S + F = L$.

Per vedere cosa fa $S + F$, ecco la figura:



Dunque $S + F = L$. Per calcolare $F + L$ possiamo ricorrere all'associatività.

Per vedere cosa fa $S + F$, ecco la figura:



Dunque $S + F = L$. Per calcolare $F + L$ possiamo ricorrere all'associatività. Abbiamo

Per vedere cosa fa $S + F$, ecco la figura:



Dunque $S + F = L$. Per calcolare $F + L$ possiamo ricorrere all'associatività. Abbiamo

$$F + L = (S + L) + L = S + (L + L) = S + 0 = S$$

Per vedere cosa fa $S + F$, ecco la figura:



Dunque $S + F = L$. Per calcolare $F + L$ possiamo ricorrere all'associatività. Abbiamo

$$F + L = (S + L) + L = S + (L + L) = S + 0 = S$$

in quanto sappiamo già che $S + L = F$ e $L + L = 0$.

Infine, da quello che sappiamo finora

Infine, da quello che sappiamo finora

$$F + S =$$

Infine, da quello che sappiamo finora

$$F + S = F + \underbrace{(F + L)}_S$$

Infine, da quello che sappiamo finora

$$F + S = F + \underbrace{(F + L)}_S = (F + F) + L$$

Infine, da quello che sappiamo finora

$$F + S = F + \underbrace{(F + L)}_S = (F + F) + L = 0 + L = L = S + F$$

Infine, da quello che sappiamo finora

$$F + S = F + \underbrace{(F + L)}_S = (F + F) + L = 0 + L = L = S + F$$

$$L + F$$

Infine, da quello che sappiamo finora

$$F + S = F + \underbrace{(F + L)}_S = (F + F) + L = 0 + L = L = S + F$$

$$L + F = (S + F) + F$$

Infine, da quello che sappiamo finora

$$F + S = F + \underbrace{(F + L)}_S = (F + F) + L = 0 + L = L = S + F$$

$$L + F = (S + F) + F = S + (F + F)$$

Infine, da quello che sappiamo finora

$$F + S = F + \underbrace{(F + L)}_S = (F + F) + L = 0 + L = L = S + F$$

$$L + F = (S + F) + F = S + (F + F) = S + 0 = S = F + L$$

Infine, da quello che sappiamo finora

$$F + S = F + \underbrace{(F + L)}_S = (F + F) + L = 0 + L = L = S + F$$

$$L + F = (S + F) + F = S + (F + F) = S + 0 = S = F + L$$

e infine

Infine, da quello che sappiamo finora

$$F + S = F + \underbrace{(F + L)}_S = (F + F) + L = 0 + L = L = S + F$$

$$L + F = (S + F) + F = S + (F + F) = S + 0 = S = F + L$$

e infine

$$L + S = (F + S) + S = F + (S + S) = F + 0 = F = S + L.$$

Infine, da quello che sappiamo finora

$$F + S = F + \underbrace{(F + L)}_S = (F + F) + L = 0 + L = L = S + F$$

$$L + F = (S + F) + F = S + (F + F) = S + 0 = S = F + L$$

e infine

$$L + S = (F + S) + S = F + (S + S) = F + 0 = F = S + L.$$

Dunque la nostra operazione è anche commutativa. Ecco la sua tabella completa:

Infine, da quello che sappiamo finora

$$F + S = F + \underbrace{(F + L)}_S = (F + F) + L = 0 + L = L = S + F$$

$$L + F = (S + F) + F = S + (F + F) = S + 0 = S = F + L$$

e infine

$$L + S = (F + S) + S = F + (S + S) = F + 0 = F = S + L.$$

Dunque la nostra operazione è anche commutativa. Ecco la sua tabella completa:

+	S	F	L	0
S	0	L	F	S
F	L	0	S	F
L	F	S	0	L
0	S	F	L	0

Questo gruppo si indica spesso col la lettera V (non deriva da Voldemort, ma dal tedesco *vier*, che vuol dire 'quattro') ed è legato, come è apparso chiaro dai cartelli, alle simmetrie del quadrato.

Questo gruppo si indica spesso col la lettera V (non deriva da Voldemort, ma dal tedesco *vier*, che vuol dire 'quattro') ed è legato, come è apparso chiaro dai cartelli, alle simmetrie del quadrato. Infatti F è anche la simmetria rispetto a una retta verticale, L la simmetria rispetto ad una retta verticale ed S la simmetria rispetto al punto di intersezione.

