

UNITÀ DI APPRENDIMENTO

Dalla costruzione all'argomentazione: un percorso storico e narrativo per la geometria euclidea

Maurizio Berni

Perché la geometria?

Troppo spesso la matematica si riduce ad una routine di formule e calcoli; il suo valore formativo viene svilito ad un addestramento fine a se stesso. Quando si prova a fare della geometria, si cambia decisamente registro. Tutto deve essere dimostrato, tutto, anche ciò che risulta più evidente e banale, deve essere pedantemente e ossessivamente giustificato, come davanti ad un tribunale dell'inquisizione. Il cambio di prospettiva è talmente netto che spesso gli studenti, stanchi per questa sollecitazione per loro innaturale, chiedono: "Quando ricominciamo a fare matematica?" Essi identificano la matematica a quella rassicurante *routine* che, per quanto noiosa, può essere vista come un gioco, con le sue regole (come un gioco di carte, un solitario: se il risultato torna col libro si vince), e usano il binomio, che fa sorridere chi la matematica la conosce, di "Matematica e Geometria".

Lo scopo dell'apprendimento e dell'uso di questo linguaggio formale è quello di insegnare al cittadino del domani a *ragionare*, ma se sulla sollecitazione ad attivare un *proprio* ragionamento prevale quella adottare acriticamente quello altrui, c'è il rischio che l'obiettivo non venga raggiunto.

Non che tutto questo sia da buttar via: qualche studente (un'esigua minoranza) impara a decifrare questi codici, sa restituire un senso a ciò che gli viene imposto, diventa 'coautore' delle tecniche dimostrative, se ne appropria, riesce a prevedere ciò che non ha ancora letto sul libro; ma si tratta di un processo molto, molto selettivo, con percentuali di insuccesso troppo alte, sulle quali occorre studiare per elaborare ipotesi di percorsi di apprendimento che ne migliorino l'efficienza globale. Non si tratta di fare del recupero, quanto di riorganizzare l'intero processo formativo, perché risulti significativo, almeno in egual misura di quello tradizionale, a chi presenta caratteristiche di eccellenza, ma nello stesso tempo restituisca senso e significato a ognuno, secondo le proprie capacità.

Un percorso storico

Da diversi anni stiamo sperimentando un percorso di geometria euclidea che, ricalcando le ipotesi dello Zeuthen sulla nascita della geometria, permetta agli allievi di ripercorrere quel periodo, che va dai problemi di agrimensura degli antichi Egizi, fino ad Euclide, attraverso Pitagora e Talete¹. E' suggestiva l'ipotesi sull'origine degli strumenti: riga e compasso, forse versioni 'rigide' delle funi, unico strumento che in origine veniva utilizzato dagli *arpedonapti* egizi per le costruzioni geometriche attuate su superfici reali (i campi inondata dal Nilo, che rimanevano privi dei confini segnati dall'uomo). Lavorando su fogli bianchi, dapprima con cordicelle, poi con riga non graduata e compasso, e talvolta con il computer, siamo riusciti a ricostruire il senso che rendeva significativi problemi quali: disegnare un

1 M. Berni, L. d'Angelo «Da Pitagora agli assiomi: una proposta didattica»; *Insegnare*, n.5/95, pp. 47-51.

quadrato, un rettangolo, un rombo; problemi privi di significato su una pagina quadrettata e con squadre graduate. Ma il coinvolgimento degli studenti non era ancora alto: c'era sempre lo scoglio del linguaggio, che andava continuamente ri-costruito, andava corretto ad ogni parola, risultava frustrante per gli insegnanti e per gli studenti.

La narrazione

Secondo Bruner², il *linguaggio narrativo* permette di intercettare e sollecitare stili cognitivi che non risultano attratti dal linguaggio dichiarativo-formale delle scienze. L'unità di apprendimento qui proposta vuole verificare l'ipotesi secondo cui la costruzione di significati attraverso la narrazione può sconfinare dall'ambito narrativo e spostarsi nell'ambito formale, esattamente come è avvenuto nell'evoluzione storico-antropologica. Scopo dell'UA non è quindi quello di fermarsi alla narrazione (per 'assecondare' intelligenze di un certo tipo), ma di sollecitare attraverso di essa la costruzione di argomentazioni che si evolvono sempre di più, grazie ad uno scambio tra pari, avvicinandosi, per quanto possibile a ognuno, ad un'argomentazione che sia almeno a tratti formale (metodo di *deduzione locale*³). Nel seguito saranno indicate con un asterisco le funzioni che indicano il completo raggiungimento degli obiettivi; sta alla riflessione del docente, e al confronto collegiale, nei vari tipi di scuola, decidere se essi debbano essere discriminanti ai fini del proseguimento degli studi (obiettivi minimi).

