

La bellezza della matematica

Claudio Citrini

Non sono un filosofo, e non ho teorie generali da esporre in campo estetico. Sono solo una persona che ha dedicato una vita alla ricerca e all'insegnamento della matematica, e che cerca di riflettere sulle motivazioni che lo hanno portato ad amare questa disciplina, e anche su quelle che portano altri a detestarla.

Quando si parla di ricerca scientifica, si intende in genere la ricerca accademica di concetti o risultati nuovi, che fanno avanzare le conoscenze di una disciplina, ma le motivazioni che spingono a tale ricerca non sono sostanzialmente diverse da quelle che inducono una persona qualsiasi a porsi dei problemi e a cercare di risolverli. Naturalmente se quello che interessa è solo la soluzione, basta fare una "ricerca" sul web e si ha subito la risposta; ma se si è interessati al viaggio e non solo alla meta, non ha alcuna importanza se altri, magari moltissimi altri, hanno già percorso le stesse strade.

È come andare in montagna: c'è chi scala per primo il K2, e chi, come me, si accontenta di una bella camminata verso un rifugio o una cima semplice, beandosi non solo della vista dei monti e dei boschi e di tutte le bellezze che la natura offre, che potrebbe gustare anche salendo in funivia, ma che sono esaltate della fatica che quella conquista gli costa per raggiungerla con le proprie gambe, un passo dopo l'altro, continuamente cambiando scenari e prospettive.

Però il viaggio è veramente bello se non è un vagabondare, un "on the road" privo di senso, ma è un viaggio verso una meta: una meta di cui si conosce, o almeno si intuisce, la reale esistenza o che è solo un ideale, ma che attrae la nostra bussola di viandanti.

In tal senso, anche un bambino può fare della ricerca, anzi, la fa naturalmente, perché questa tendenza è innata nell'uomo.

Ho conosciuto molte persone che si dilettevano

a cercare di risolvere problemi matematici, la cui soluzione a volte è ben nota agli esperti, altre volte invece è ancora ignota. Un esempio del primo tipo potrebbe essere quello di trovare tutte le terne pitagoriche, cioè quelle terne di numeri interi (come 3, 4 e 5) che costituiscono le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo, mentre un problema come la famosa congettura di Goldbach, secondo la quale ogni numero pari è la somma di due numeri primi, affascina per la sua eleganza e semplicità di enunciato, anche se resta indimostrata dopo più di tre secoli di ricerche.

Ma anche un grande come Newton confessava, alla fine della sua vita: «Non so come io possa apparire al mondo: a me sembra di essere stato soltanto un ragazzo che gioca sulla riva del mare, divertendomi di tanto in tanto nel trovare un ciottolo più liscio e una conchiglia più bella del solito, mentre il grande oceano della verità giaceva dinanzi a me interamente sconosciuto».

Cercherò di sviluppare questi temi nel resto di questo scritto, che non è di stretta attualità, come dovrebbe essere un editoriale, ma che a me pare di perenne attualità; terminerò comunque con qualche riflessione sulla situazione della scuola.

Vari aspetti della matematica

La matematica si presenta con diverse connotazioni. Tutti, anche quelli che non la conoscono e non la amano, sanno che è utile. Dove, come e perché lo sia, pochi lo sanno, in generale settorialmente, e agli altri non interessa affatto. A dire il vero, anche a molti matematici non interessa affatto, perché si occupano di altri aspetti della matematica, quelli più profondi e più veri.

In una lettera a Legendre del 1830, C.G.J. Jacobi scriveva: «M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir

que le but unique de la science c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde».

Quasi cent'anni dopo, uno scrittore sensibile alla matematica come Robert Musil, affermava: «Ma soltanto se, invece di guardare all'utilità esterna, consideriamo nella matematica stessa la proporzione fra le parti utilizzate e le parti non utilizzate scorderemo l'altro volto, il volto autentico di questa scienza. Il volto non finalizzato, ma antieconomico e passionale».

In modo più equilibrato, il grande matematico Henri Poincaré affermava: «Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pur l'étude de la nature. Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique».