Questo gruppo si indica spesso col la lettera V (non deriva da Voldemort, ma dal tedesco *vier*, che vuol dire 'quattro') ed è legato, come è apparso chiaro dai cartelli, alle simmetrie del quadrato. Infatti F è anche la simmetria rispetto a una retta verticale, L la simmetria rispetto ad una retta verticale ed S la simmetria rispetto al punto di intersezione. Il gruppo V non è isomorfo al gruppo C_4 di prima, quello della rotazione di 90° .

Questo gruppo si indica spesso col la lettera V (non deriva da Voldemort, ma dal tedesco *vier*, che vuol dire 'quattro') ed è legato, come è apparso chiaro dai cartelli, alle simmetrie del quadrato. Infatti F è anche la simmetria rispetto a una retta verticale, L la simmetria rispetto ad una retta verticale ed S la simmetria rispetto al punto di intersezione.

Il gruppo V non è isomorfo al gruppo C_4 di prima, quello della rotazione di 90° . Potremmo anche scrivere la tabella di C_4 (fatelo per esercizio), ma è più furbo ragionare così:

Questo gruppo si indica spesso col la lettera V (non deriva da Voldemort, ma dal tedesco *vier*, che vuol dire 'quattro') ed è legato, come è apparso chiaro dai cartelli, alle simmetrie del quadrato. Infatti F è anche la simmetria rispetto a una retta verticale, L la simmetria rispetto ad una retta verticale ed S la simmetria rispetto al punto di intersezione.

Il gruppo V non è isomorfo al gruppo C_4 di prima, quello della rotazione di 90° . Potremmo anche scrivere la tabella di C_4 (fatelo per esercizio), ma è più furbo ragionare così: se i due gruppi fossero isomorfi, si comporterebbero in tutto e per tutto allo stesso modo, a parte il cambiare i nomi degli elementi.

Questo gruppo si indica spesso col la lettera V (non deriva da Voldemort, ma dal tedesco *vier*, che vuol dire 'quattro') ed è legato, come è apparso chiaro dai cartelli, alle simmetrie del quadrato. Infatti F è anche la simmetria rispetto a una retta verticale, L la simmetria rispetto ad una retta verticale ed S la simmetria rispetto al punto di intersezione.

Il gruppo V non è isomorfo al gruppo C_4 di prima, quello della rotazione di 90° . Potremmo anche scrivere la tabella di C_4 (fatelo per esercizio), ma è più furbo ragionare così: se i due gruppi fossero isomorfi, si comporterebbero in tutto e per tutto allo stesso modo, a parte il cambiare i nomi degli elementi.

Il gruppo C_4 è ciclico e la rotazione di 90° riproduce tutti gli altri elementi.

Questo gruppo si indica spesso col la lettera V (non deriva da Voldemort, ma dal tedesco *vier*, che vuol dire 'quattro') ed è legato, come è apparso chiaro dai cartelli, alle simmetrie del quadrato. Infatti F è anche la simmetria rispetto a una retta verticale, L la simmetria rispetto ad una retta verticale ed S la simmetria rispetto al punto di intersezione.

Il gruppo V non è isomorfo al gruppo C_4 di prima, quello della rotazione di 90° . Potremmo anche scrivere la tabella di C_4 (fatelo per esercizio), ma è più furbo ragionare così: se i due gruppi fossero isomorfi, si comporterebbero in tutto e per tutto allo stesso modo, a parte il cambiare i nomi degli elementi.

Il gruppo C_4 è ciclico e la rotazione di 90° riproduce tutti gli altri elementi. Invece questo per il gruppo V non accade.

Questo gruppo si indica spesso col la lettera V (non deriva da Voldemort, ma dal tedesco *vier*, che vuol dire 'quattro') ed è legato, come è apparso chiaro dai cartelli, alle simmetrie del quadrato. Infatti F è anche la simmetria rispetto a una retta verticale, L la simmetria rispetto ad una retta verticale ed S la simmetria rispetto al punto di intersezione.