Infine, possiamo notare come questa UA, pur essendo prettamente disciplinare, preveda una sollecitazione di conoscenze e competenze proprie di altre discipline, quali l'uso del linguaggio per argomentare, l'eventuale utilizzo delle fonti storiche (la storia egiziana, gli Elementi di Euclide in greco o in latino), le costruzioni geometriche nel disegno tecnico. Per il modo in cui viene svolto il percorso didattico è fondamentale il *comportamento*; viene infatti sollecitato l'aspetto cooperativo e lo scambio tra pari.

SCHEMA DELL'UNITÀ DI APPRENDIMENTO

ELEMENTO	FUNZIONE
APPRENDIMENTO UNITARIO (O COMPETENZA ATTESA)	<p>Davanti ad un problema reale di costruzione geometrica (con riga e compasso)</p> <ul style="list-style-type: none"> - individuare i dati iniziali necessari e sufficienti; - individuare e descrivere con proprietà di linguaggio una o più procedure per raggiungere l'obiettivo; - distinguere le informazioni che la costruzione trasferisce sulla figura in costruzione (ipotesi) da quelle che occorre dimostrare (tesi) per poter affermare la correttezza della procedura scelta; - (*) a partire da alcuni assunti iniziali, procedere con un percorso dimostrativo coerente e completo dall'ipotesi verso la tesi.

² J. Bruner, *La cultura dell'educazione*, Feltrinelli, Milano, 1997; in particolare il cap. 6: «Le narrazioni della scienza».

³ Cfr. L. Grugnetti, V. Villani, *La Matematica dalla scuola materna alla maturità*, Pitagora, Bologna, 1999; pag. 138, in cui si parla di *isole deduttive*.

ELEMENTO	FUNZIONE
OBIETTIVI FORMATIVI	<p>CONOSCENZE</p> <p>Conoscenza di termini: punto, retta, segmento, angolo, perpendicolare, lato, quadrato, rombo, triangolo, poligono; criterio (di uguaglianza), elementi omologhi, poligoni equiscomponibili.</p> <p>Conoscenza di procedure elementari (che si traducono in <i>postulati</i>): tracciare un segmento per due punti, tracciare un arco o una circonferenza di centro e raggio assegnati, prolungare un segmento.</p> <p>Conoscenza di regole: i tre criteri di uguaglianza dei triangoli; il V postulato di Euclide.</p> <p>Conoscenza di teoremi geometrici: proprietà del rombo, del triangolo isoscele; teorema dell'angolo esterno (in forma debole); teorema delle parallele (diretto e inverso); teorema di Pitagora.</p> <p>ABILITÀ</p> <p>Costruire con riga e compasso figure geometriche elementari: triangolo equilatero, isoscele, scaleno; rombo, angolo retto; angolo uguale ad un angolo dato; rettangolo, quadrato; quadrato equivalente alla somma di due quadrati.</p> <p>Fornire definizioni: segmento, angolo, angolo retto, rette perpendicolari, rette parallele, poligono, lato, quadrato, rombo, rettangolo, triangolo (equilatero, isoscele, scaleno; acutangolo, rettangolo, ottusangolo).</p> <p>Individuare proprietà di figure geometriche date e saperle esporre nel linguaggio naturale.</p> <p>Utilizzare i criteri di uguaglianza dei triangoli per semplici dimostrazioni di uguaglianza di elementi, quali segmenti o angoli.</p> <p>Riprodurre dimostrazioni di teoremi noti (proprietà del rombo, del triangolo isoscele, teorema dell'angolo esterno, teorema diretto e inverso delle rette parallele, teorema di Pitagora).</p> <p>(*) Dimostrare autonomamente alcune proprietà di figure geometriche date.</p> <p>ATTEGGIAMENTI</p> <p>Saper dialogare tra pari: saper intervenire ordinatamente, in modo</p>

appropriato e pertinente all'oggetto di discussione, entro tempi contenuti e controllati; saper ascoltare e attendere che l'intervento di un proprio pari o del docente venga portato a compimento, saper collaborare coi propri pari e col docente per costruire significati.