È quindi naturale che chi vuole conoscere la natura ami la matematica. La matematica è il linguaggio con cui è stato scritto il mondo, e quindi – argomentano i platonici – i suoi concetti e le sue leggi hanno una loro esistenza reale, esistono prima dell'uomo. S. Agostino ne era convinto: «Dovremmo altresì domandarci [...] se queste tre proprietà: misura, numero e peso – secondo le quali la Scrittura afferma che Dio ha disposto ogni cosa – erano in qualche luogo prima che fosse creato l'universo oppure furono create anch'esse e, se già esistevano, dov'erano. In effetti prima della creazione non esisteva nulla all'infuori del Creatore. Esse dunque erano in Lui».

I matematici moderni ritengono invece che la matematica sia una creazione del pensiero umano. Lo afferma Cartesio quando dice che «il numero non sta in alcuna cosa creata [...] ma è semplicemente un modo di pensare», mentre ancora a metà dell'800 Leopold Kronecker teneva una posizione intermedia affermando che “i numeri interi li ha fatti il buon Dio, tutto il resto è opera dell'uomo».

Rivolgendosi ai giovani nel 2006, Benedetto XVI ha detto: «Il grande Galileo ha detto che Dio ha scritto il libro della natura nella forma del linguaggio matematico. Lui era convinto che Dio ci ha donato due libri: quello della Sacra Scrittura e quello della natura. E il linguaggio della natura – questa era la sua convinzione – è la matematica,

quindi essa è un linguaggio di Dio, del Creatore. Riflettiamo ora su cos'è la matematica: di per sé è un sistema astratto, [...] una grande, geniale invenzione dello spirito umano. La cosa sorprendente è che questa invenzione della nostra mente umana è veramente la chiave per comprendere la natura, che la natura è realmente strutturata in modo matematico e che la nostra matematica, inventata dal nostro spirito, è realmente lo strumento per poter lavorare con la natura, per metterla al nostro servizio, per strumentalizzarla attraverso la tecnica». A chi crede, ciò appare semplicemente come una conseguenza del fatto che l'uomo è stato creato a immagine e somiglianza del Creatore.

Molti pensano che la matematica sia il paradigma del vero e del logico. A livello superficiale, ciò può essere accettato, ma in realtà, se la coerenza è una proprietà essenziale della matematica, la verità lo è solo per chi ne ha una visione platonica.

Quanto alla logica, la coerenza secondo Hilbert era il requisito fondamentale. Purtroppo essa non può essere dimostrata all'interno della matematica stessa, ma solo con ragionamenti più ampi (metateorie) che a loro volta devono essere giustificati, in un gioco di scatole cinesi che non ha fine. Una battuta di André Weil, grande matematico del gruppo Bourbaki e fratello di Simone, chiarisce la situazione: «Dio esiste perché la matematica è non contraddittoria, e il diavolo esiste perché non possiamo dimostrarlo».

Anche Musil al riguardo così si esprimeva: «Proprio così, i matematici guardarono giù al fondo e videro che tutto l'edificio è sospeso in aria. Eppure le macchine funzionano! ... Solo il matematico, oggi, può provare sensazioni così fantastiche. A questo scandalo intellettuale il matematico reagisce in modo esemplare: lo sopporta con orgogliosa fiducia nella diabolica pericolosità del proprio intelletto».

Solo gli appassionati però pensano che la matematica sia bella in sé.

Il senso del bello matematico

Secondo Aristotele, «a torto alcuni accusano le scienze matematiche di non dimostrare nulla intorno al bello e al bene. Ne parlano e lo dimostrano in sommo grado: anche se non ne

fanno il nome, non per questo si può dire che non ne parlano: *ché ne mostrano gli effetti nei rapporti con le cose. Le forme principali del bello sono l'ordine, la simmetria, la limitazione: delle quali cose le scienze matematiche sopra tutte fan dimostrazione*».