Il gruppo V non è isomorfo al gruppo C_4 di prima, quello della rotazione di 90° . Potremmo anche scrivere la tabella di C_4 (fatelo per esercizio), ma è più furbo ragionare così: se i due gruppi fossero isomorfi, si comporterebbero in tutto e per tutto allo stesso modo, a parte il cambiare i nomi degli elementi.

Il gruppo C_4 è ciclico e la rotazione di 90° riproduce tutti gli altri elementi. Invece questo per il gruppo V non accade. I "multipli" successivi degli elementi di V non generano tutti gli elementi.

Questo gruppo si indica spesso col la lettera V (non deriva da Voldemort, ma dal tedesco *vier*, che vuol dire 'quattro') ed è legato, come è apparso chiaro dai cartelli, alle simmetrie del quadrato. Infatti F è anche la simmetria rispetto a una retta verticale, L la simmetria rispetto ad una retta verticale ed S la simmetria rispetto al punto di intersezione.

Il gruppo V non è isomorfo al gruppo C_4 di prima, quello della rotazione di 90° . Potremmo anche scrivere la tabella di C_4 (fatelo per esercizio), ma è più furbo ragionare così: se i due gruppi fossero isomorfi, si comporterebbero in tutto e per tutto allo stesso modo, a parte il cambiare i nomi degli elementi.

Il gruppo C_4 è ciclico e la rotazione di 90° riproduce tutti gli altri elementi. Invece questo per il gruppo V non accade. I "multipli" successivi degli elementi di V non generano tutti gli elementi.

Infatti $S + S$ dà zero, così come $F + F$ e $L + L$, e dunque V non è ciclico.

Questo gruppo si indica spesso col la lettera V (non deriva da Voldemort, ma dal tedesco *vier*, che vuol dire 'quattro') ed è legato, come è apparso chiaro dai cartelli, alle simmetrie del quadrato. Infatti F è anche la simmetria rispetto a una retta verticale, L la simmetria rispetto ad una retta verticale ed S la simmetria rispetto al punto di intersezione.

Il gruppo V non è isomorfo al gruppo C_4 di prima, quello della rotazione di 90° . Potremmo anche scrivere la tabella di C_4 (fatelo per esercizio), ma è più furbo ragionare così: se i due gruppi fossero isomorfi, si comporterebbero in tutto e per tutto allo stesso modo, a parte il cambiare i nomi degli elementi.

Il gruppo C_4 è ciclico e la rotazione di 90° riproduce tutti gli altri elementi. Invece questo per il gruppo V non accade. I "multipli" successivi degli elementi di V non generano tutti gli elementi.

Infatti $S + S$ dà zero, così come $F + F$ e $L + L$, e dunque V non è ciclico. Si può mostrare che non ci sono, a meno di un isomorfismo, ossia di un semplice cambio di lettere, altri gruppi con 4 elementi.

A differenza di S_3 , che rappresentava tutte le trasformazioni del triangolo equilatero in sé, il gruppo V non esaurisce tutte le possibili simmetrie del quadrato;

A differenza di S_3 , che rappresentava tutte le trasformazioni del triangolo equilatero in sé, il gruppo V non esaurisce tutte le possibili simmetrie del quadrato; ci sono per esempio anche le simmetrie rispetto alle diagonali, e il corrispondente di S_3 si complica parecchio.

A differenza di S_3 , che rappresentava tutte le trasformazioni del triangolo equilatero in sé, il gruppo V non esaurisce tutte le possibili simmetrie del quadrato; ci sono per esempio anche le simmetrie rispetto alle diagonali, e il corrispondente di S_3 si complica parecchio.

Vi sono infiniti gruppi finiti, come mostrano per esempio i gruppi ciclici, però i matematici hanno lo stesso cercato di classificarli.

A differenza di S_3 , che rappresentava tutte le trasformazioni del triangolo equilatero in sé, il gruppo V non esaurisce tutte le possibili simmetrie del quadrato; ci sono per esempio anche le simmetrie rispetto alle diagonali, e il corrispondente di S_3 si complica parecchio.

Vi sono infiniti gruppi finiti, come mostrano per esempio i gruppi ciclici, però i matematici hanno lo stesso cercato di classificarli. Oggi si sa che esistono 18 famiglie infinite di gruppi (una dei quali è quella dei gruppi ciclici)

A differenza di S_3 , che rappresentava tutte le trasformazioni del triangolo equilatero in sé, il gruppo V non esaurisce tutte le possibili simmetrie del quadrato; ci sono per esempio anche le simmetrie rispetto alle diagonali, e il corrispondente di S_3 si complica parecchio.