Sapersi assumere responsabilità individuali e nel gruppo: svolgere o tentare di svolgere i compiti assegnati dall'insegnante o all'interno del gruppo, con atteggiamento costruttivo e non rinunciatario; saper comunicare con franchezza le eventuali difficoltà incontrate; assumere l'eventuale correzione dell'insegnante come elemento per una propria autovalutazione (delle conoscenze, dei metodi...), e come supporto per la modifica delle variabili sotto il proprio controllo; saper reagire ad un eventuale insuccesso con uno studio ed un impegno maggiori, o di diversa qualità, saper trovare, riconoscere, sollecitare la collaborazione dei propri pari e dell'insegnante.

ELEMENTO	FUNZIONE
MEDIAZIONE DIDATTICA	<p>SCELTE DIDATTICHE</p> <p>La scelta didattica è quella di proporre una drammatizzazione verosimilmente storica delle situazioni che hanno determinato i problemi della geometria euclidea, in cui gli alunni assumono i ruoli contrapposti di contadini egiziani, proprietari di campi confinanti, di arpedonapti, che tendendo le corde e seguendo determinati criteri ricostruiscono i confini dei campi cancellati dal limo lasciato dalla piena del Nilo, di scribi che annotano le procedure utilizzate e forniscono istruzioni con un linguaggio dal tono ordinativo e giuridico, che sia accettato da tutti. Vi è una diversificazione naturale dei ruoli, ma tutti gli alunni sono coinvolti nella medesima proposta didattica, inserendosi ognuno secondo le proprie capacità, che vengono sollecitate sotto molteplici aspetti: operativo-pratico, linguistico, dell'intuizione geometrica.</p> <p>ASPETTI ORGANIZZATIVI</p> <p>Parte dell'attività può essere svolta nel cortile scolastico, se disponibile; in ogni caso le configurazioni ottenute sul terreno vanno poi riportate su fogli bianchi (non quadrettati) in scala. L'attività richiede tempi distesi, a seconda degli atteggiamenti (disponibilità a svolgere un compito, disponibilità al dialogo tra pari,...), comunque non meno di due mesi di scuola, da distribuire eventualmente in un lasso di tempo più ampio anche in ore di lezione non continuative, per consentire il tempo necessario per la metabolizzazione dell'argomento. I materiali utilizzati sono delle corde per l'eventuale</p>

lavoro sul terreno reale, delle cordicelle per la simulazione sul foglio bianco, su cui gli alunni lavorano a coppie; le cordicelle sono presto sostituite con *riga non graduata* e *compasso*, utilizzati in alternativa per un puro scopo di praticità, ma secondo le stesse regole (i *postulati euclidei*).

Il passaggio dal grande (il campo) al piccolo (il foglio bianco) può essere graduale, per esempio con l'uso di *poster* (carta da pacchi possibilmente bianca) su cui i ragazzi possono lavorare a gruppo per costruire le figure con le cordicelle; tutte le azioni sono descritte (e guidate) da istruzioni messe per iscritto, ed esposte alla lavagna con l'aiuto dei poster.

ELEMENTO	FUNZIONE
COMPITO IN SITUAZIONE	<p>Un contadino egiziano, Nilus, proprietario di un campo di forma quadrata, eredita alla morte del padre un altro campo, sempre di forma quadrata; con l'aiuto di uno scriba e di alcuni arpedonapti, desidera riunire i due appezzamenti, piuttosto distanti, in un unico campo, ancora di forma quadrata, che potrà coltivare più agevolmente. Se tu fossi lo scriba, che istruzioni daresti agli arpedonapti?</p> <p>Osservando il nuovo campo, Nilus non è convinto che la nuova superficie sia proprio la somma delle precedenti; in che modo cercheresti di convincerlo?</p>

Maurizio Berni
Nucleo Ricerca Didattica
Università di Firenze