Di parere diametralmente opposto parrebbe essere Leopardi, che nello Zibaldone afferma: «Dalla teoria del piacere esposta in questi pensieri si comprende facilmente quanto e perché la matematica sia contraria al piacere, e siccome la matematica, così tutte le cose che le rassomigliano o appartengano, esattezza, secchezza, precisione, definizione, circoscrizione, sia che appartengano al carattere e allo spirito dell'individuo, sia a qualunque cosa corporale o spirituale». *Ma piacere e bellezza non sono sinonimi.*

Ecco come Poincaré descrive le sensazioni estetiche date dai concetti dalla matematica: «...*leurs adeptes y trouvent des jouissances analogues à celles que donnent la peinture et la musique. Ils admirent la délicate harmonie des nombres et des formes; ils s'émerveillent quand une découverte leur ouvre une perspective inattendue; et la joie qu'ils éprouvent ainsi n'a-t-elle pas le caractère esthétique, bien que les sens n'y prennent aucune part? Peu de privilégiés sont appelés à la goûter pleinement, cela est vrai, mais n'est-ce pas ce qui arrive pour les arts les plus nobles? C'est pourquoi je n'hésite pas à dire que les mathématiques méritent d'être cultivées pour elles-mêmes et que les théories qui ne peuvent être appliquées à la physique doivent l'être comme les autres*».

A differenza delle scienze sperimentali, come la fisica e la chimica, gli oggetti della matematica sono idee astratte, e le idee hanno la bellezza della pura forma.

Godfrey Hardy, nella sua autobiografia scientifica, afferma: «Il matematico, invece, non ha altro materiale con cui lavorare se non le idee; quindi le forme che crea hanno qualche probabilità di durare più a lungo, perché le idee si usurano meno delle parole. [...] La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è un posto perenne per la matematica brutta».

In questo senso, Simone Weil, scrivendo al fratello, poteva definire la «Matematica: universo

astratto in cui io dipendo solo da me». Tuttavia la frase fa pensare che la matematica sia un'arte da eremita, da solitario. Al contrario, una delle sensazioni che dà la matematica è quella di sentirsi uniti a tutti, in quanto in tutto il mondo i matematici parlano lo stesso linguaggio: i problemi di Euclide sono del tutto paragonabili a quelli dei Sangaku giapponesi!

Non solo la matematica è bella in sé, ma rende belle le cose in cui si trova – tutto l'universo, quindi! E anche le opere dell'uomo sono rese belle dalla matematica che le pervade, consciamente o inconsciamente. Sant'Agostino affermava: «Cerca [...] chi muove le membra dello stesso artefice. Sarà il numero perché anche esse si muovono secondo una misura numerica. E se sottrai dalle mani l'opera da produrre e dalla coscienza l'intenzione di produrla e il movimento delle membra è rapportato all'estetica, si chiamerà danza. Chiedi dunque che cosa è estetico nella danza, il numero ti risponderà: *Eccomi, sono io*».

I pavimenti musivi delle ville romane o della basiliche paleocristiane sono realizzati con raffinati schemi matematici (penso ad esempio a Santa Maria in Trastevere, dove si trovano disegni che precorrono i moderni frattali); i fregi e i mosaici dell'Alhambra contengono tutte le tipologie possibili di simmetrie, segno di una ricerca di strutture formali che sottostanno e arricchiscono di contenuto concettuale le realizzazioni degli artigiani. Ma anche la natura da sola crea bellezze con le forme geometriche: si pensi ai cristalli, e in particolare a quelli di ghiaccio, o alla struttura del disco dei semi di girasole, o dei cavolfiori romaneschi, con le loro spirali costruite secondo la successione numerica di Fibonacci. Si pensi agli alveari, ottimizzati non solo nella forma esagonale delle celle, ma addirittura in quella dei rombi inclinati che ne costituiscono il fondo. «Ovunque c'è numero, c'è bellezza» diceva Giamblico.

Il piacere della ricerca matematica

Il grande matematico David Hilbert sosteneva che «uno degli stimoli principali ad occuparci di un problema matematico è che sentiamo continuamente dentro di noi l'appello: ecco il problema, trova la soluzione; la puoi trovare mediante il puro pensiero; perché in matematica

non c'è l'ignorabimus (Denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus)».