Vi sono infiniti gruppi finiti, come mostrano per esempio i gruppi ciclici, però i matematici hanno lo stesso cercato di classificarli. Oggi si sa che esistono 18 famiglie infinite di gruppi (una dei quali è quella dei gruppi ciclici) e 26 gruppi che non vi rientrano.

A differenza di S_3 , che rappresentava tutte le trasformazioni del triangolo equilatero in sé, il gruppo V non esaurisce tutte le possibili simmetrie del quadrato; ci sono per esempio anche le simmetrie rispetto alle diagonali, e il corrispondente di S_3 si complica parecchio.

Vi sono infiniti gruppi finiti, come mostrano per esempio i gruppi ciclici, però i matematici hanno lo stesso cercato di classificarli. Oggi si sa che esistono 18 famiglie infinite di gruppi (una dei quali è quella dei gruppi ciclici) e 26 gruppi che non vi rientrano. Il più grande di essi, per certi versi il gruppo finito più complesso che possa esistere, ha la bellezza di

A differenza di S_3 , che rappresentava tutte le trasformazioni del triangolo equilatero in sé, il gruppo V non esaurisce tutte le possibili simmetrie del quadrato; ci sono per esempio anche le simmetrie rispetto alle diagonali, e il corrispondente di S_3 si complica parecchio.

Vi sono infiniti gruppi finiti, come mostrano per esempio i gruppi ciclici, però i matematici hanno lo stesso cercato di classificarli. Oggi si sa che esistono 18 famiglie infinite di gruppi (una dei quali è quella dei gruppi ciclici) e 26 gruppi che non vi rientrano. Il più grande di essi, per certi versi il gruppo finito più complesso che possa esistere, ha la bellezza di

808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000
elementi, circa 10^{54} .

Esistono poi anche gruppi con infiniti elementi, *molto* più semplici di certi gruppi finiti. Un esempio sono tutte le rotazioni nel piano. Siccome esistono infiniti angoli di rotazione possibili, questi elementi sono infiniti e formano un gruppo.

Esistono poi anche gruppi con infiniti elementi, *molto* più semplici di certi gruppi finiti. Un esempio sono tutte le rotazioni nel piano. Siccome esistono infiniti angoli di rotazione possibili, questi elementi sono infiniti e formano un gruppo.

Anche le *traslazioni* formano un gruppo infinito, perché la quantità con la quale si trasla può essere un qualsiasi numero.

Esistono poi anche gruppi con infiniti elementi, *molto* più semplici di certi gruppi finiti. Un esempio sono tutte le rotazioni nel piano. Siccome esistono infiniti angoli di rotazione possibili, questi elementi sono infiniti e formano un gruppo.

Anche le *traslazioni* formano un gruppo infinito, perché la quantità con la quale si trasla può essere un qualsiasi numero.

Infine, gli stessi *numeri* formano spesso gruppi infiniti.

Esistono poi anche gruppi con infiniti elementi, *molto* più semplici di certi gruppi finiti. Un esempio sono tutte le rotazioni nel piano. Siccome esistono infiniti angoli di rotazione possibili, questi elementi sono infiniti e formano un gruppo.

Anche le *traslazioni* formano un gruppo infinito, perché la quantità con la quale si trasla può essere un qualsiasi numero.

Infine, gli stessi *numeri* formano spesso gruppi infiniti. L'insieme dei numeri interi relativi è un gruppo rispetto all'addizione, così come lo sono i numeri razionali e i reali.

Esistono poi anche gruppi con infiniti elementi, *molto* più semplici di certi gruppi finiti. Un esempio sono tutte le rotazioni nel piano. Siccome esistono infiniti angoli di rotazione possibili, questi elementi sono infiniti e formano un gruppo.

Anche le *traslazioni* formano un gruppo infinito, perché la quantità con la quale si trasla può essere un qualsiasi numero.

Infine, gli stessi *numeri* formano spesso gruppi infiniti. L'insieme dei numeri interi relativi è un gruppo rispetto all'addizione, così come lo sono i numeri razionali e i reali.

Si tratta quindi di strutture decisamente onnipresenti nella Matematica.