Se l'ultima affermazione, retaggio del pensiero positivistico, era destinata ad essere smontata dai teoremi di incompletezza di Gödel, la prima parte di queste considerazioni è profondamente vera.

L'esperienza della ricerca matematica è stata paragonata alla poesia da K. Weierstrass: «È vero che un matematico che non è in qualche modo un poeta non sarà mai un perfetto matematico».

Naturalmente l'opera del poeta e quella del matematico sono molto diverse. Si racconta che quando un suo allievo confessò a Poincaré che aveva lasciato gli studi matematici per iscriversi a Lettere, gli disse che la poesia lo affascinava perché è l'arte di dare nomi diversi alle stesse cose. Al che Poincaré rispose che al contrario la matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse, intendendo con questo che la matematica tende a cercare il concetto unificante, sia al suo interno che nelle applicazioni.

A questo riguardo noto il diverso valore che ha la memoria per la poesia, dove serve per ripetere e gustare magari con sempre nuove sfumature i componimenti dei grandi autori, e per la matematica, in cui funge solo da ancella per la parte più meccanica del calcolo, ma che non deve mai essere usata come sostituto della comprensione dei concetti. Studiare a memoria i grandi poeti è doveroso e arricchisce, studiare a memoria le definizioni e i teoremi (per non parlare delle dimostrazioni) è avvilente e impoverisce.

Ancora Hardy scrive: «La "serietà" di un teorema matematico non dipende dalle sue applicazioni pratiche, [...] ma dalla significatività delle idee matematiche che esso mette in relazione. In termini approssimativi si può dire che un'idea matematica è "significativa" se la si può collegare in modo naturale e illuminante a una vasta rete di altre idee matematiche. [...] La serietà di un teorema, naturalmente, non dipende dalle sue conseguenze, che sono solo la riprova della sua serietà».

André Weil descrisse in termini suggestivi questa ricerca di unificazione: «Come sanno tutti i matematici, nulla è più fecondo di queste oscure analogie, questi indistinti riflessi tra una teoria e l'altra, queste carezze furtive, queste indecifrabili foschie; e nulla dà maggior piacere

allo studioso. Poi, un giorno, l'illusione svanisce, il presentimento diventa certezza, le teorie gemelle rivelano la loro origine comune prima di svanire. Come insegna la Gītā, si giunge alla conoscenza e all'indifferenza nello stesso tempo [...] la metafisica è diventata matematica, pronta a formare la materia di un trattato la cui fredda bellezza non saprà più emozionarci».

L'ultima frase di Weil spiega, credo, molto del fallimento della matematica a scuola. Se il docente, pur preparato, mostra solo il prodotto finito, insegna le definizioni, i teoremi, le formule come oggetti immutabili e alieni, fa esercitare sulla tecnica (necessaria, ovviamente) e non sulla strategia, forse i ragazzi più interessati ne percepiranno la fredda bellezza, ma giungeranno anche "alla conoscenza e all'indifferenza nello stesso tempo". Per gli altri sarà solo "tristezza e noia", e allora avrà ragione Leopardi, la matematica sarà necessariamente l'opposto del piacere.

Ma se li si porta a conquistare gli stessi risultati col loro ragionamento, se si mostra loro che la storia della matematica è piena di tentativi, di intuizioni e anche di errori, che certe precisazioni che appaiono maniacalmente pignole sono invece necessarie perché l'oggetto abbia veramente le proprietà che si desiderano da lui, e che ne fanno un concetto matematicamente significativo, come intendeva Hardy, forse saranno più pronti ad andare avanti da soli nello studio, ad appassionarsi ad esso come cosa propria.

Il classico, magistrale testo di Imre Lakatos, Dimostrazioni e confutazioni, mostra la via di una didattica vivace e costruttiva, che le tecnologie possono certamente aiutare (si pensi ai programmi di geometria interattiva) e le metodologie alternative, come le flipped classrooms, sviluppare in modo efficace, sempre sotto la guida di un buon maestro.

Claudio Citrini

**L'immagine di copertina
del n. 8 è di
Silvia Baldrighi**